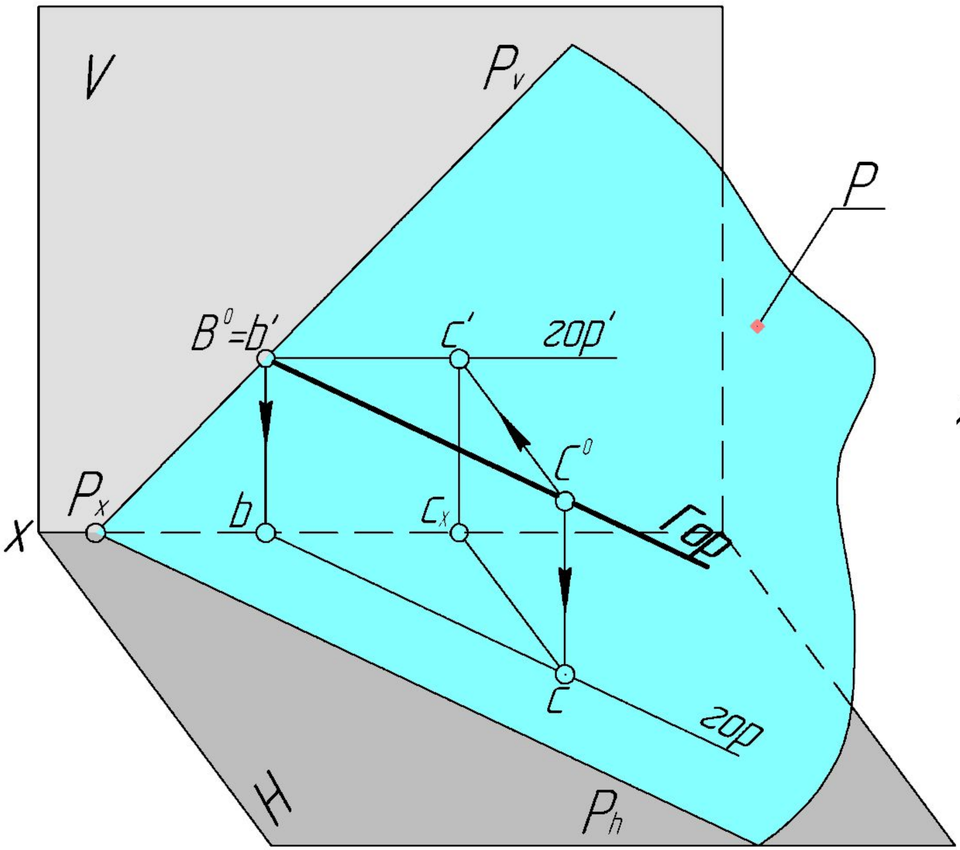
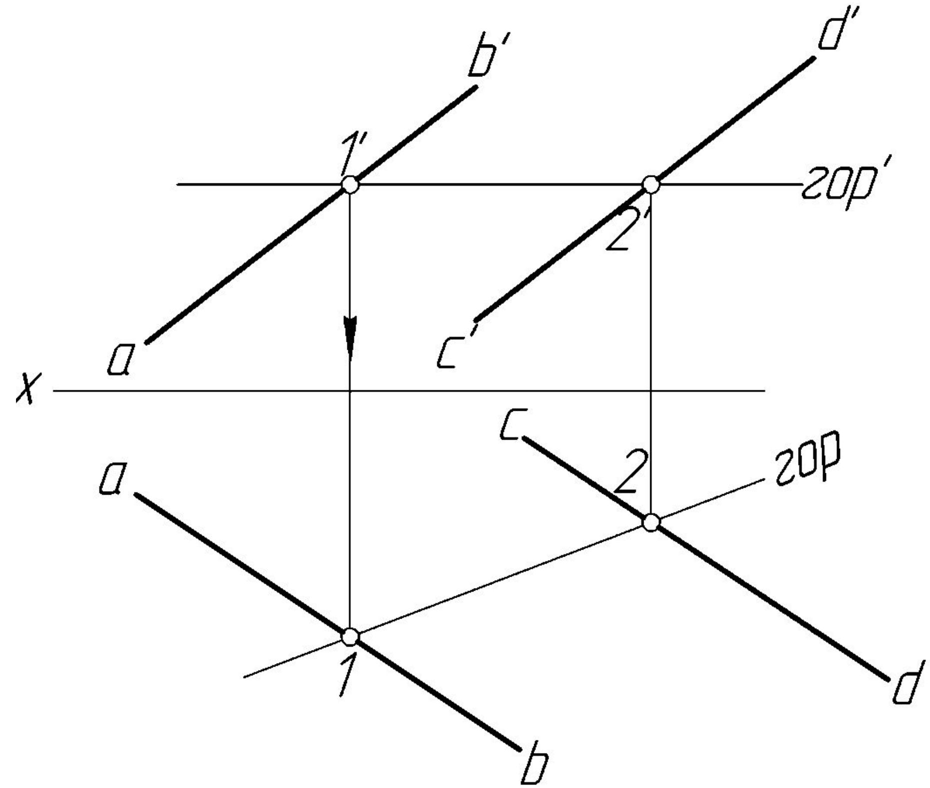
Особые линии плоскости

Из бесконечного множества прямых, принадлежащих плоскостям, выделяют семейства прямых, расположенных в плоскостях и параллельных плоскостям проекций.



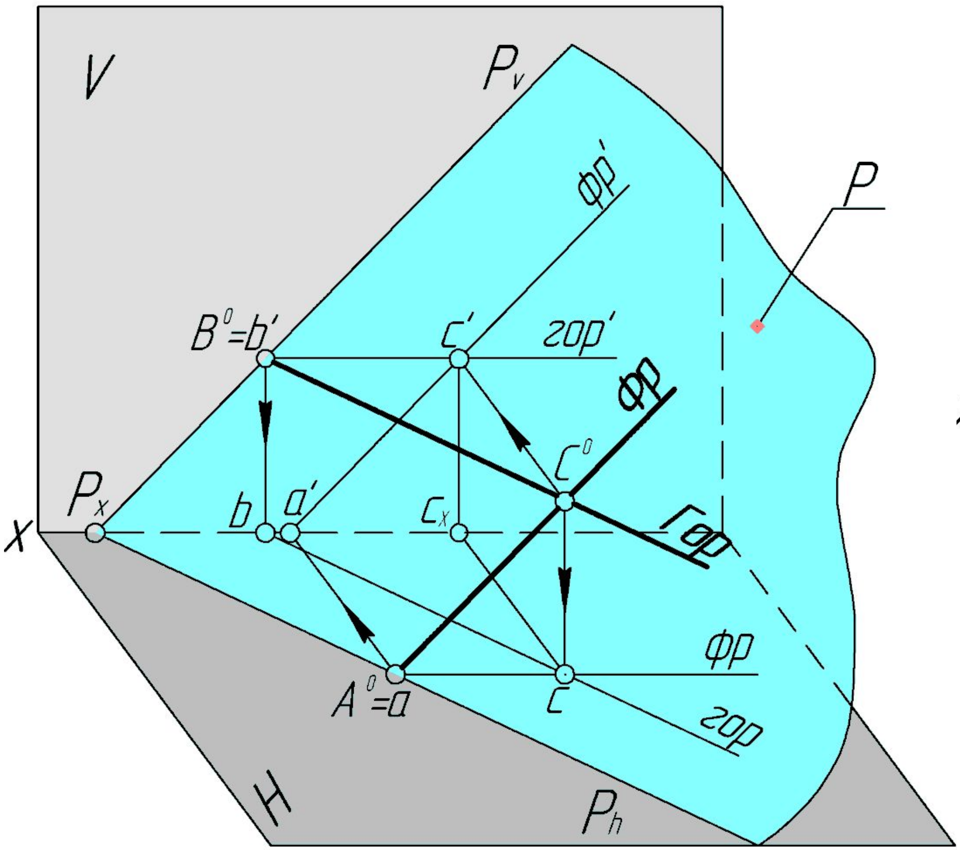


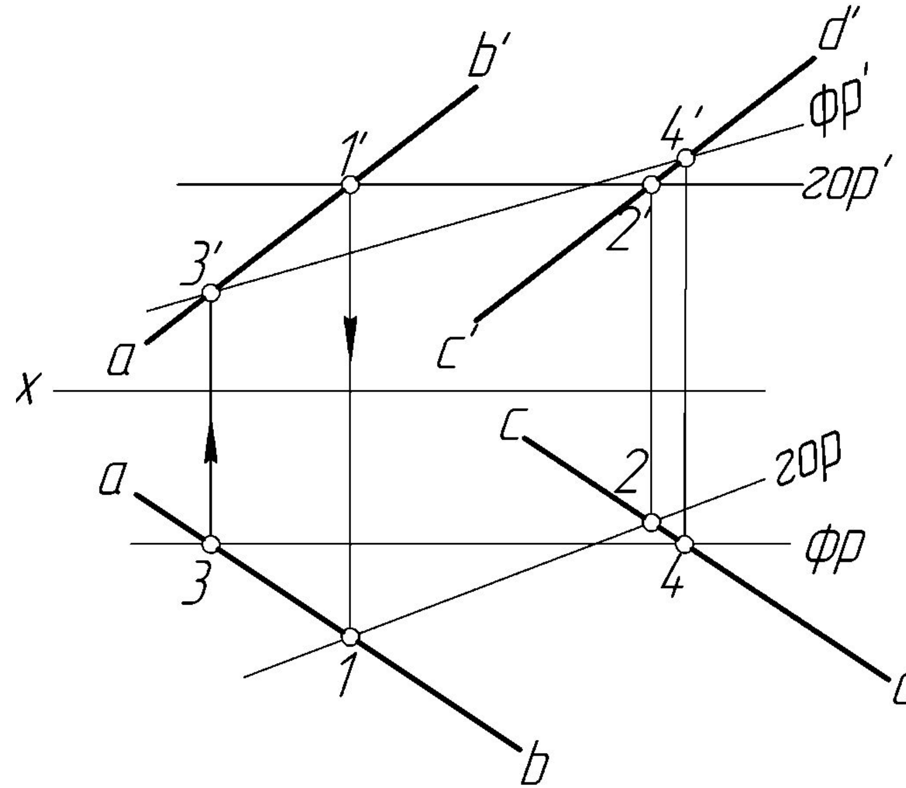
Горизонталями плоскости называют прямые, принадлежащие плоскости и параллельные горизонтальной плоскости проекций.

$$ГОР \subset P;\ ГОР \parallel H \rightarrow гор' \parallel 0X$$

Особые линии плоскости

Из бесконечного множества прямых, принадлежащих плоскостям, выделяют семейства прямых, расположенных в плоскостях и параллельных плоскостям проекций.





Фронталями плоскости называют прямые, принадлежащие плоскости и параллельные фронтальной плоскости проекций.

$$ФР \subset P;\ \ ФР \parallel V \rightarrow фр \parallel 0X$$

Положение плоскости относительно плоскостей проекций

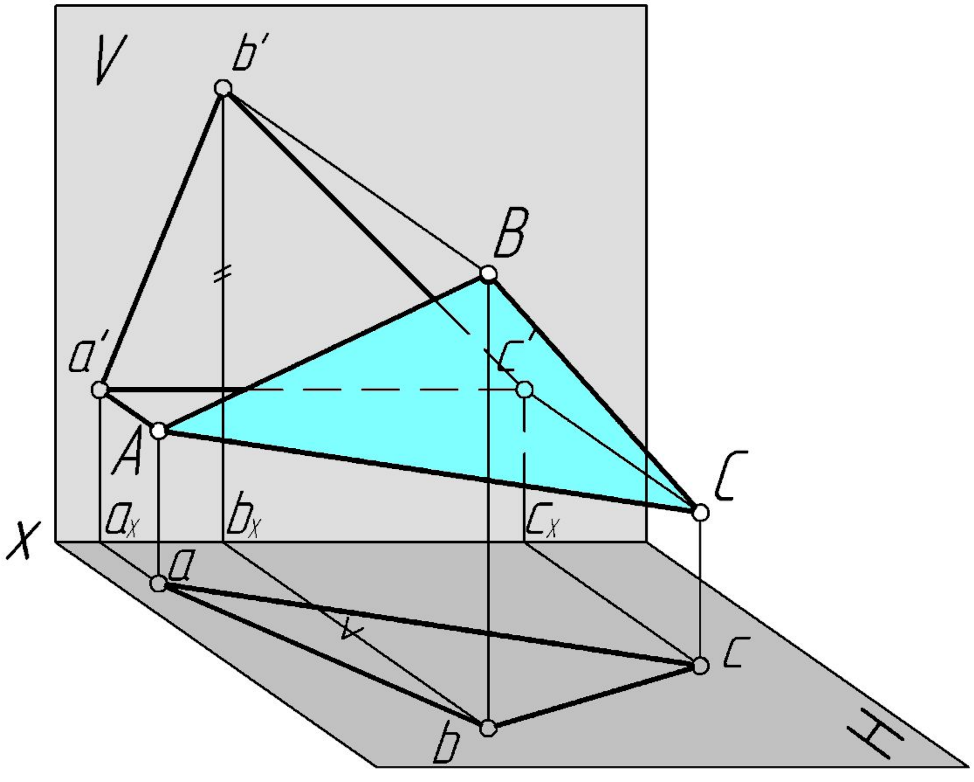
Возможны:

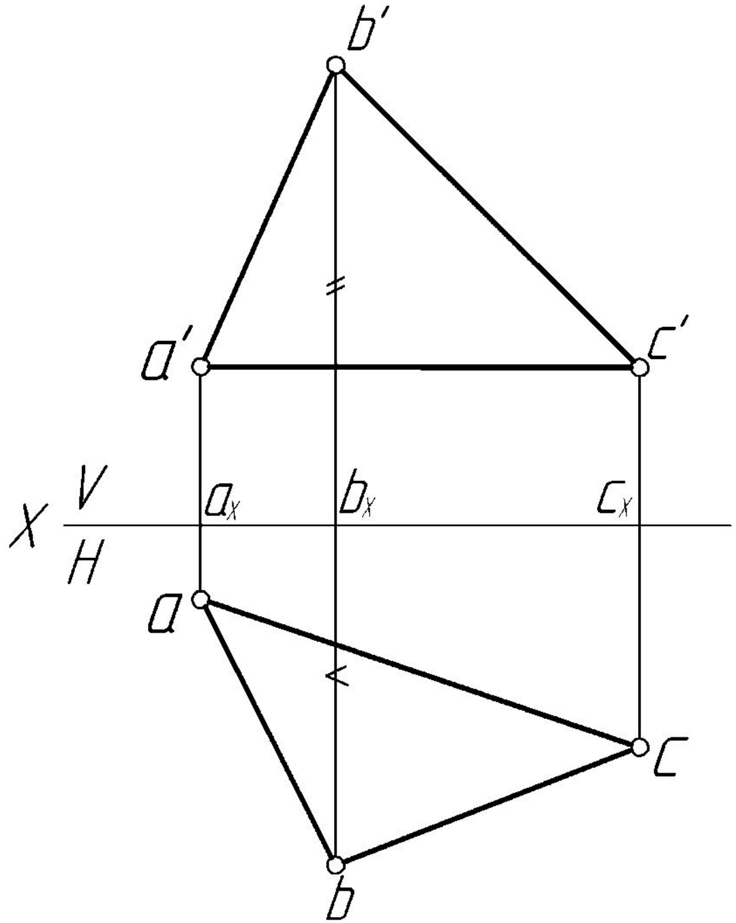
1). Плоскость не перпендикулярна ни одной ПП

2). Плоскость перпендикулярна одной ПП

3). Плоскость перпендикулярна двум ПП

<u>Плоскость не перпендикулярна ни одной ПП – *плоскость общего*</u>

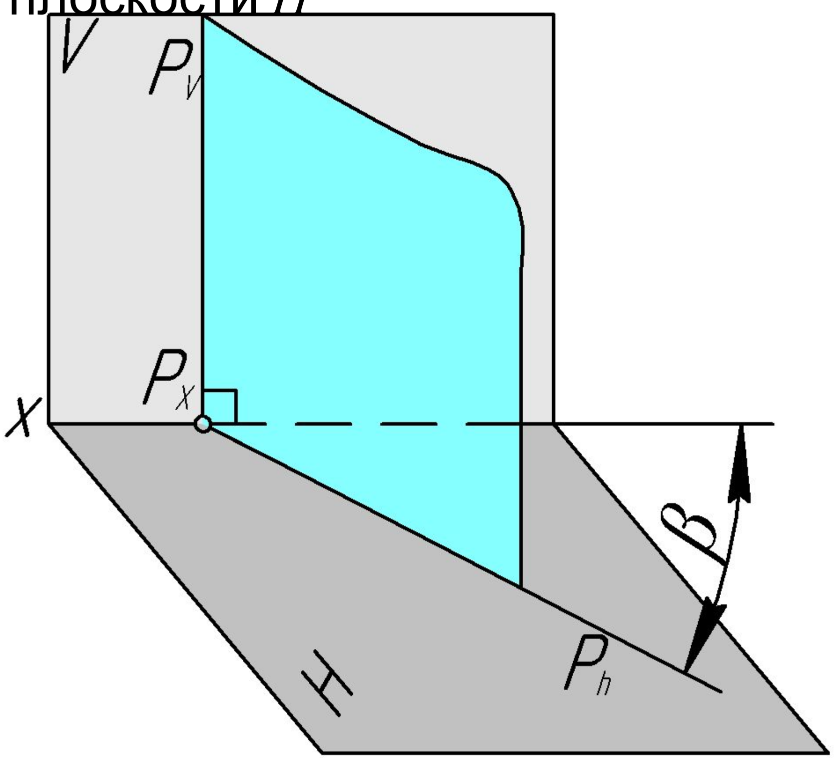


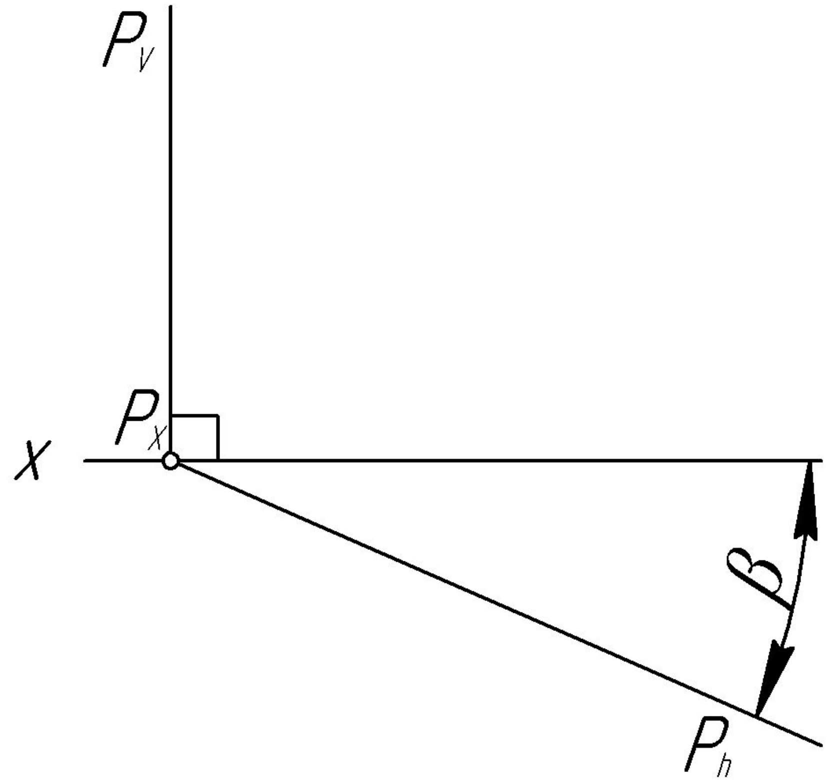


Плоскости перпендикулярна одной или двум ПП – *плоскость частного положения*

Плоскости перпендикулярна одной плоскости проекций – проецирующие плоскости

1). *Горизонтально – проецирующая плоскость* (*ГПП*) –плоскость перпендикулярна плоскости H



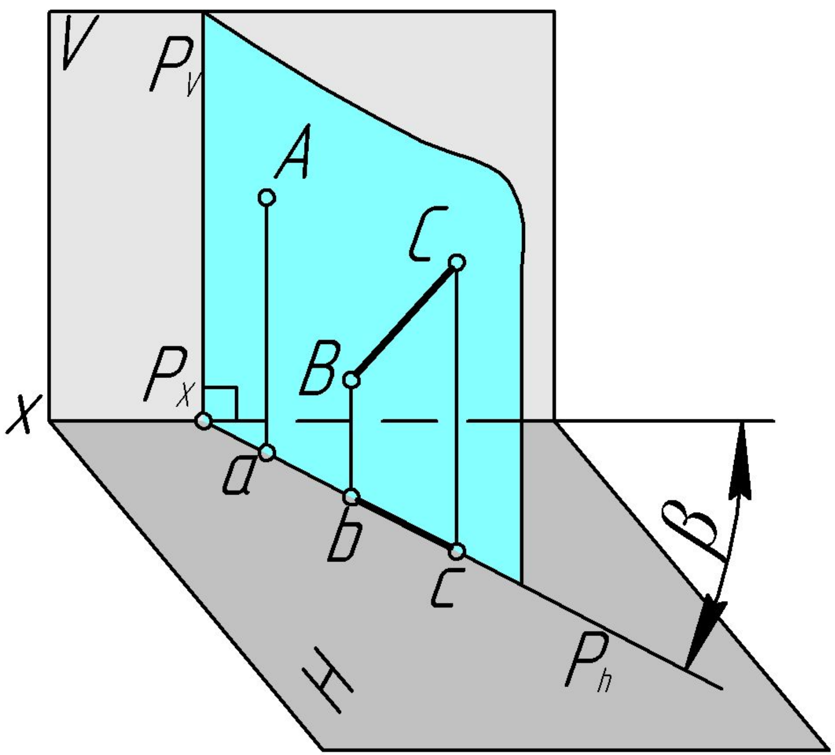


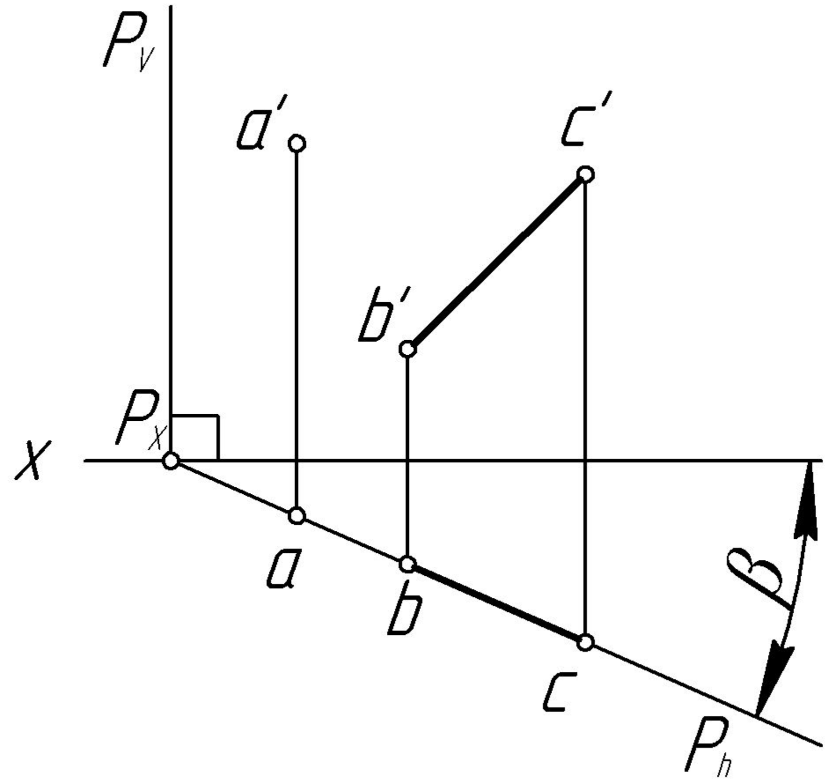
$P \perp H \rightarrow P_V \perp 0X;$

β - угол наклона к плоскости V

Основное свойство проецирующей плоскости:

если плоскость является проецирующей по отношению к ПП (например, перпендикулярна H), то проекция любого геометрического элемента, лежащего в данной плоскости (точка, прямая, фигура пересечения и т.д.), совпадает с проецирующим следом этой плоскости (например, P_h).





$P \perp H \rightarrow P_V \perp 0X;$

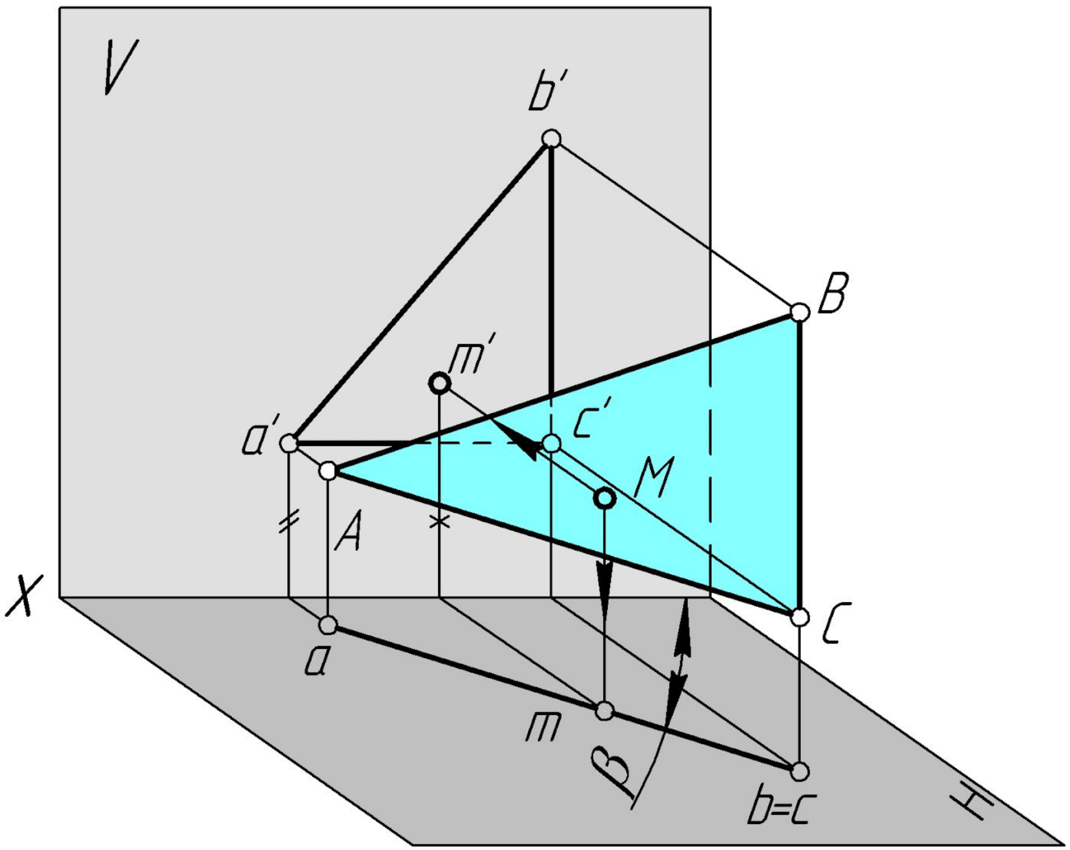
β - угол наклона к плоскости V

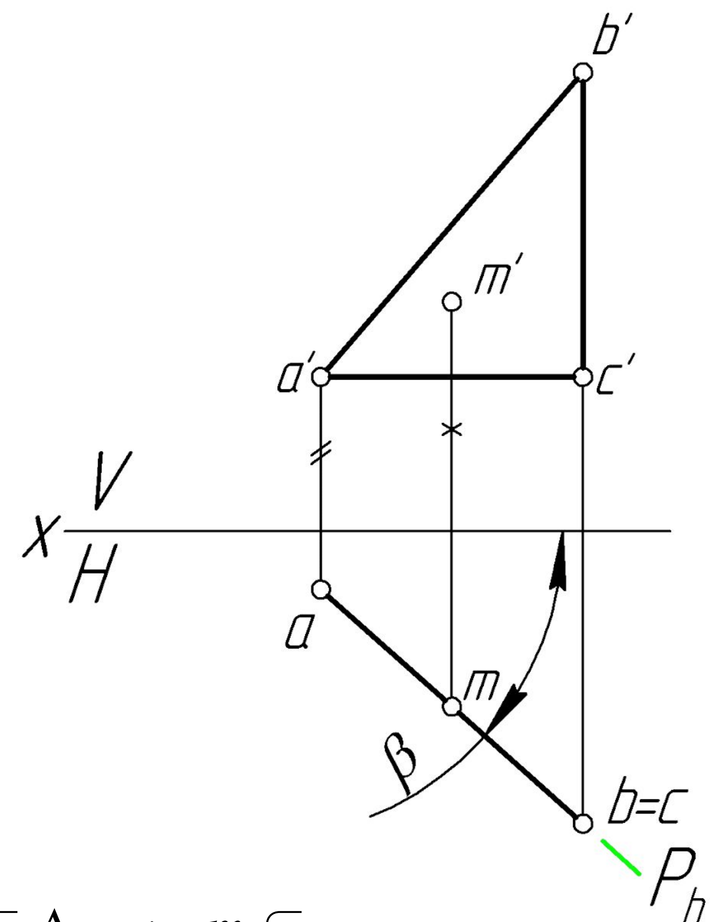
$A \in P \rightarrow a \in$

$BC \subset P \rightarrow bc \subset$

__Основное свойство проецирующей плоскости__:

если плоскость является проецирующей по отношению к ПП (например, перпендикулярна H), то проекция любого геометрического элемента, лежащего в данной плоскости (точка, прямая, фигура пересечения и т.д.), совпадает с проецирующим следом этой плоскости (например, P_h).





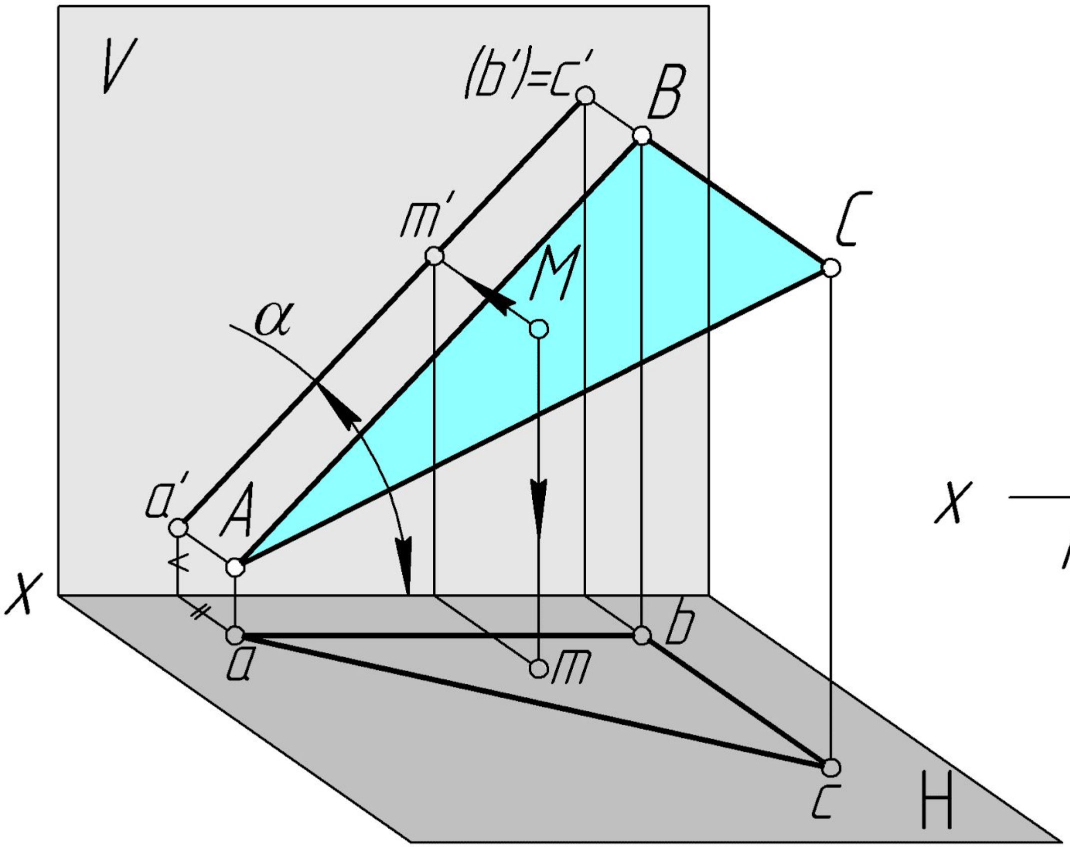
$P(\Delta ABC); \quad P \perp H \;\rightarrow\; abc \in P_h;$

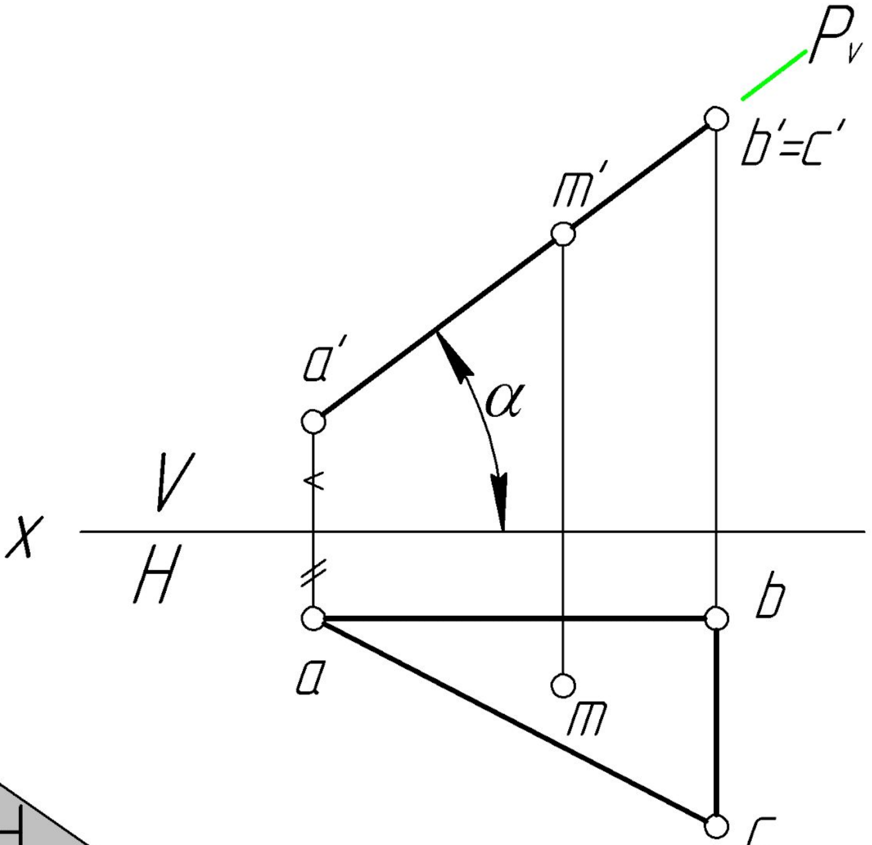
β - угол наклона к плоскости V

$M \in \Delta \;\rightarrow\; m \in$

P

2). *<u>Фронтально – проецирующая плоскость</u>* (ФПП) – плоскость перпендикулярна
плоскости V.



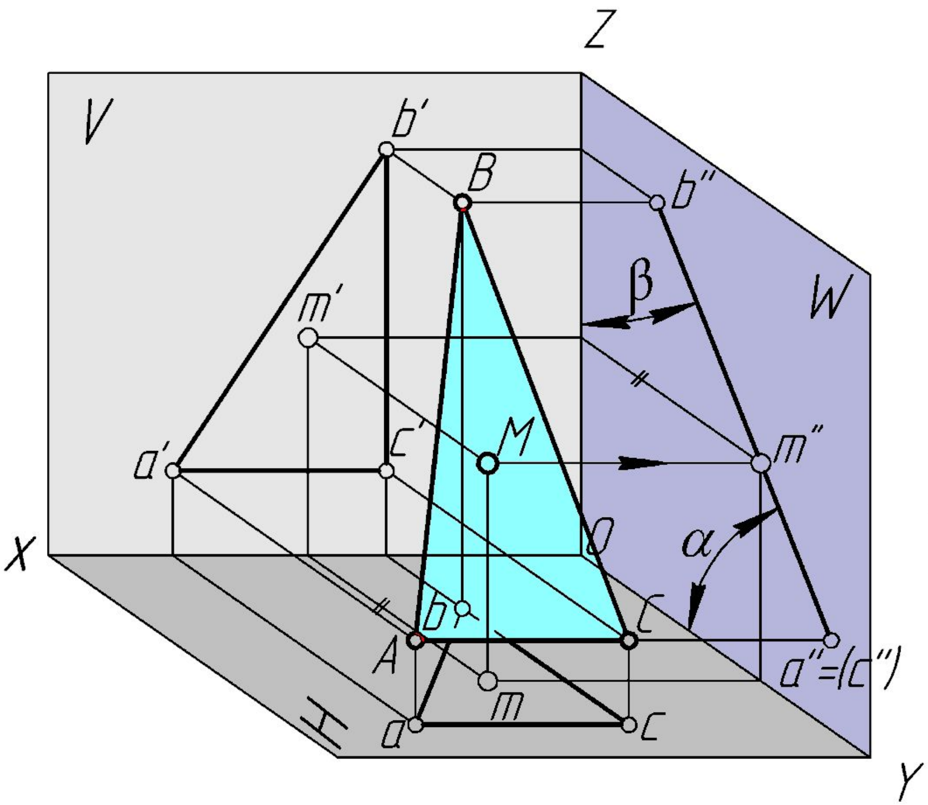


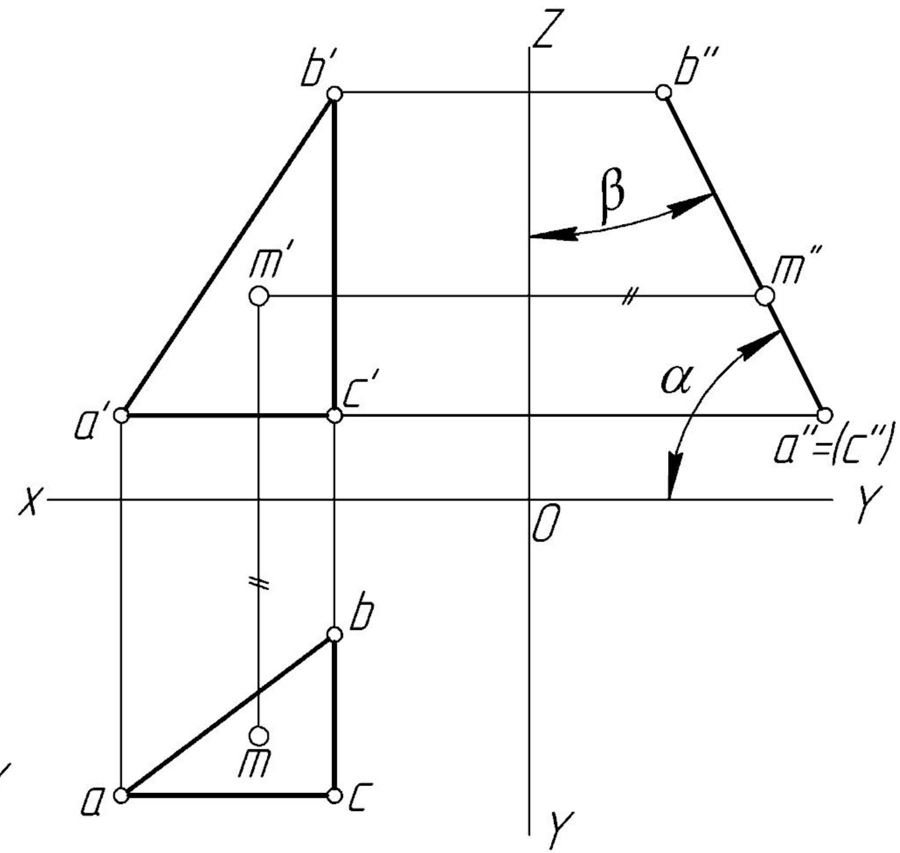
$P(\Delta ABC);\quad P\perp V \;\rightarrow\; a'b'c'\in P_V;$

α - угол наклона к плоскости H

$M\in P \;\rightarrow\; m'\in P_V$

3). <u>*Профильно – проецирующая плоскость*</u> (ППП) – плоскость перпендикулярна
плоскости *W*.





$P(\Delta ABC);\quad P \perp W \;\rightarrow\; a''b''c'' \in P_W$

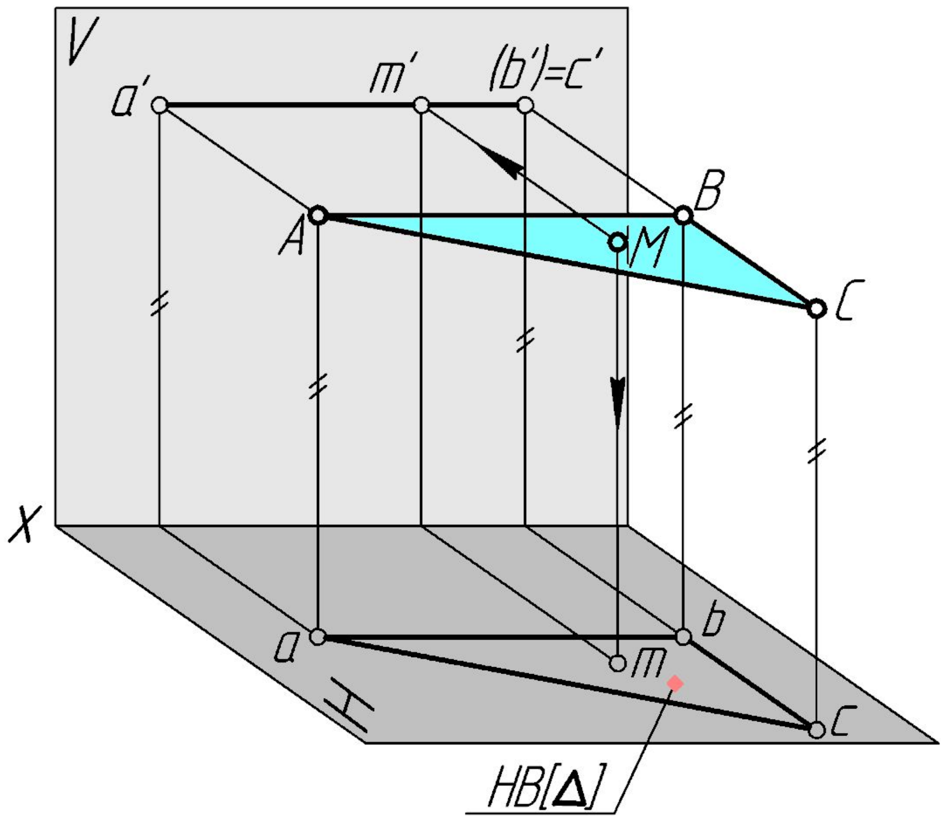
α - угол наклона к плоскости H

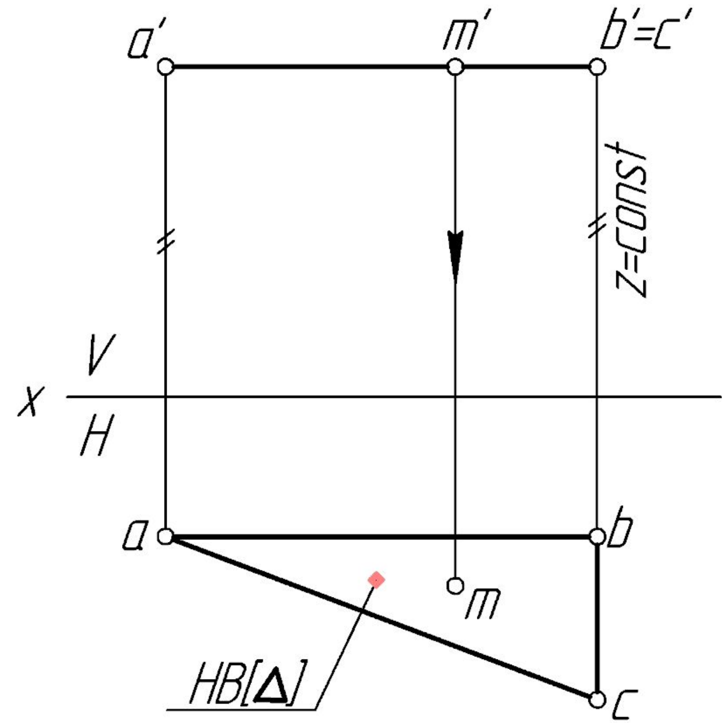
β - угол наклона к плоскости V

$M \in \Delta \;\rightarrow\; m'' \in P_W$

Плоскости перпендикулярна двум плоскости проекций –плоскости уровня

4). *Горизонтальная плоскость* – плоскость параллельная плоскости H





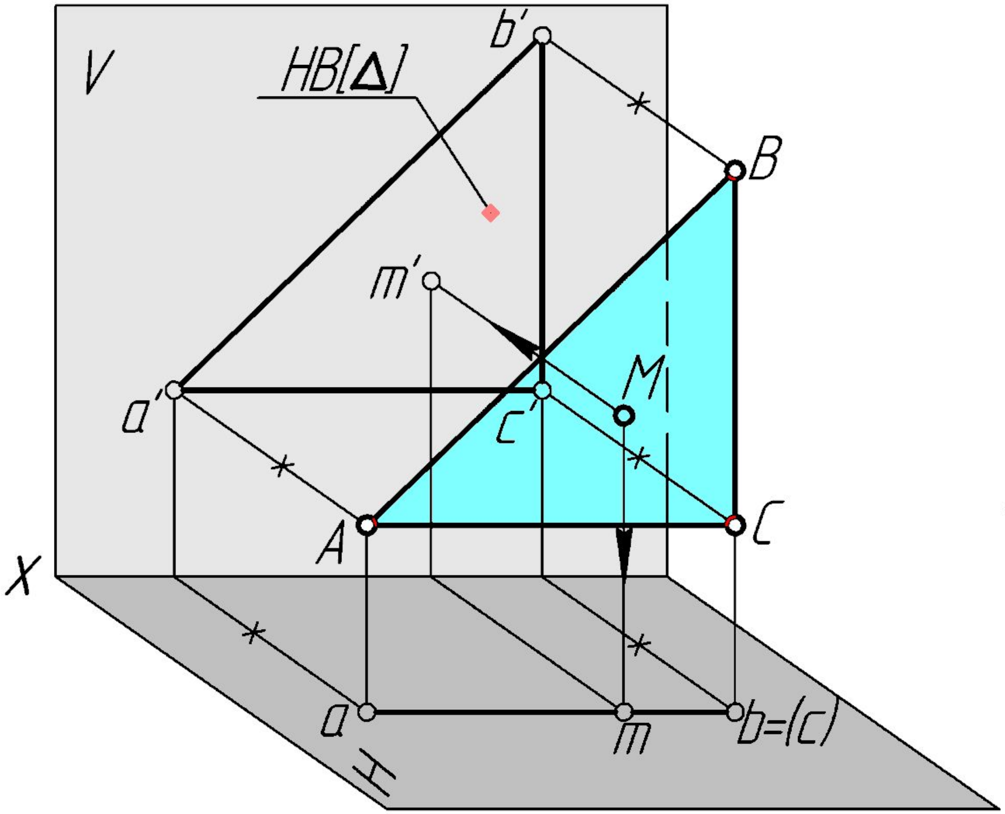
$P(\Delta ABC);\ \ P\perp V(W)\ \leftrightarrow\ P\,||\,H\ \rightarrow\ z{=}const$

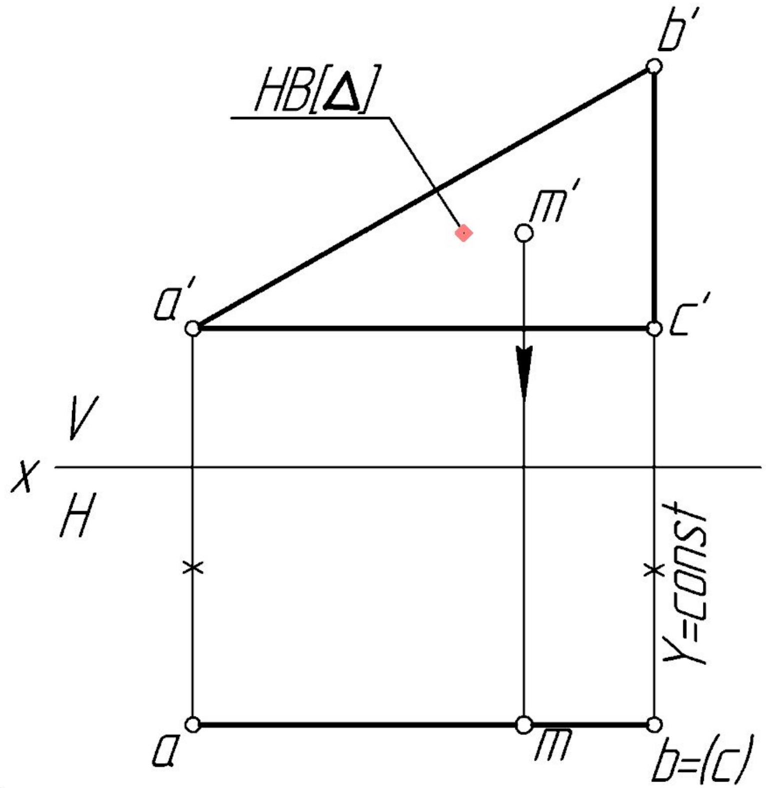
$P_V\,||\,0X$ и $P_W\,||\,0Y;\ \Delta abc \cong \Delta ABC$

$M \in \Delta \rightarrow m' \in P_V;\ m'' \in P$

Плоскости перпендикулярна двум плоскости проекций –плоскости уровня

5). *Фронтальная плоскость* – плоскость параллельная плоскости V





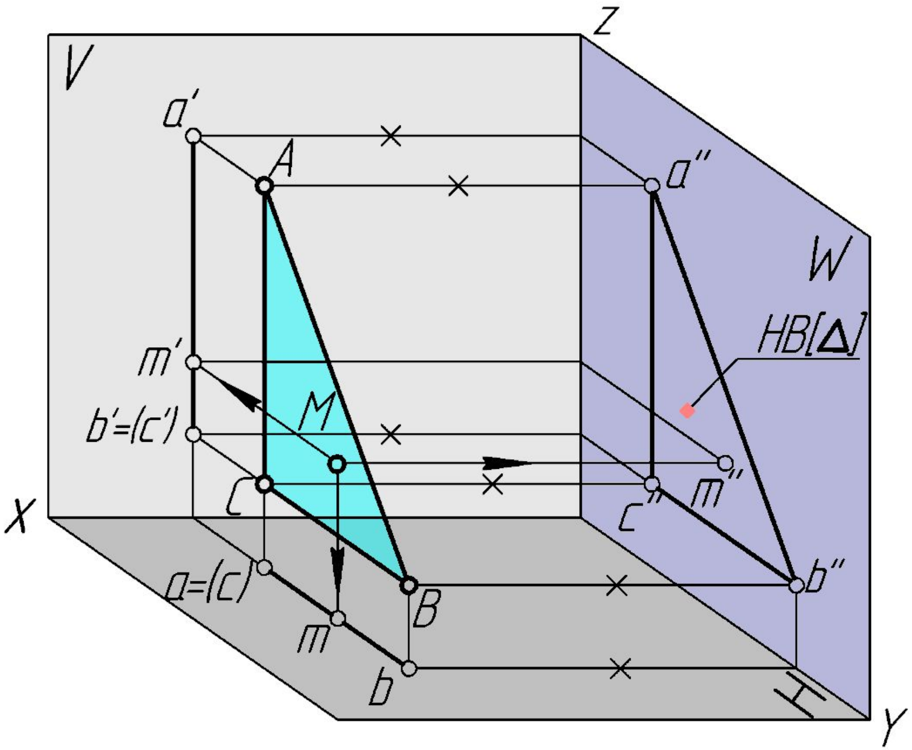
$P(\Delta\ ABC);\quad P \perp H(W) \leftrightarrow P \,||\, V \rightarrow\ Y{=}const$

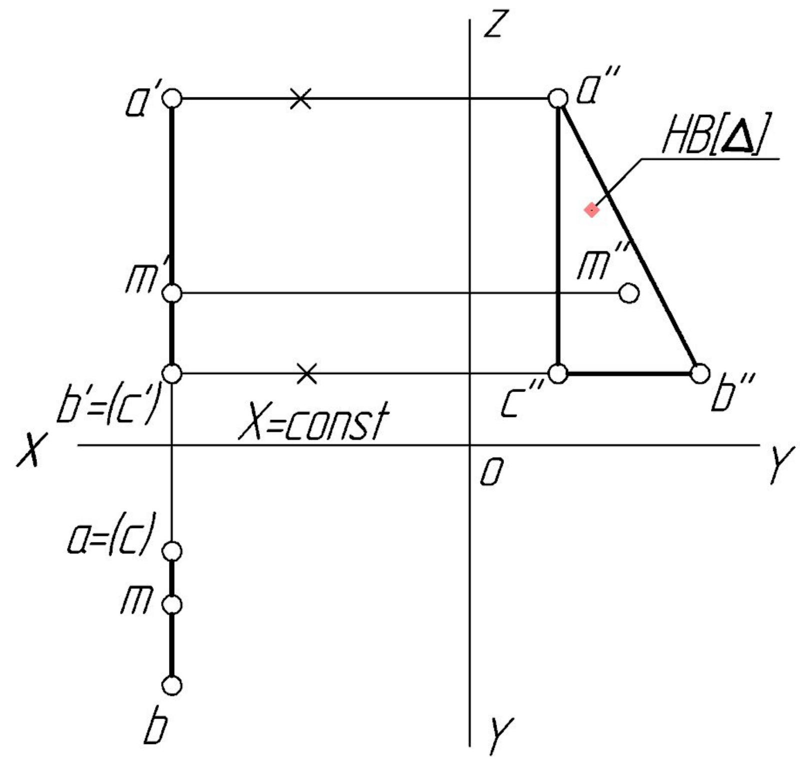
$P_h \,||\, 0X$ и $P_W \,||\, 0Z;\ \Delta a'b'c' \cong \Delta ABC$ $\quad M \in \Delta \quad m \in P_h;\ m'' \in P_W$

$\rightarrow$

Плоскости перпендикулярна двум плоскости проекций –плоскости уровня

б). *Профильная плоскость* – плоскость параллельная плоскости W





$$P(\Delta ABC); \quad P \perp H(V) \leftrightarrow P \,||\, W \rightarrow X{=}const$$

$P_h \,||\, 0Y$ и $P_V \,||\, 0Z$; $a''b''c'' \cong \Delta ABC$ $\qquad M \in \Delta \rightarrow \qquad m \in P_h; m' \in P_V$

ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ. ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ

Пересечение прямой линии с проецирующей плоскостью

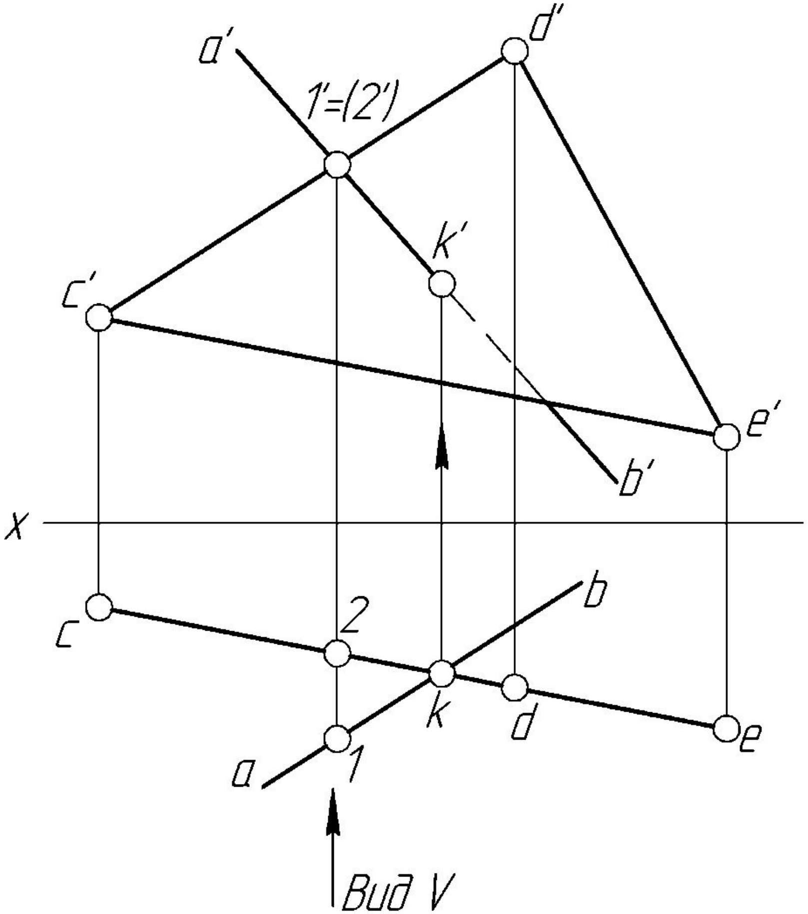
Точка пересечения прямой с плоскостью - точка общая для прямой и для плоскости. Проецирующая плоскость проецируется на ПП в виде прямой линии. На этой прямой должна находиться соответствующая проекция точки, в которой прямая пересекается с проецирующей плоскостью.

Пример. Построить проекции точки пересечения
ния прямой AB с плоскостью треугольника ABC, соблюдая условия видимости.

$P(\Delta ABC) \perp H, \quad K = AB \cap P$

т.к. $P \perp H \rightarrow k = ab \cap cde$

$k \rightarrow k' \in a'b'$

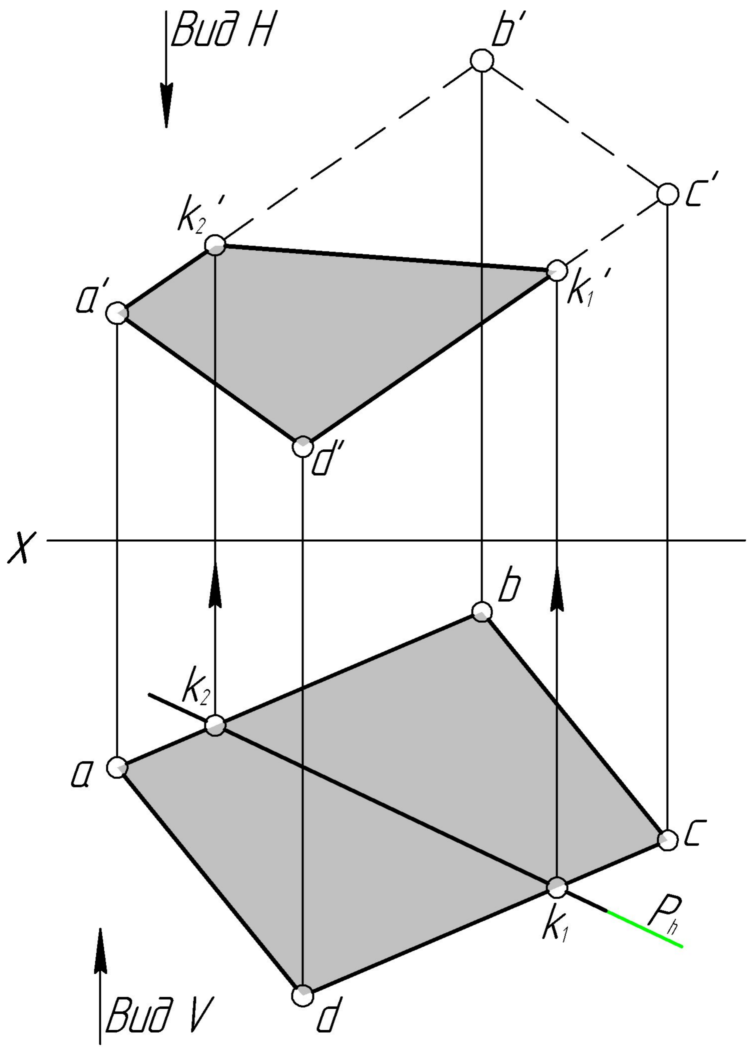


Видимость на плоскости V:
для определения видимости на фронтальной ПП воспользуемся методом конкурирующих точек на скрещивающихся прямых:
Определим видимость конкурирующих точек 1 и 2, принадлежащих соответственно прямым AB и CD.
Т. 1 принадлежит прямой AB, $Y_1 > Y_2$ и на фронтальной ПП до т. K прямая AB видима.

Пересечение двух плоскостей, одна из которых проецирующая

Две плоскости пересекаются по прямой, определяемой двумя точками, общими для пересекающихся плоскостей.

Если одна из плоскостей проецирующая, то согласно основному свойству проецирующей плоскости, одна из проекций должна совпадать с проецирующим



Дано: Параллелограмм $(ABCD)$ - общего положения

Плоскость $P \perp H$ – частного положения

$$P \cap ABCD = K_1 K_2 \text{- ?}$$

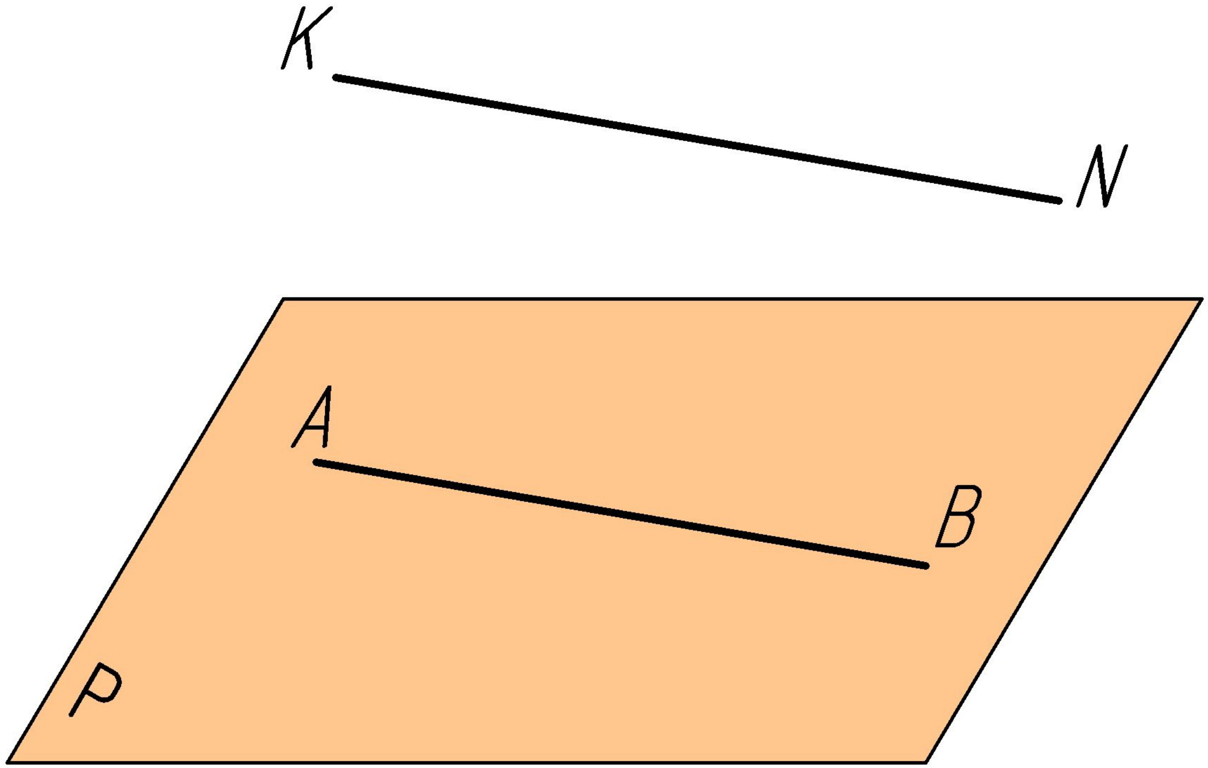
k_1, k_2– определено по свойству проецирующей плоскости

$k_1'k_2'$ – определено по принадлежности точек сторонам параллелограмма

Видимость плоскости параллелограмма на плоскостях проекций определено по свойству проецирующей плоскости P

Параллельность прямой и плоскости

Признак: Прямая параллельна плоскости, если она параллельна прямой данной плоскости

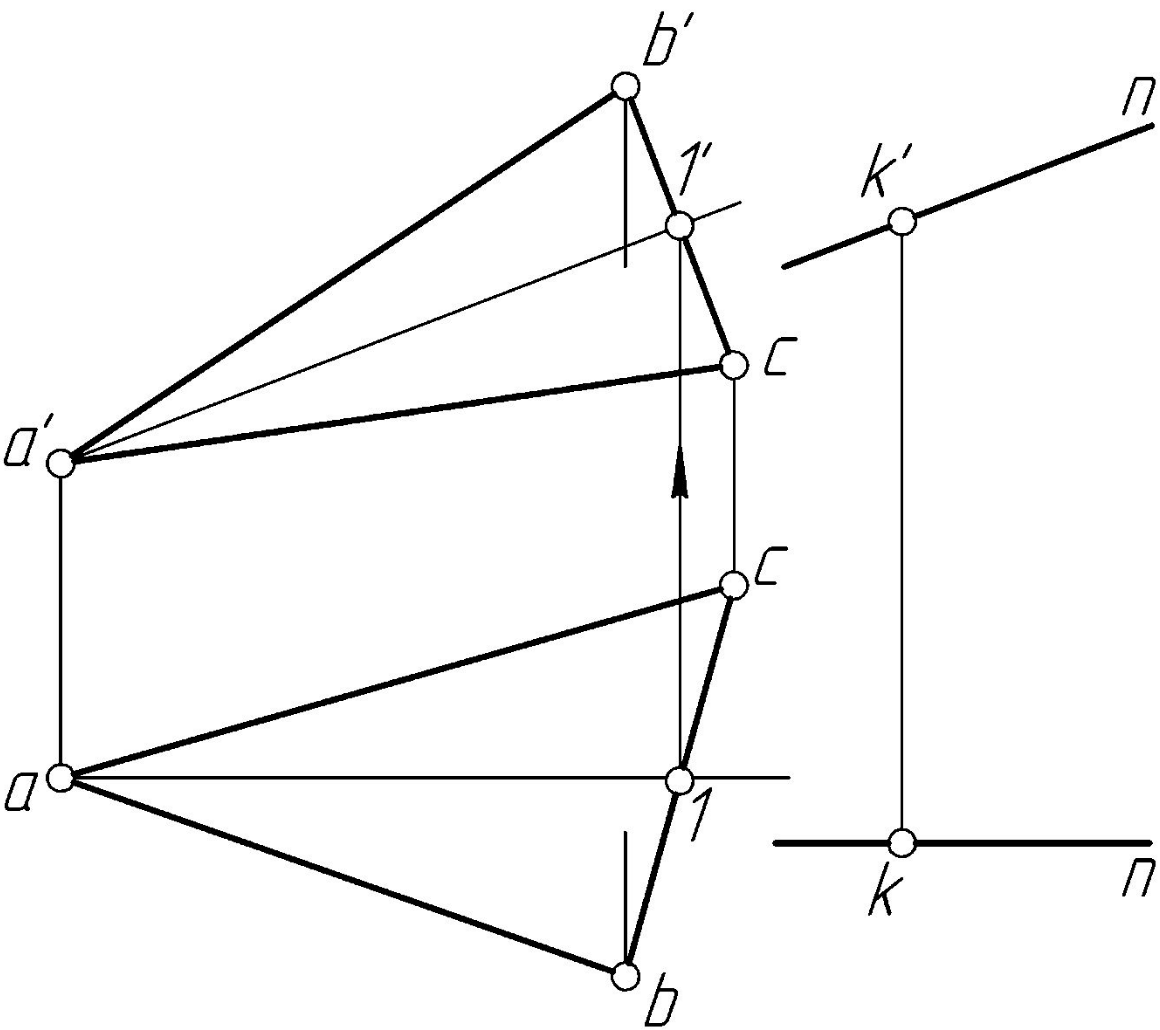


$$KN \parallel P \rightarrow \quad KN \parallel AB \text{ и } AB \subset P$$

Параллельность прямой и плоскости

Признак: Прямая параллельна плоскости, если она параллельна прямой данной плоскости

Пример: Через точку K провести прямую параллельную плоскости треугольника ABC и плоскости проекций V



1). $KN \,||\, V \to kn \,||\, X$

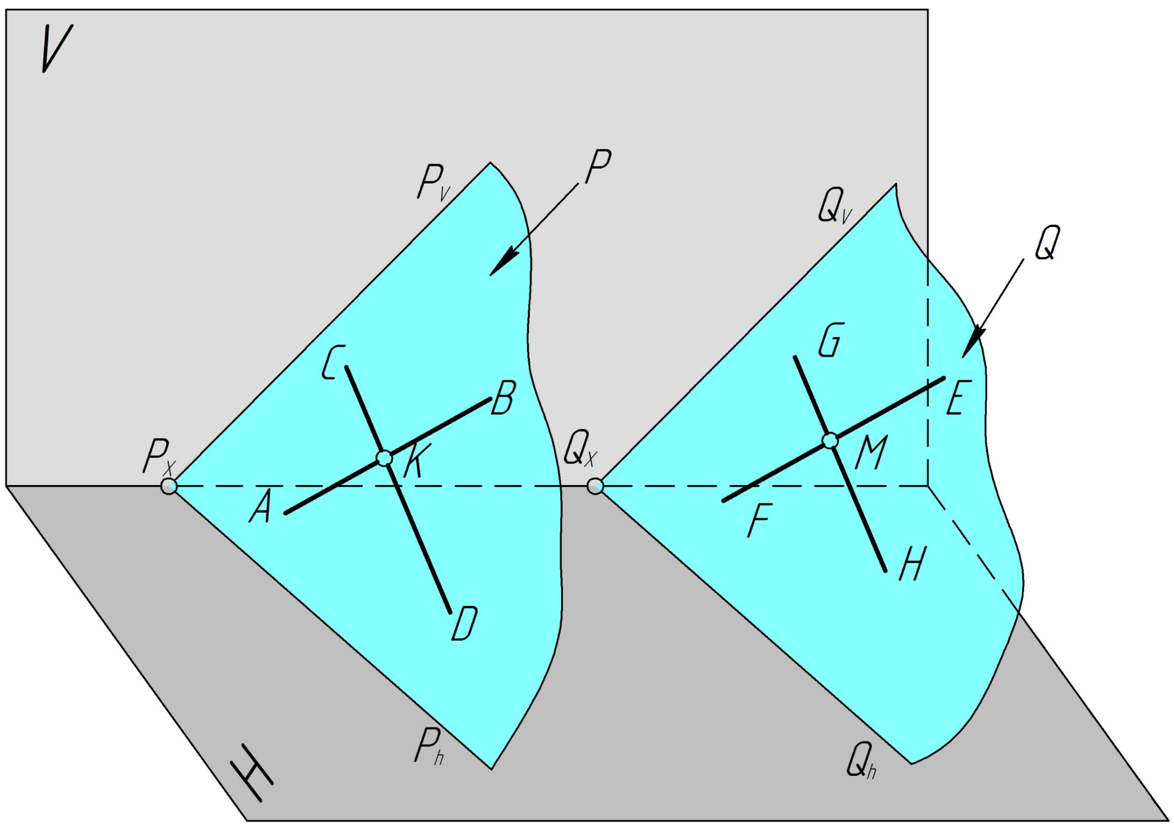
2). $KN \,||\, \Delta ABC \to kn \,||\, a1$

$k'n' \,||\, a'1'$

Параллельность двух плоскостей

Признак: Две плоскости взаимно-параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

$$P \,||\, Q \rightarrow \begin{array}{l} AB \,||\, EF \\ CD \,||\, GH \end{array}$$



$$P(AB \cap CD) \,||\, Q(EF \cap GH)$$

Пример: Через т. K провести плоскость Q параллельную плоскости ΔABC

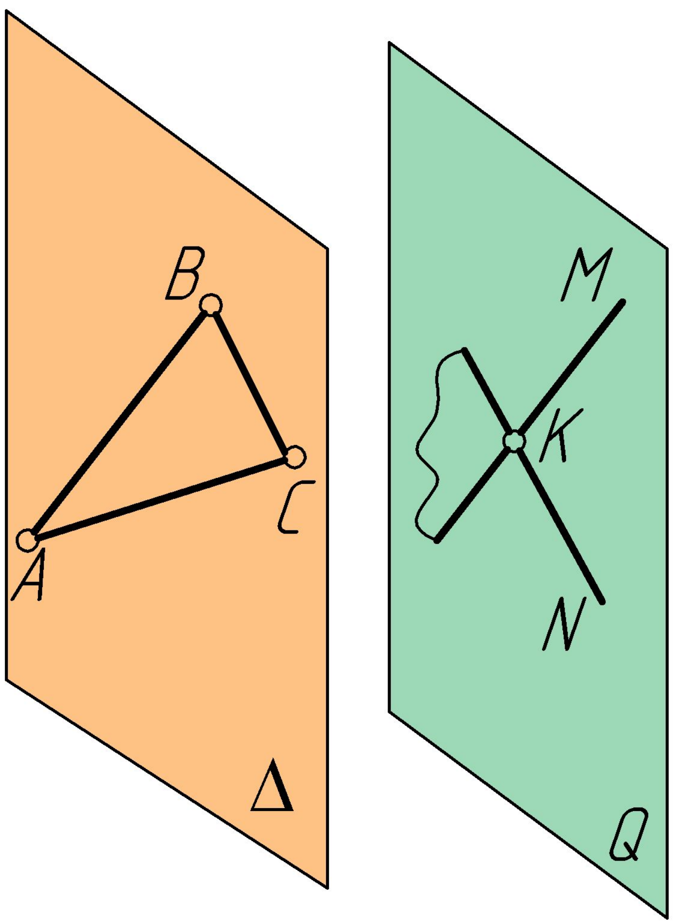
Дано: ΔABC; $K \in Q$

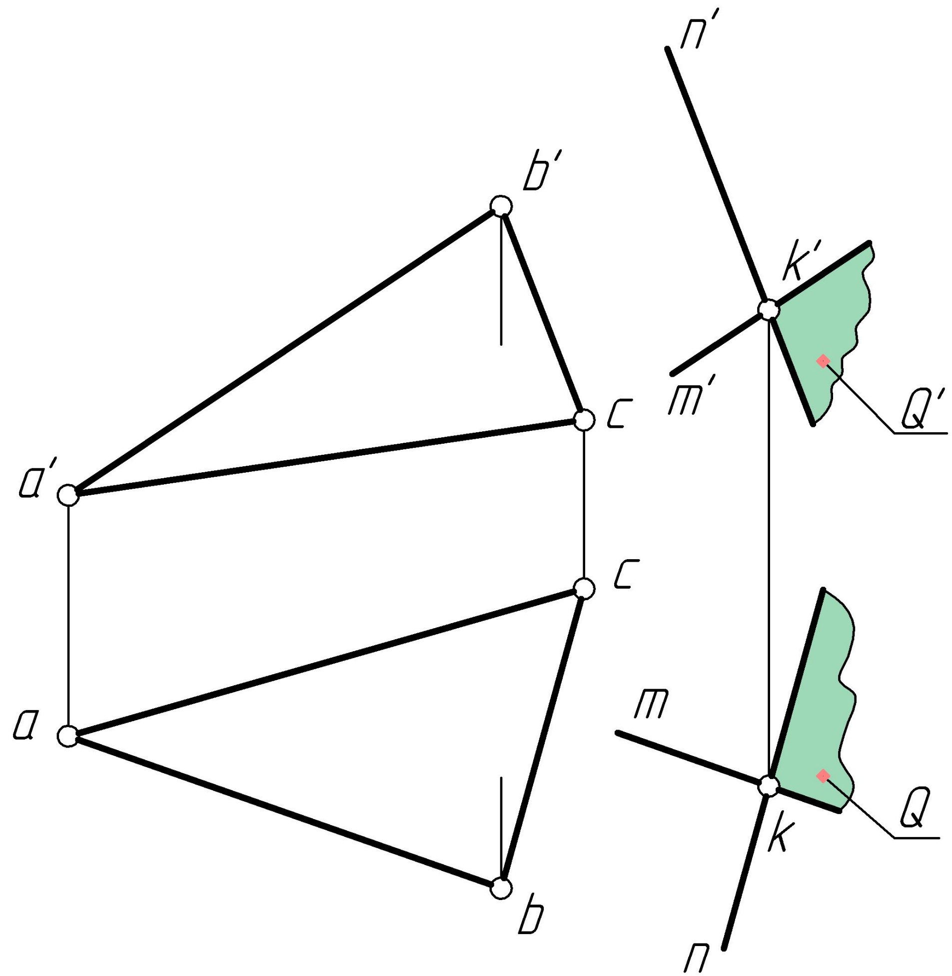
Построить: $Q(KM \cap KN)$ - ?

$Q\ (KM \cap KN) \rightarrow\ KM \,||\, AB;\ KN \,||\, BC$:

$km \,||\, ab$ и $k'm' \,||\, a'b'$

$kn \,||\, bc$ и $k'n' \,||\, b'c'$

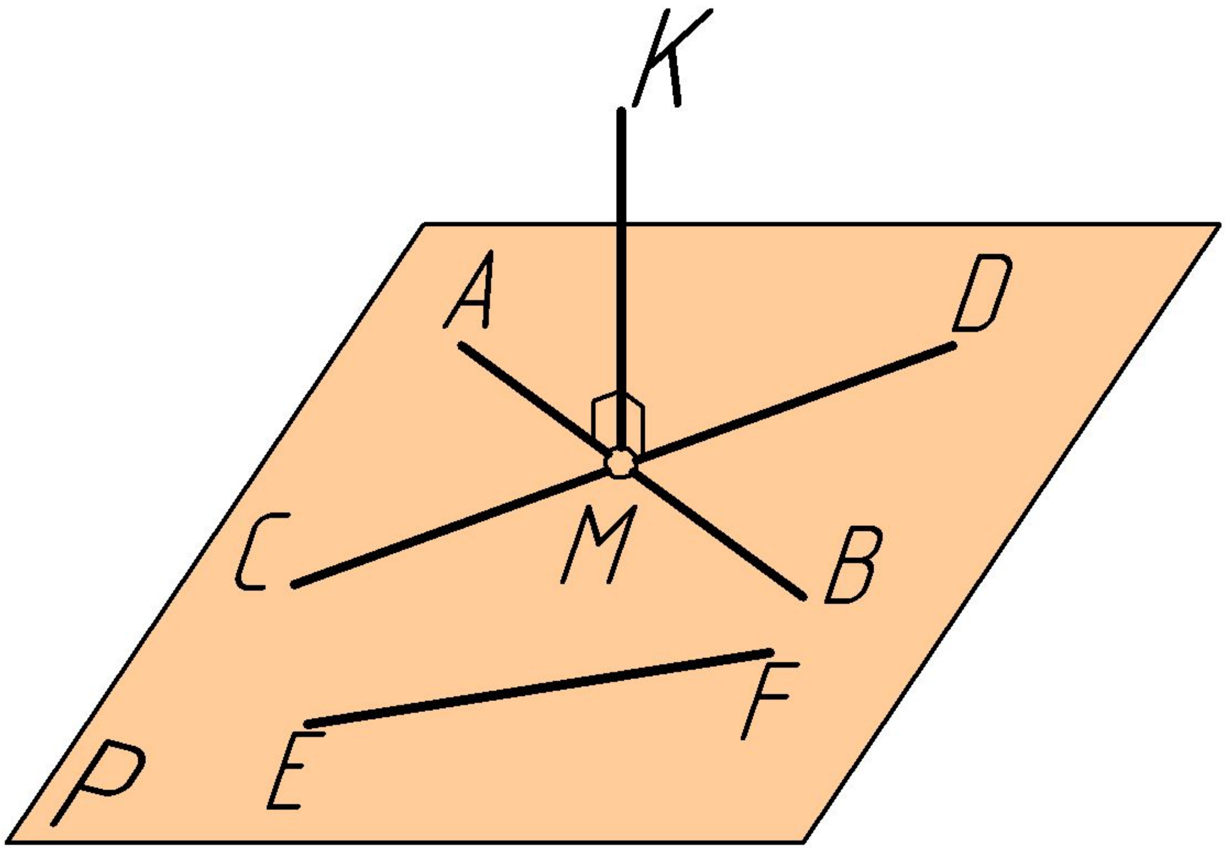




Перпендикулярность прямой и плоскости

Признак: Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым данной плоскости.

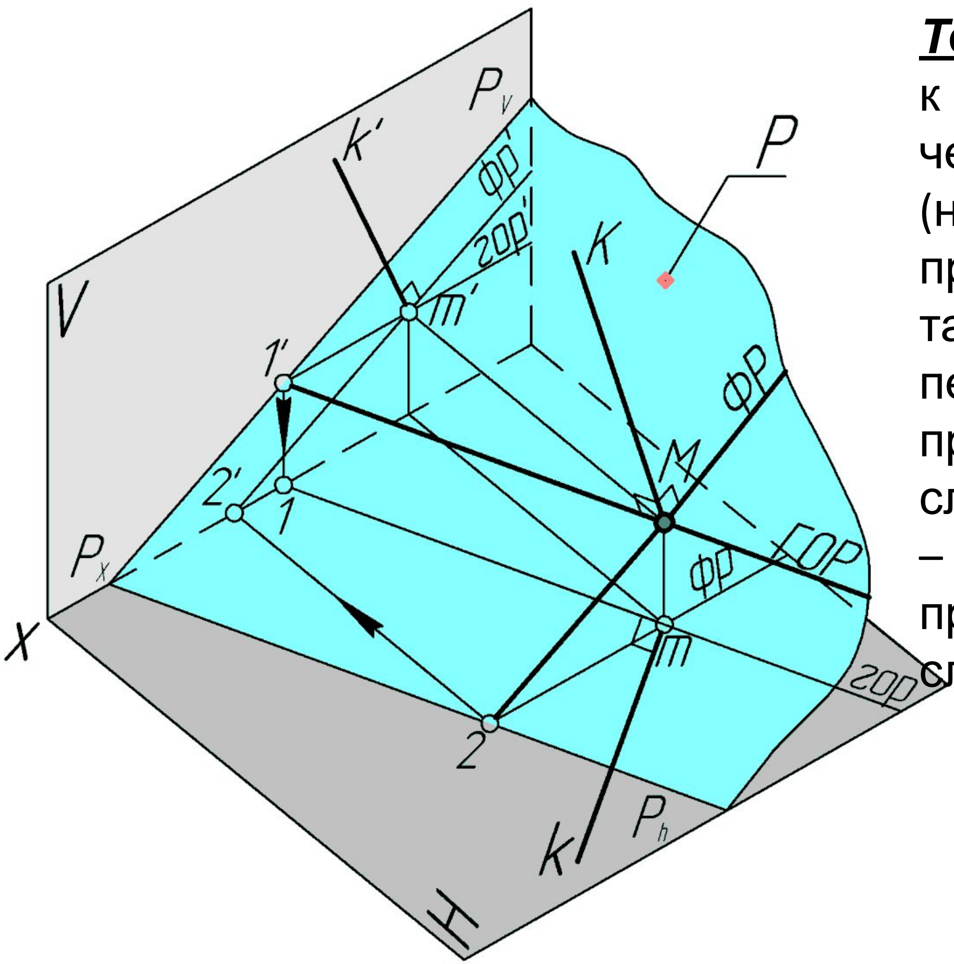
Следствие: Если прямая перпендикулярна к плоскости, то она перпендикулярна к любой прямой лежащей в данной плоскости.



$(KM] \perp P \leftrightarrow (KM] \perp (AB)$ и $(KM] \perp (CD)$ $\quad (KM] \perp (EF)$

Перпендикулярность прямой и плоскости

Признак: Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым данной плоскости.

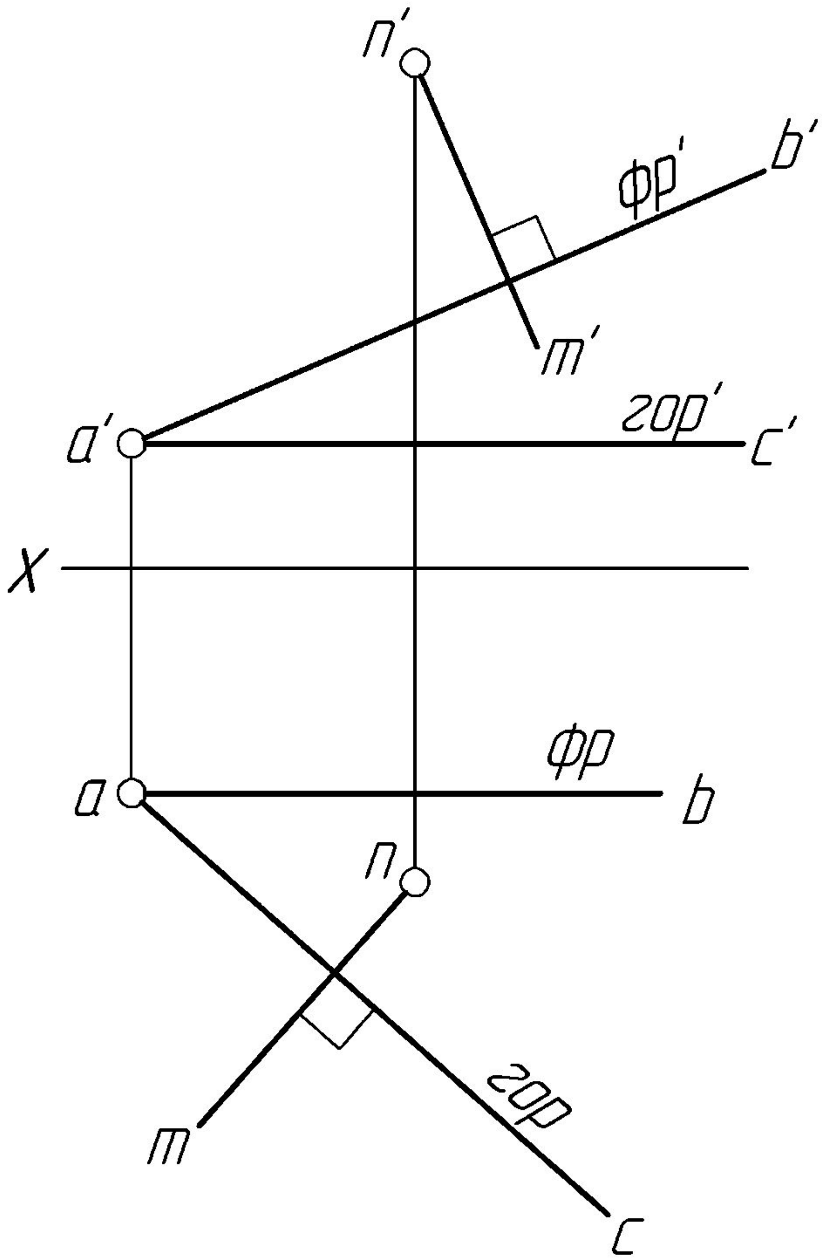


Теорема: Если прямая перпендикулярна к плоскости в пространстве, то на чертеже (на основании теоремы о частном случае проецирования прямого угла) горизонтальная проекция данной прямой будет перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали (горизонтальному следу), а фронтальная проекция прямой – перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали (фронтальному следу).

$$(KM] \perp P \rightarrow \; km \perp гор$$
$$k'm' \perp фр'$$

Пример 1: Из т. N опустить перпендикуляр NM на плоскость $P(AB \cap$

A



$a'c' \,||\, X \rightarrow AC$ - ГОР

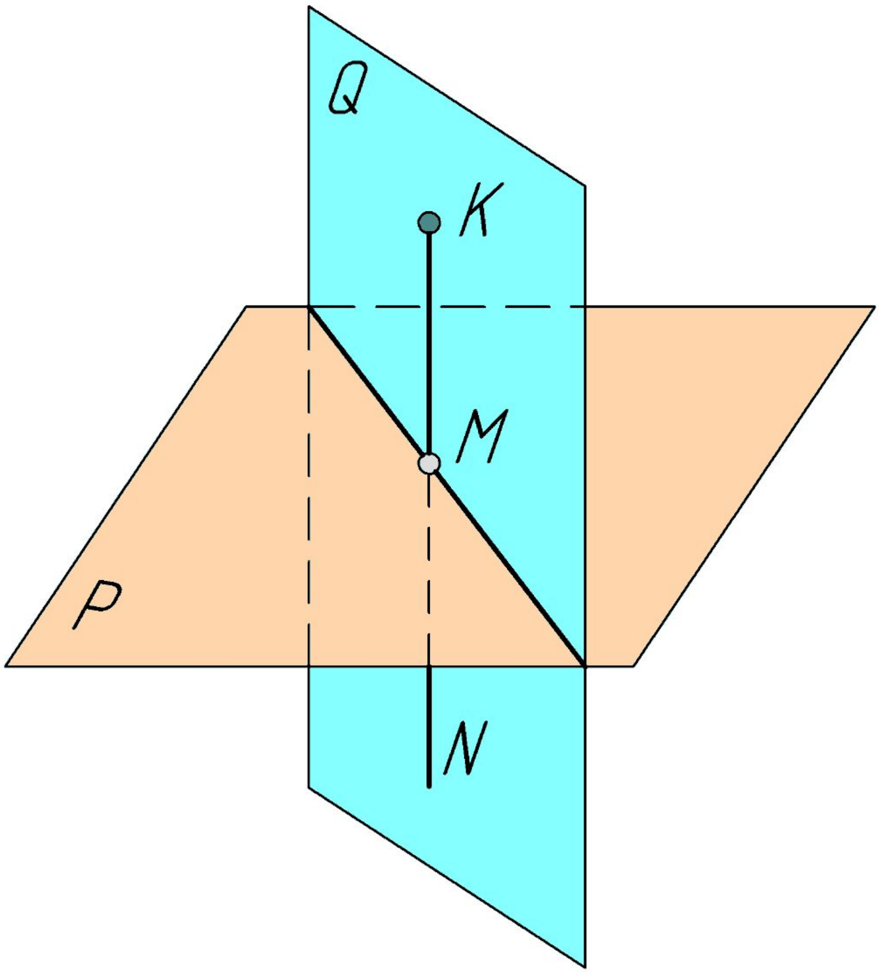
$a'b' \,||\, X \rightarrow AB$ - ФР

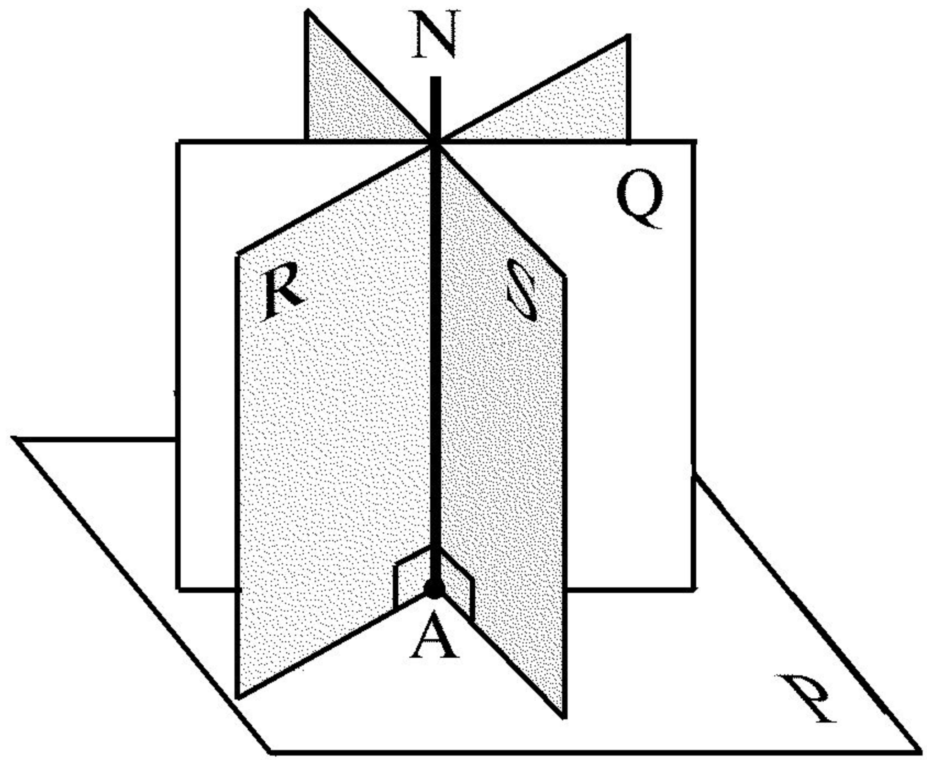
$NM \perp P \rightarrow nm \perp$ *гор*

$n'm' \perp$ *фр'*

Перпендикулярность двух плоскостей

Признак: Две плоскости взаимно-перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости.





$[KN) \perp P$ и $Q \subset (KN) \rightarrow Q \perp P$

$(NA) \subset Q(R,S)$ и $(NA) \perp P \rightarrow Q(R,S) \perp P$

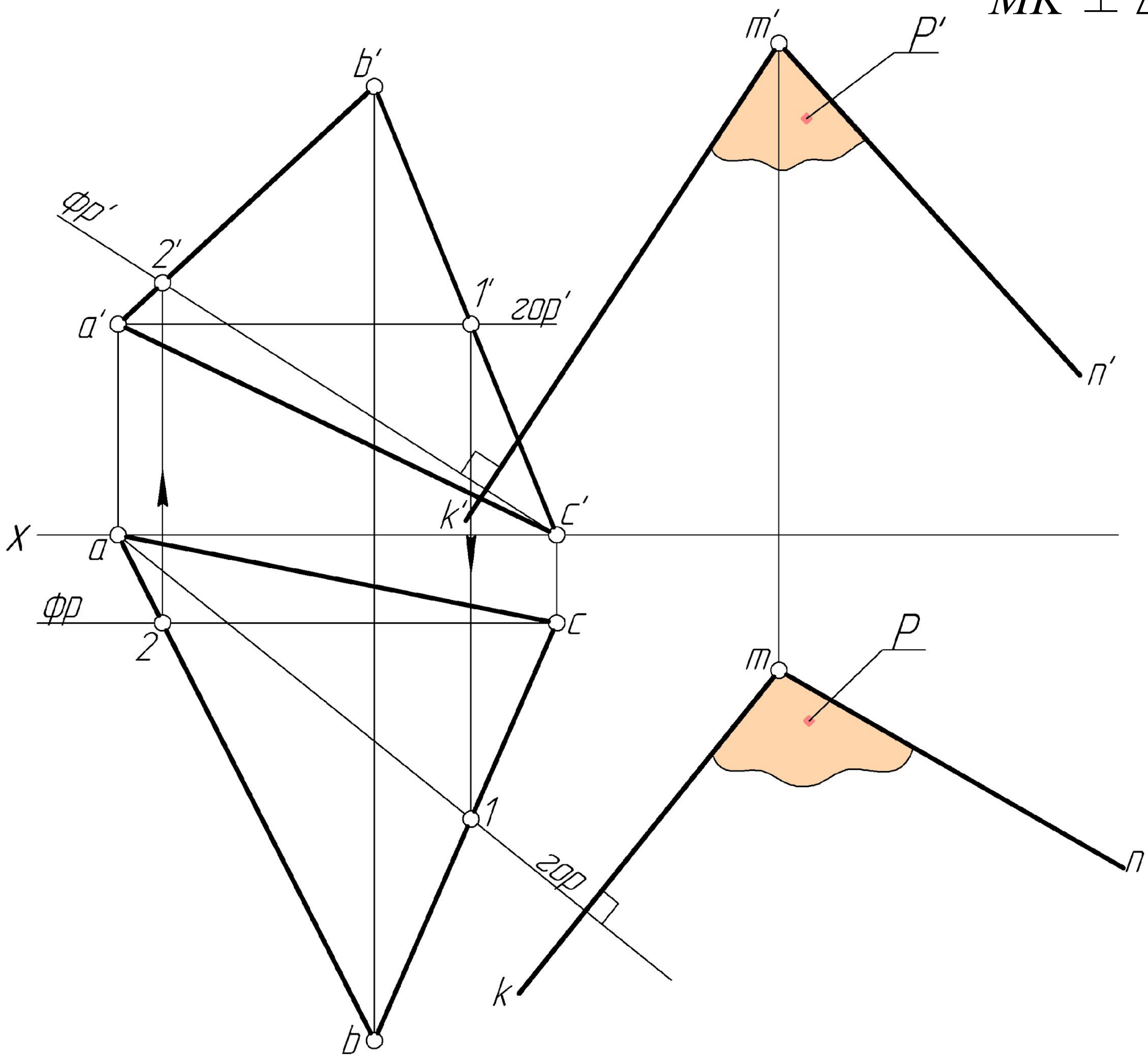
Пример: Через прямую MN провести плоскость P перпендикулярную к плоскости треугольника ABC

$P(MN \cap MK) \perp \Delta ABC$ - ? $\rightarrow$

$MK \perp \Delta ABC \rightarrow$

$mk \perp гор_{\Delta}$

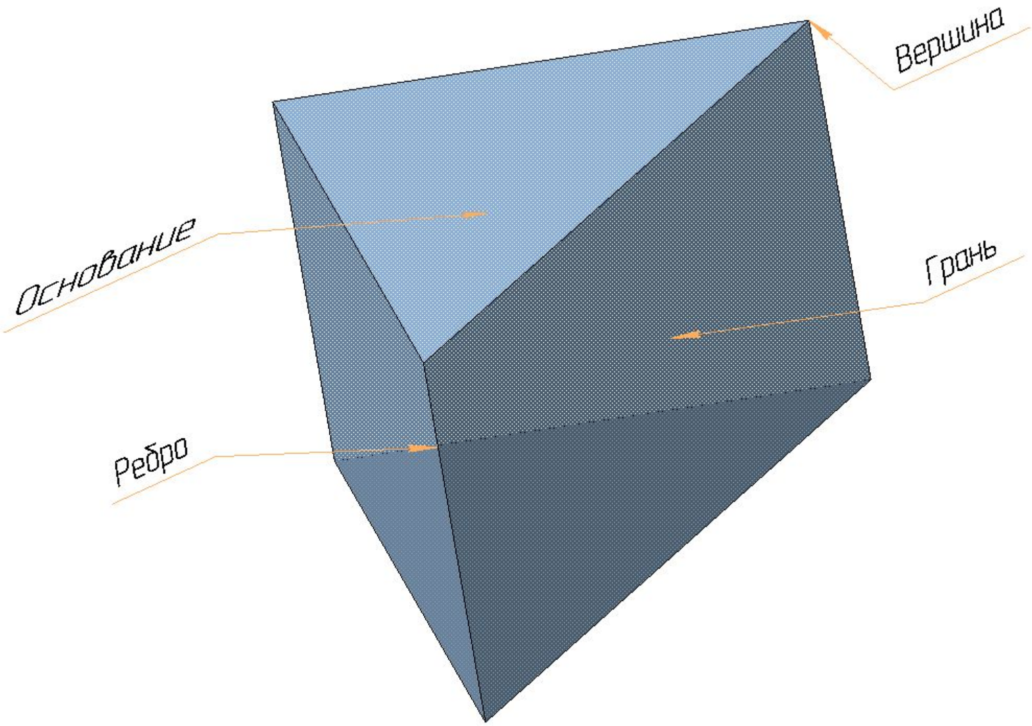
$m'k' \perp фр'_{\Delta}$



МНОГОГРАННИКИ

***Определение*:** Многогранником называется тело, поверхность которого есть объединение конечного числа многоугольников.

Призма – многогранник, две грани которого *n*- угольники, лежащие в параллельных плоскостях, остальные *n*- граней – параллелограммы.

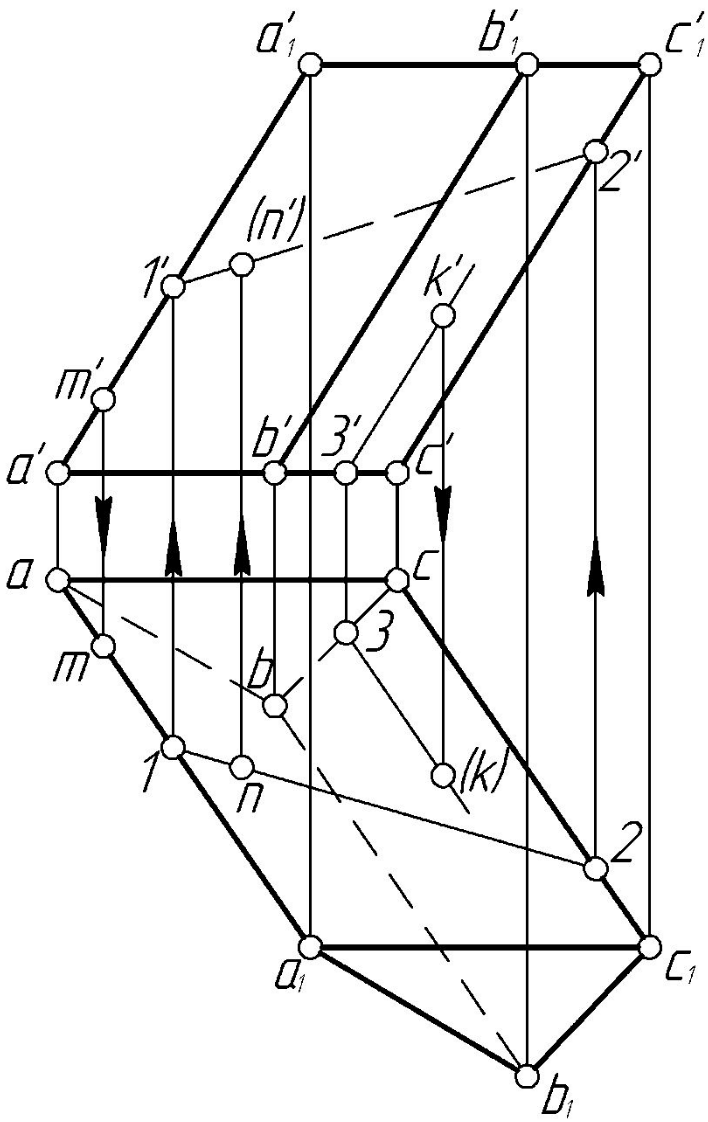


Ребра - прямые, по которым пересекаются смежные грани; Вершина - точка, в которых пересекаются ребра.

Призма прямая – ребра перпендикулярны основанию.
Призма наклонная – ребра не перпендикулярны основанию.

Для построения призмы на чертеже необходимо и достаточно иметь проекции ее вершин. Соединяя соответствующие проекции вершин отрезками прямых, получим проекции ребер и граней.

__Призма__

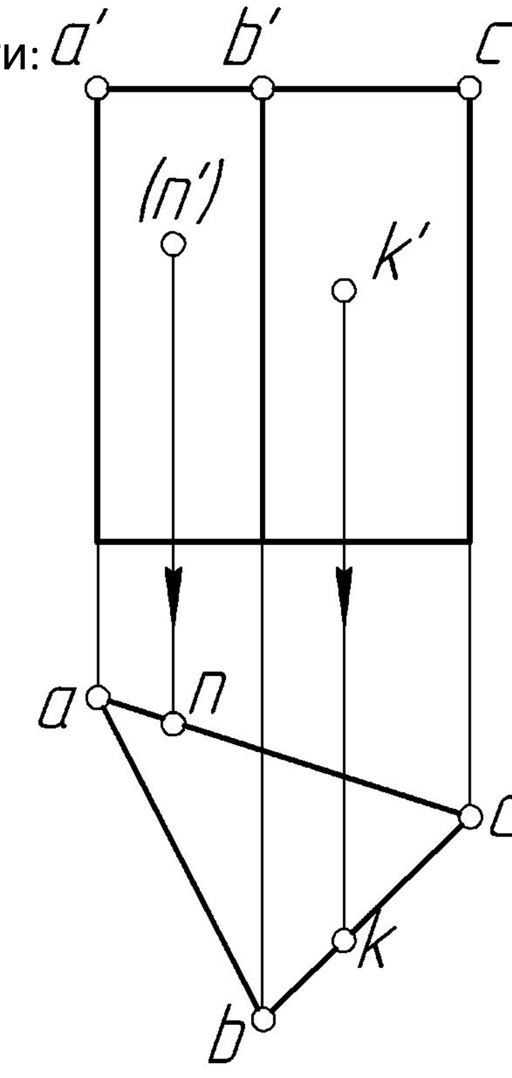


Недостающие проекции точек-
по признаку принадлежности линиям данной поверхности:

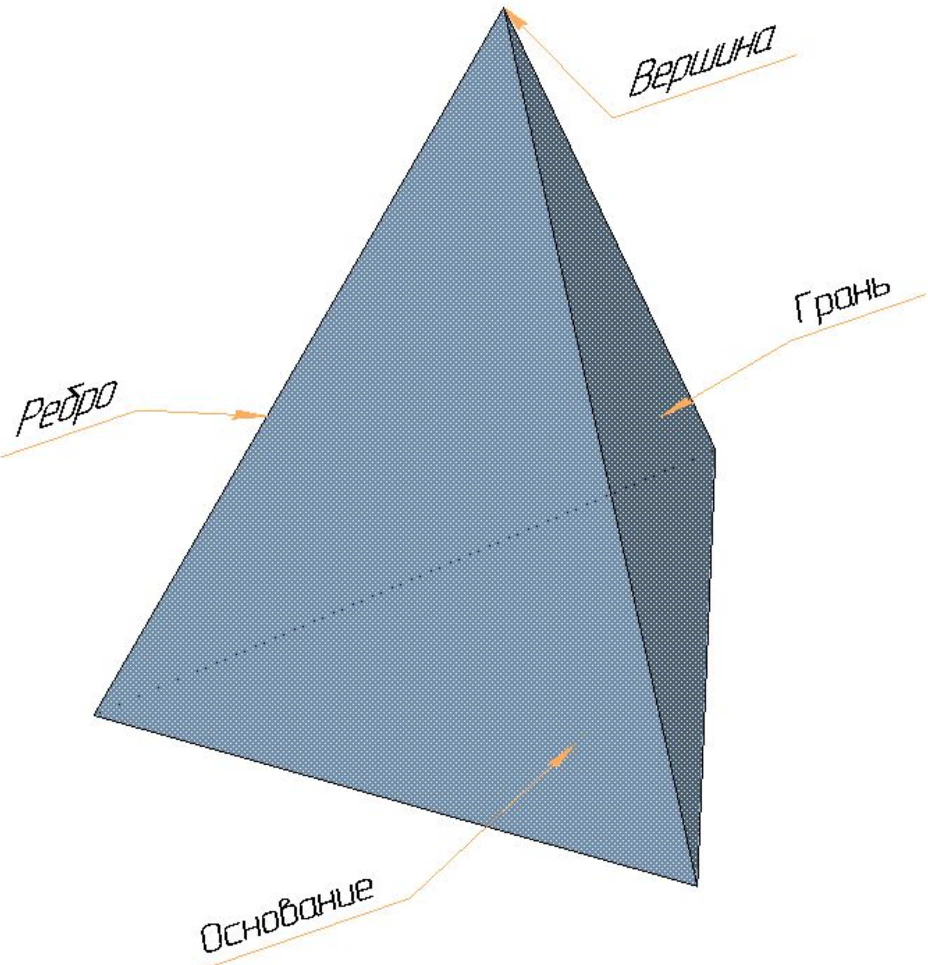
$M \in AA_1$
$N \in AA_1C_1C \rightarrow$
$N \in 12 \subset AA_1C_1C$
$K \in BB_1C_1C \rightarrow$
$K \in 3 \subset BB_1C_1C$

$N \in$ грани AC
$K \in$ грани BC

__Призма прямая__



Пирамида – многогранник, одна из граней которого (основание) есть произвольный многоугольник, остальные n- граней – треугольники, имеющие общую вершину.



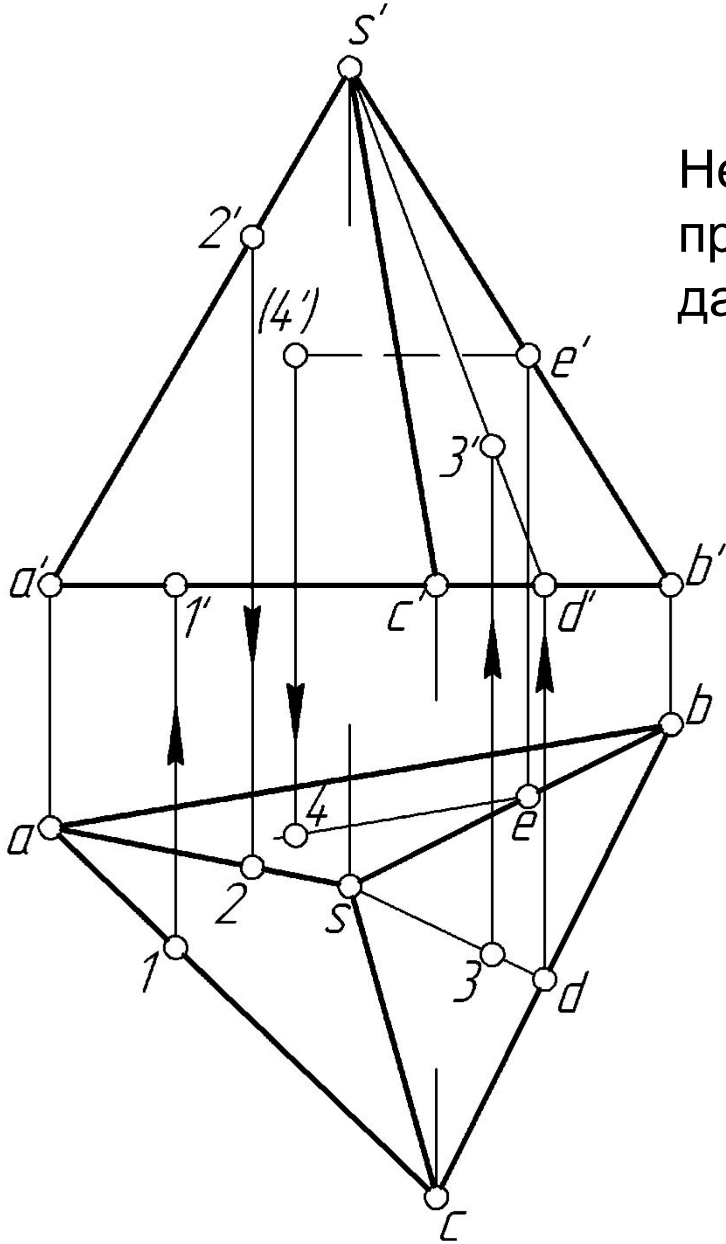
Правильная пирамида – в основании лежит правильный многоугольник, и высота пирамиды проходит через центр этого многоугольника.

Усеченная пирамида – плоскость отсекает вершину и пересекает все боковые грани.

Правильные многогранники
***(тела Платона)*:**

- *Тетраэдр* – правильный четырехгранник (четыре равносторонних треугольника)
- *Гексаэдр* - правильный шестигранник (куб)
- *Октаэдр* - правильный восьмигранник (восемь равносторонних треугольника)
- *Додекаэдр* - правильный двенадцатигранник (двенадцать правильных пятиугольников)
- *Икосаэдр* - правильный двадцатигранник (двадцать равносторонних треугольников)

Пирамида – многогранник, одна из граней которого (основание) есть произвольный многоугольник, остальные n- граней – треугольники, имен



Недостающие проекции точек-по признаку принадлежности линиям данной поверх-ности:

$1 \in AC$

$2 \in SA$

$3 \in SCB \rightarrow 3 \in SD \subset SCB$

$4 \in SAB \rightarrow 4 \in E \subset SAB$

Пересечение многогранника проецирующей плоскостью. Натуральный вид фигуры сечения.

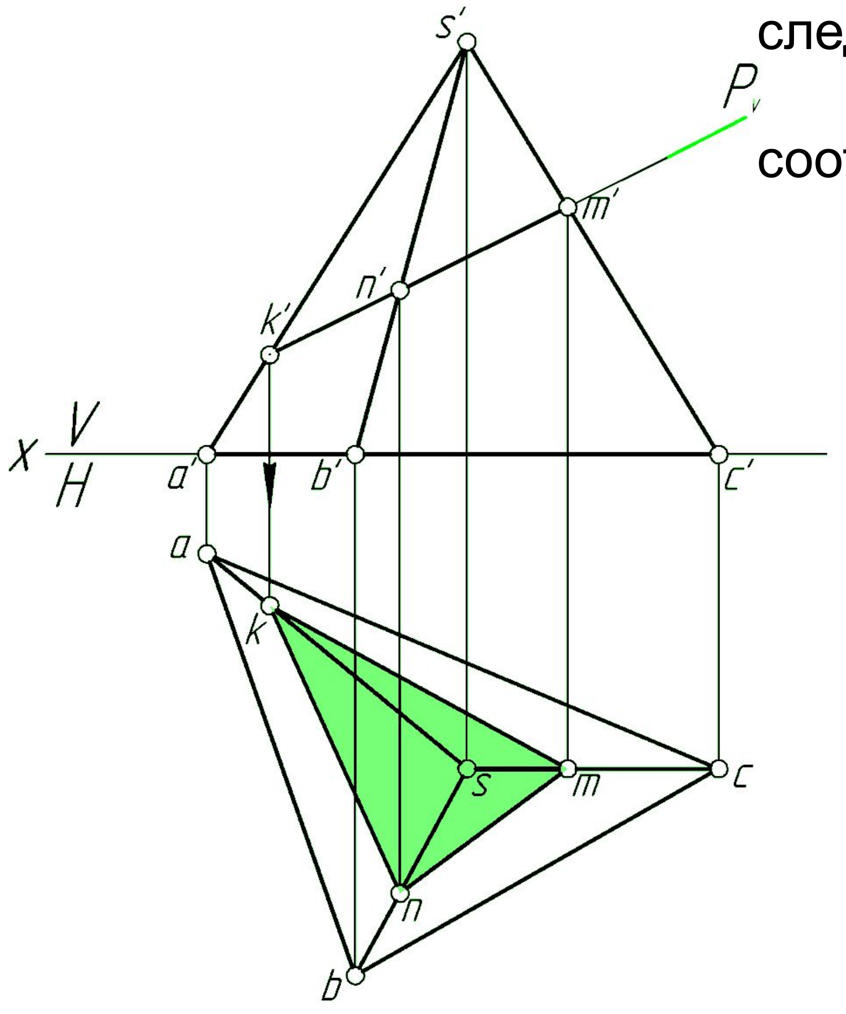
Сечение многогранника – геометрическая фигура в результате пересечения многогранника плоскостью.
В общем случае плоскость пересекает многогранник по плоской фигуре - многоугольнику, вид которого зависит от числа граней, пересекаемых плоскостью.

Два способа построения сечения многогранника плоскостью:

1). *Способ ребер* – по точкам пересечения ребер многогранника с плоскостью (построение сводится к задаче на пересечение прямой с плоскостью).

2). *Способ граней* – по отрезкам прямых пересечения граней многогранника с плоскостью (построение сводится к задаче на пересечение плоскостей).

Пример



$P \cap Пир = KMN$ - ?

Пересечение плоскости P с ребрами пирамиды (способ ребер):

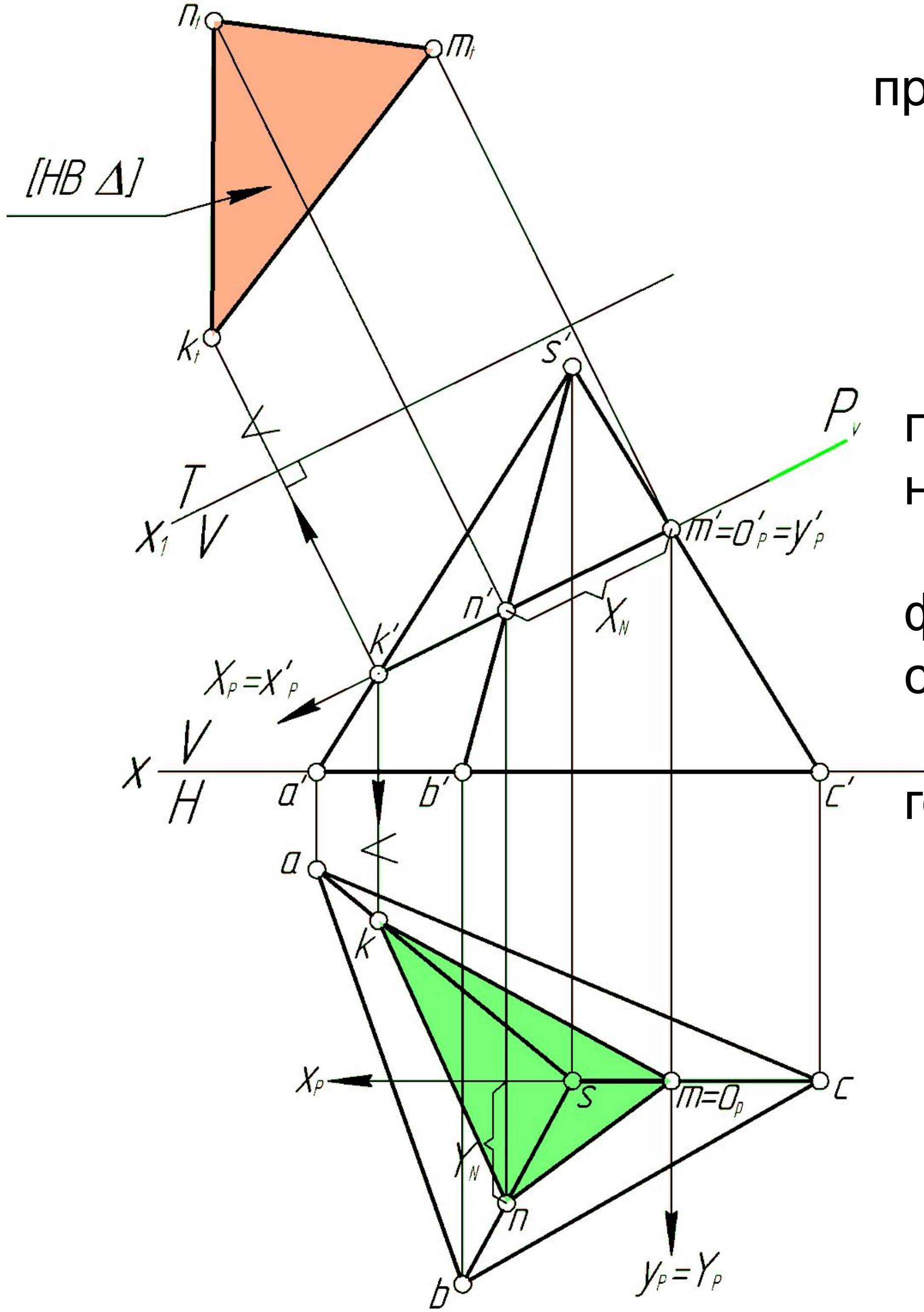
$K=SA \cap P$; $N=SB \cap P$; $M=SC \cap P$

$k'm'n'$ - по свойству проецирующей плоскости (совпадает с проецирующим следом плоскости P_v)

kmn - по принадлежности точек соответствующим ребрам пирамиды:

$K \in SA$ и т.д.

Пример



Натуральный вид фигуры сечения:

1 способ – перемена плоскостей проекций:

$$HV \rightarrow VT: \ 1).\ V \perp T$$
$$2).\ T \parallel P\ (X_1 \parallel P_V)$$

2 способ – координатный метод:

В плоскости P определяем систему прямоугольных координат X_P, Y_P и к ней относим фигуру сечения KMN.

Действительные координаты точек фигуры сечения по координате $X_P \rightarrow$ с фронтальной проекции: $x'_P = X_P$,

а по координате Y_P – с горизонтальной проекции: $y_P = Y_P$.