§3.6. Основные законы распределения случайных величин

§3.6.1.Законы распределения дискретных случайных величин

§3.6.1.1.Биномиальное распределение

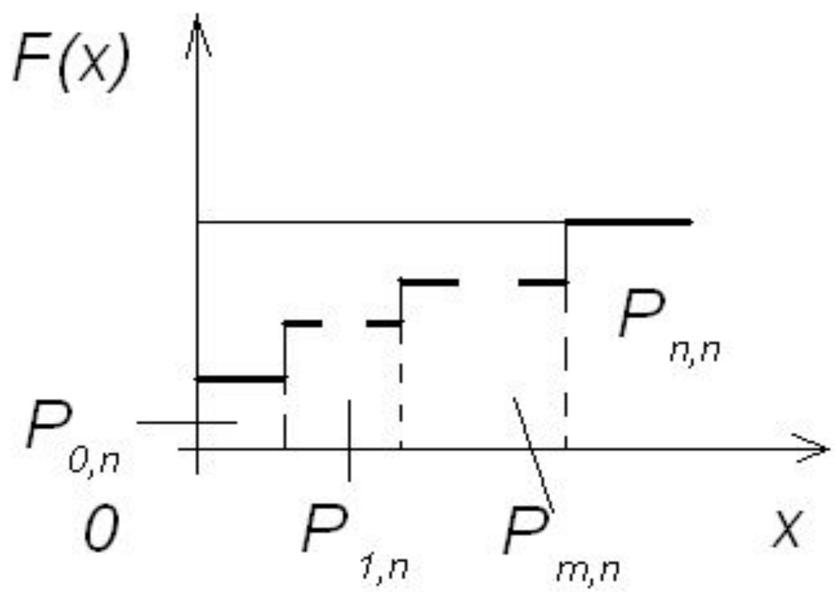
Дискретная СВ X, принимающая неотрицательные целочисленные значения, - 0,1,2,…, n называется распределенной по *биномиальному* закону, если она принимает указанное значение m с вероятностью

$$P_{m,n}=P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$$

По схеме Бернулли СВ X есть число появлений события A ровно m раз в серии n опытов.

Вероятность появления события А равна р, а непоявления q=(1-p).

ФР F(x) биномиального закона распределения (БЗР) СВ Х имеет вид



Для вычисления числовых характеристик этого распределения нам потребуется два вспомогательных равенства:

$$\sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m} = np$$

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m} = npq + n^2 p^2$$

Определим числовые характеристики БЗР. Принимая во внимание первое вспомогательное равенство определим МО:

$$M[X]=m_x=\sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m} = np$$

С учетом второго вспомогательного равенства определим дисперсию:

$D[X]=\alpha_2[X] - m_x =$

$$= \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m} - n^2 p^2 = npq + n^2 p^2 - n^2 p^2 = npq$$

Величины n, p называются параметрами распределения.

Пример: Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

Решение: X - число отказавших элементов в одном опыте; $x_1 = 0$ (ни один из элементов не отказал); $x_2 = 1$ (отказал один элемент); $x_3 = 2$ (отказали два элемента); $x_4 = 3$ (отказали три элемента); $n = 3$; $p = 0,1$, следовательно, $q = 1 - 0,1 = 0,9$

$P_{3,0} = q^3 = 0,9^3 = 0,729;$

$P_{3,1} = C^1{}_3\ p\ q^2 = 3\ 0,1\ 0,9^2 = 0,243;$

$P_{3,2} = C^2{}_3\ p^2\ q = 3\ 0,1^2\ 0,9 = 0,027;$

$P_{3,3} = p^3 = 0,1^3 = 0,001.$

<u>Контроль:</u> 0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1.

Искомый биномиальный закон распределения X:

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

§3.6.1.2. Распределение Пуассона

Теорема Пуассона. Если $p \to 0$ при $n \to \infty$, а $np=\lambda$, $\lambda=const$, то СВ может принимать целые неотрицательные значения с вероятностями

$$P_{m,n} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

Для доказательства теоремы воспользуемся формулой Бернулли. Т.к. np=λ, p=λ/n и p→0 при n→∞, то

$$P_{m,n} = P(X = m) = \lim_{n \to \infty} C_n^m p^m q^{n-m} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n-m)!\,m!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

Использовались соотношения:

$$\frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = exp(-\lambda)$$

Т.о., дискретная СВ, принимающая целые неотрицательные значения 0, 1, 2,…, m с вероятностью

$$P_{m,n} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

называется *распределенной по закону Пуассона*.

Ряд распределения этой СВ имеет вид:

X	0	1	2	… m
P	$\frac{\lambda^0}{0!}\exp(-\lambda)$	$\frac{\lambda^1}{1!}\exp(-\lambda)$	$\frac{\lambda^2}{2!}exp(-\lambda)$	$\frac{\lambda^m}{m!}exp(-\lambda)$

Используя соотношение,

$$exp(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!}$$

получим, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(X=m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \exp(-\lambda) = \exp(\lambda)\exp(-\lambda)$$

Числовые характеристики этого закона:

M[X]= $\sum_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{\lambda^m}{m!} \exp(-\lambda) = \lambda \exp(-\lambda)\exp(\lambda) = \lambda$

и покажем, что дисперсия распределения Пуассона тоже равна λ.

Принимая во внимание, что $D[X]=\alpha_2[X] - (M[X])^2$, вычислим сначала второй начальный момент:

$$\alpha_2[X]= \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{\lambda^m}{m!} exp(-\lambda) = \lambda \sum_{m-1=0}^{\infty} m \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} exp(-\lambda) =$$

$$= \lambda(\lambda + 1)$$

Т.о., $D[X]=\alpha_2[X]-(M[X])^2=\lambda(\lambda+1)-\lambda^2=\lambda$.

Величина λ называется параметром распределения.

Вид распределения Пуассона изменяется при различных значениях параметра распределения λ. При малых значениях λ наблюдается асимметрия закона распределения. С ростом λ имеется тенденция к симметрии.

Пример: Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

Решение: n=100000, p=0,0001, m=5.

$$P_{m,n} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

Определим λ: λ=np=100000 · 0,0001=10

Искомая вероятность

$P_{100000}(5)=10^5e^{-10}/5!=0,0378$

§3.6.2.Основные законы распределения непрерывных случайных величин

§3.6.2.1. Равномерное распределение

Непрерывная СВ называется равномерно распределенной на интервале [a, b], если плотность ее распределения имеет постоянное значение С.

$$p(x)=\begin{cases} 0, x < a, \\ C, a \le x \le b, \\ 0, x > b. \end{cases}$$

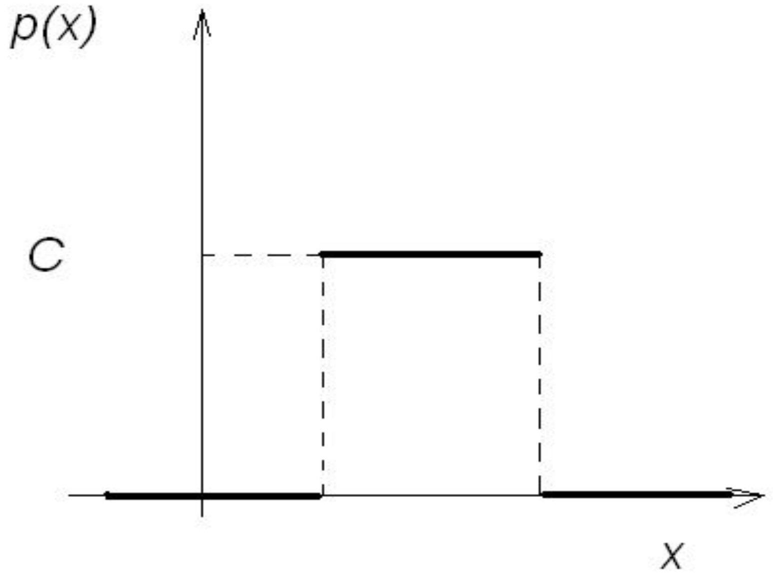
Определим C=const из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

Т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{b} Cdx + \int_{b}^{\infty} 0dx = Cx\Big|_{a}^{b} = 1$$

Отсюда C=1/(b-a).

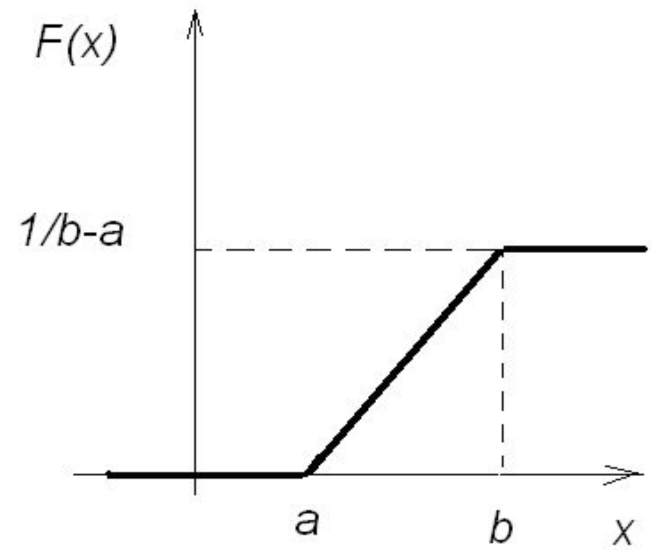


Определим функцию распределения F(x) по формуле

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dx + \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dy = \frac{x-a}{b-a}$$

Отсюда следует:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \le x \le b, \\ 1, x > b. \end{cases}$$



Определим числовые характеристики распределения M[X], D[X]:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Bigg|_{a}^{b} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

Отсюда следует, что МО совпадает с медианой. Определим дисперсию по формуле

$$D[X]=\alpha_2[X]-(M[X])^2$$

$$\alpha_2[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}dx = \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{3(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)(b^2+ba+a^2)}{3(b-a)} = \frac{(b^2+ba+a^2)}{3}$$

Тогда

$$D[X] = \frac{(b^2+ba+a^2)}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{4b^2+4ba+4a^2-3b^2-6ba-3a^2}{12} =$$

$$= \frac{b^2-2ba+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Стандартное отклонение определяется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{D[X]} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Равномерное распределение используется в технических приложениях, когда информация о характеристиках распределения мала.

Пример: Цена деления шкалы амперметра равна 0,1А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02А.

Решение: Ошибка округления отсчета можно рассматривать как случайную величину X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями. Плотность равномерного распределения $f(x)=1/(b-a)$, где $(b-a)$ – длина интервала, в котором заключены возможные значения X; вне этого интервала $f(x)=0$.

В рассматриваемой задаче длина интервала, в котором заключены все возможные значения X, равна 0,1, т.е. (b-a)=0,1, поэтому f(x)=1/0,1=10.

Из условия задачи ясно, что ошибка отсчета превысит 0,02, если она будет заключена в интервале (0,02; 0,08). По формуле

P(a<X<b)= $\int_a^b f(x)dx$ получим

P(0,02<X<0,08)= $\int_{0,02}^{0,08} 10dx$ =0,6