Методы решения систем нелинейных уравнений

Лекция

Постановка задачи

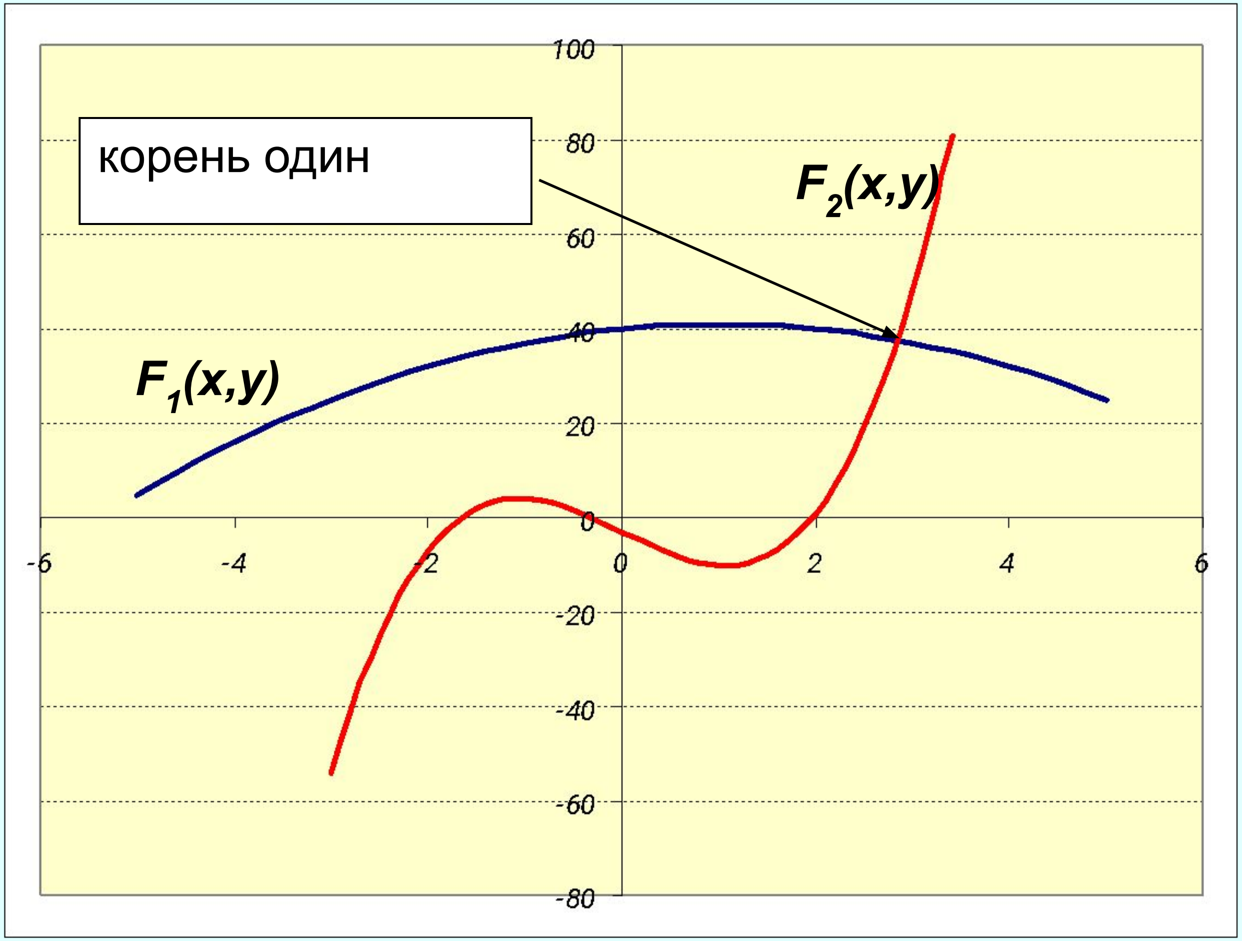
Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

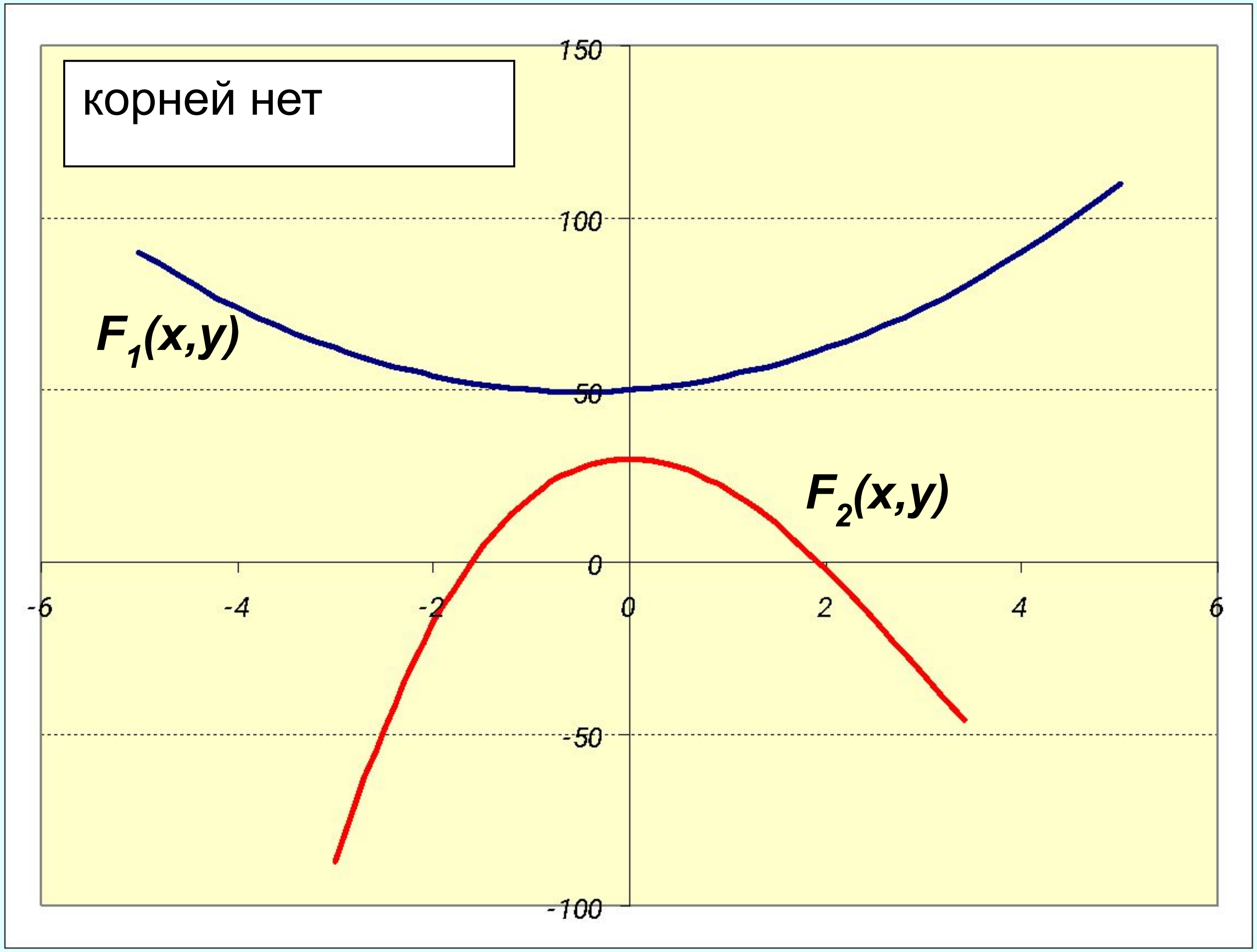
Этапы решения

1. Исследовать существование и единственность решения
2. Выбрать начальное приближение к корню
3. Вычислить отдельные корни с заданной точностью (реализация возможна в различных программных продуктах)

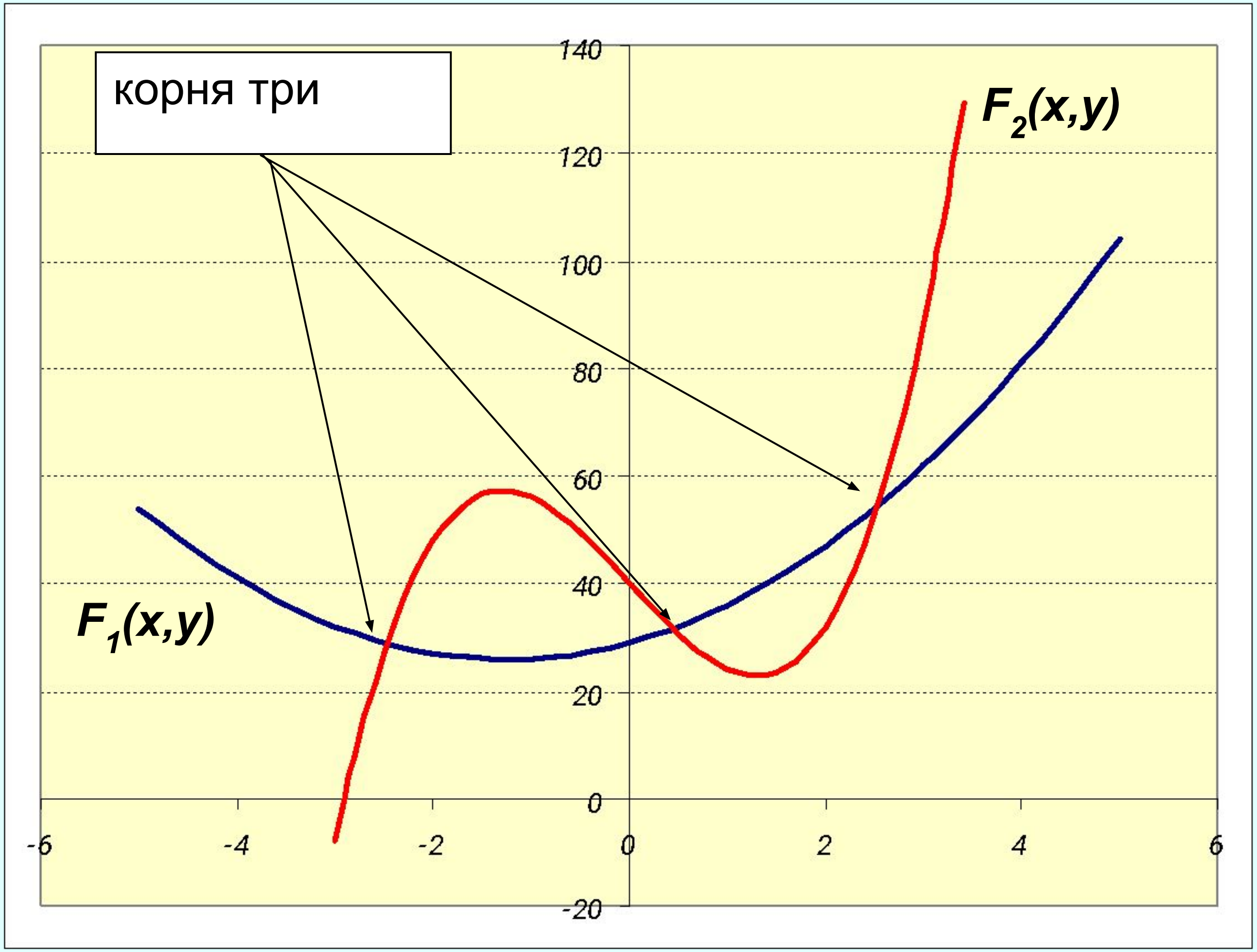
Существование и единственность решения.



Существование и единственность решения.



Существование и единственность решения.



Этап 3

- предполагается, что система нелинейных уравнений имеет вещественное решение на заданном интервале
- Определено начальное приближение к корню x_0, y_0
- Дальнейшее уточнение корня производится итерационными методами

Методы решения систем нелинейных уравнений

Для применения известных численных методов исходная система может быть приведена к виду:

$$x=\varphi 1(x,y);$$

$$y=\varphi 2(x,y);$$

Метод Якоби (простых итераций)

Алгоритм поиска решения задается формулами

$$x_{n+1}= φ1(x_n,y_n);$$
$$y_{n+1}= φ2(x_n,y_n).$$

Метод Гаусса - Зейделя

Алгоритм поиска решения задается формулами

$$x_{n+1} = \varphi 1(x_n, y_n);$$
$$y_{n+1} = \varphi 2(x_{n+1}, y_n).$$

Процесс вычисления заканчивается, когда

$$|x_n - x_{n+1}| \le \varepsilon \ \ и \ \ |y_n - y_{n+1}| \le \varepsilon$$

Методы решения систем нелинейных уравнений

Общий вид системы нелинейных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&F_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\
&F_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&F_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0
\end{aligned}
$$

Метод Якоби

$$x_1^{m+1} = f_1(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_n^m)$$
$$x_2^{m+1} = f_2(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_n^m)$$
$$x_3^{m+1} = f_3(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_n^m)$$

....

$$x_n^{m+1} = f_n(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_n^m)$$

Метод Гаусса - Зейделя

$$x_1^{m+1} = f_1(x_1^m,\ x_2^m,\ x_3^m,\ \ldots,\ x_n^m)$$
$$x_2^{m+1} = f_2(x_1^{m+1},\ x_2^m,\ x_3^m,\ \ldots,\ x_n^m)$$
$$x_3^{m+1} = f_3(x_1^{m+1},\ x_2^{m+1},\ x_3^m,\ \ldots,\ x_n^m)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n^{m+1} = f_n(x_1^{m+1},\ x_2^{m+1},\ x_3^{m+1},\ \ldots,\ x_n^m)$$

Пример 1

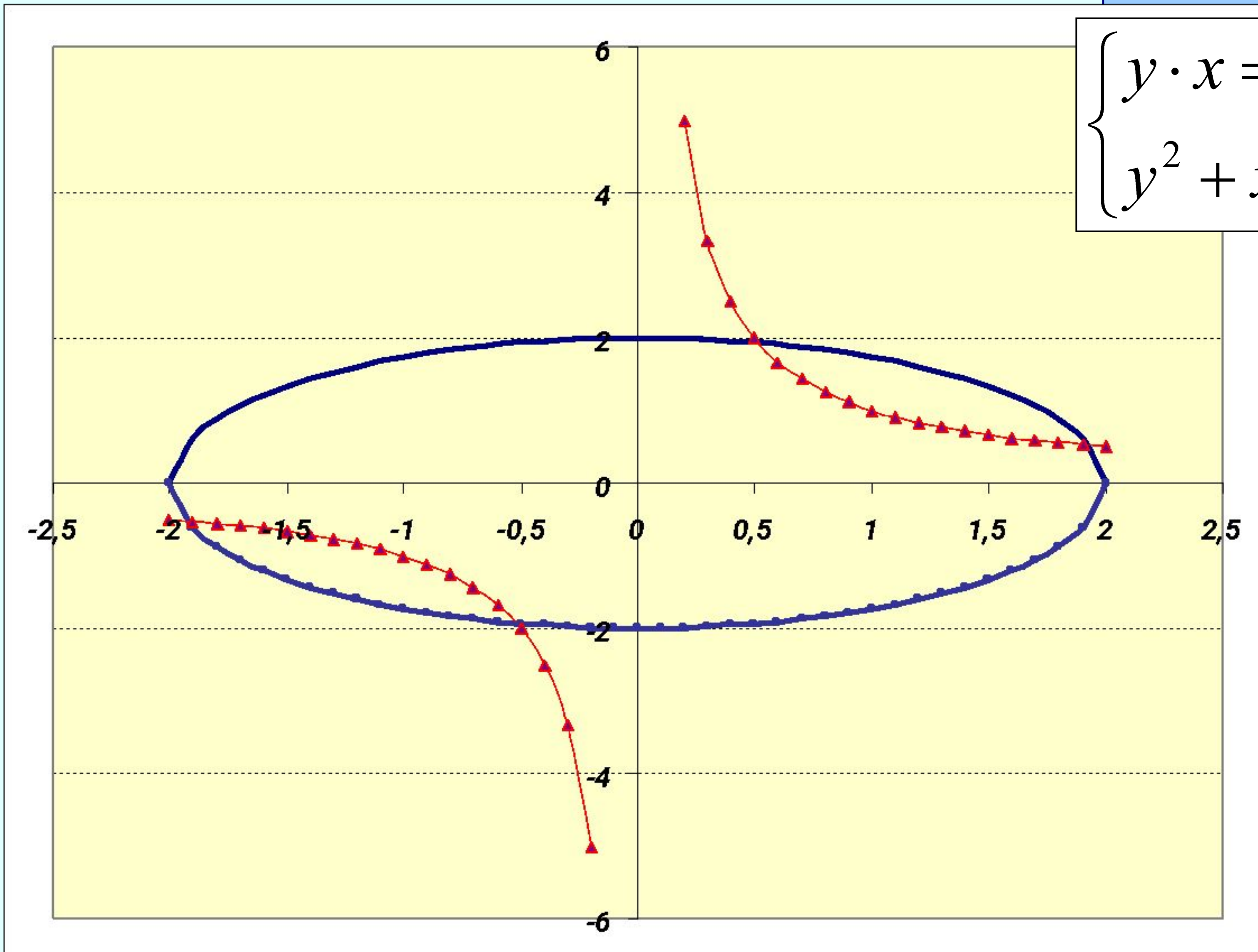
- Дана система

$$\begin{cases} y \cdot x = 1 \\ y^2 + x^2 = 4 \end{cases}$$

Построим графики этих уравнений

Пример 1

$$\begin{cases} y \cdot x = 1 \\ y^2 + x^2 = 4 \end{cases}$$



Пример 1

Приведем систему к виду

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{1}{y_{k-1}} = \varphi_1(x_{k-1}, y_{k-1}) \\ y_k = \sqrt{4 - x_{k-1}^{\;2}} = \varphi_2(x_{k-1}, y_{k-1}) \end{cases}$$

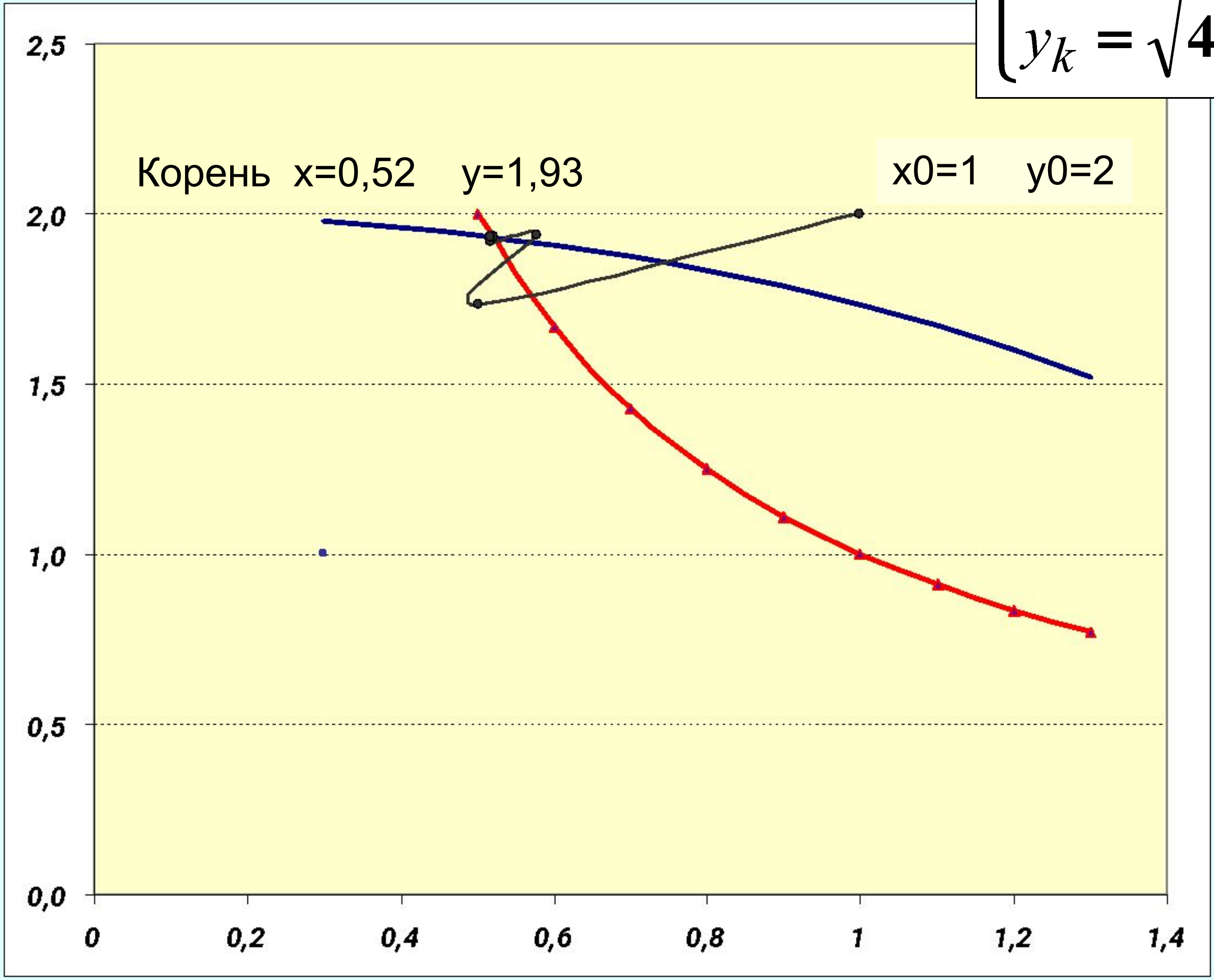
Пример 1

Результаты расчетов:

k -итерация	x_k	y_k	Уравнение 1	Уравнение 2
0	1,00000	2,00000	2,00000	5,00000
1	0,50000	1,73205	0,86603	3,25000
2	0,57735	1,93649	1,11803	4,08333
3	0,51640	1,91485	0,98883	3,93333
4	0,52223	1,93218	1,00905	4,00606
5	0,51755	1,93061	0,99919	3,99513
6	0,51797	1,93188	1,00065	4,00044
7	0,51763	1,93176	0,99994	3,99965
8	0,51766	1,93185	1,00005	4,00003
9	0,51764	1,93185	1,00000	3,99997
10	0,51764	1,93185	1,00000	4,00000

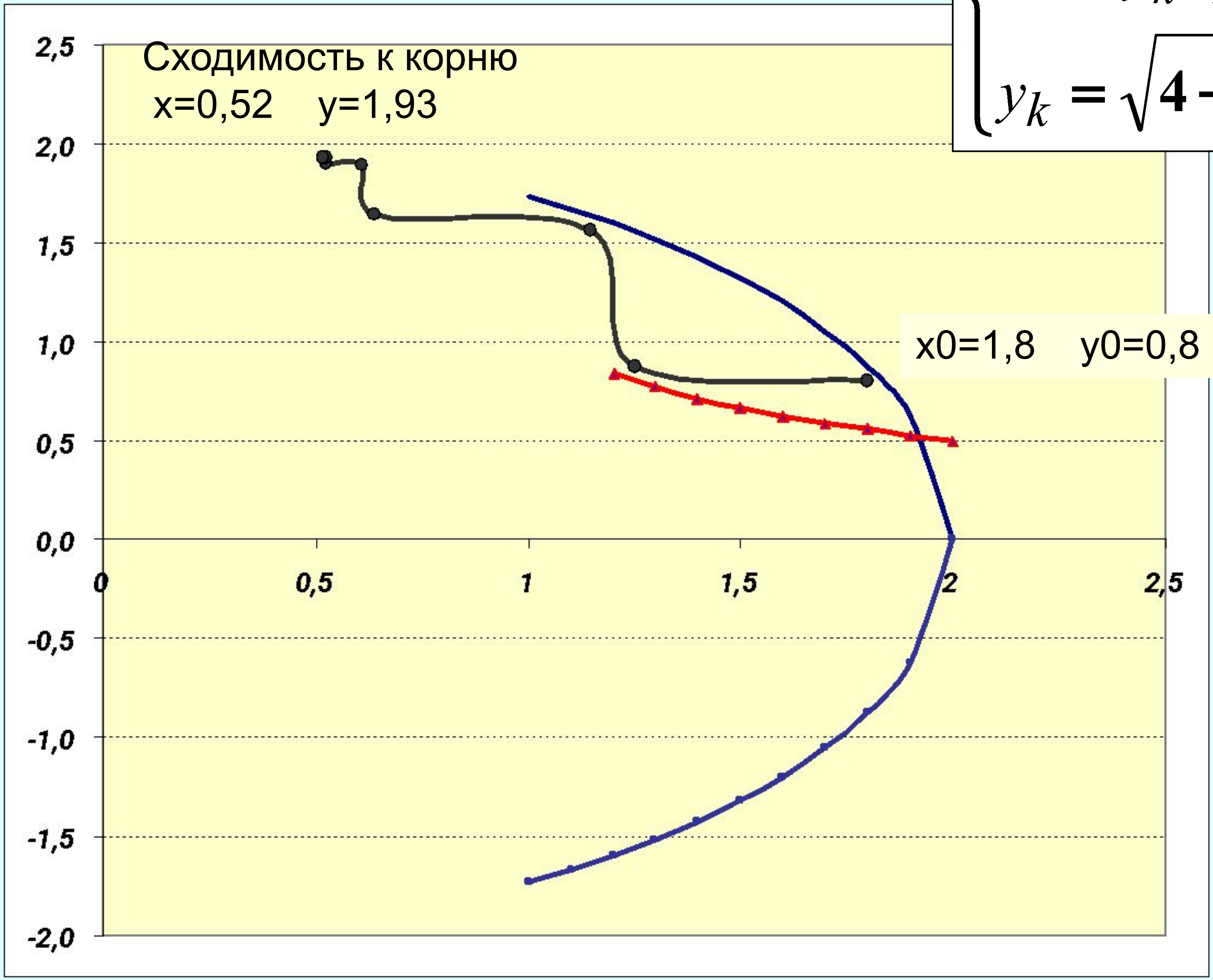
Пример 1

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{1}{y_{k-1}} \\ y_k = \sqrt{4 - x_{k-1}^{\,2}} \end{cases}$$



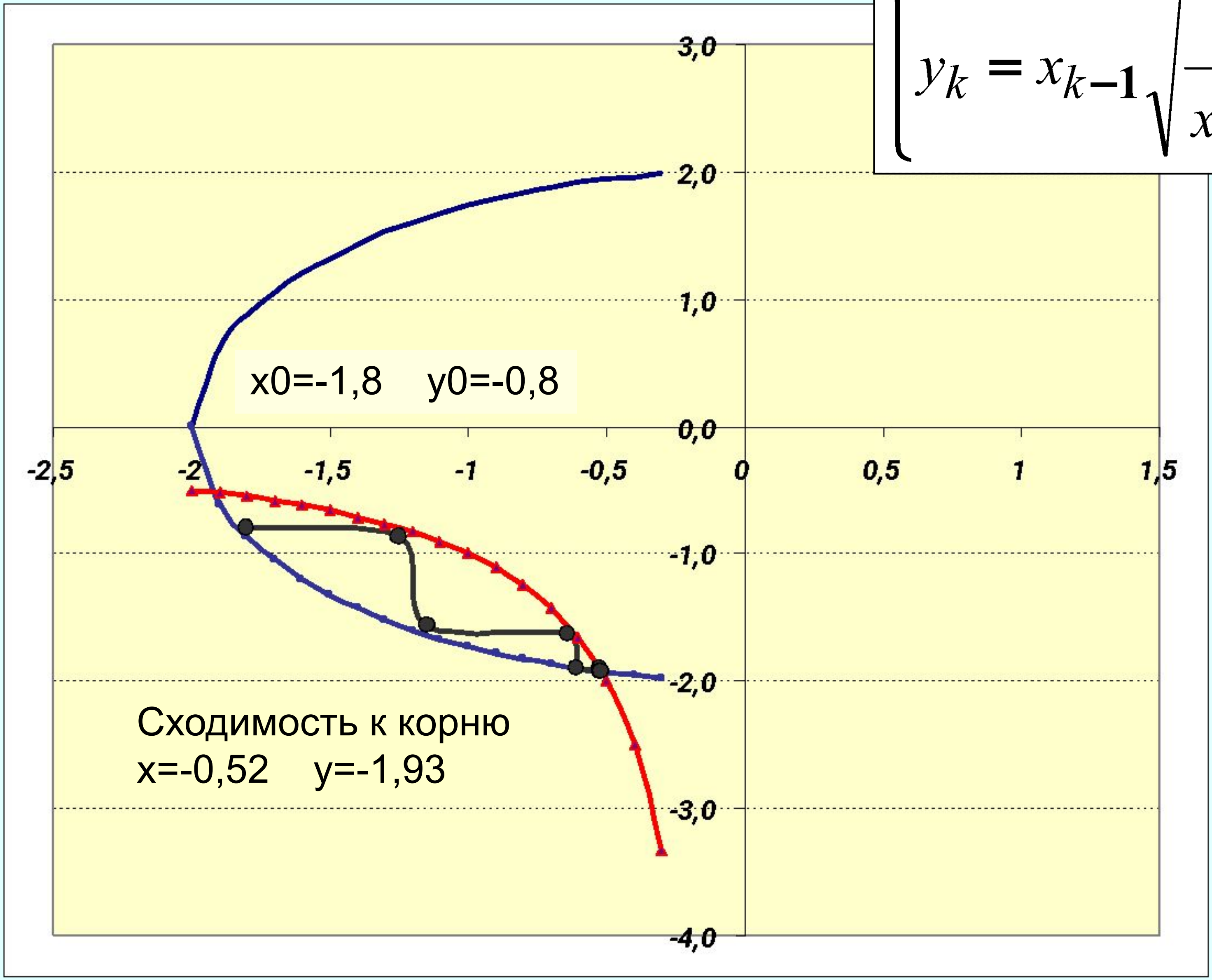
Пример 1

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{1}{y_{k-1}} \\ y_k = \sqrt{4 - x_{k-1}^{\,2}} \end{cases}$$



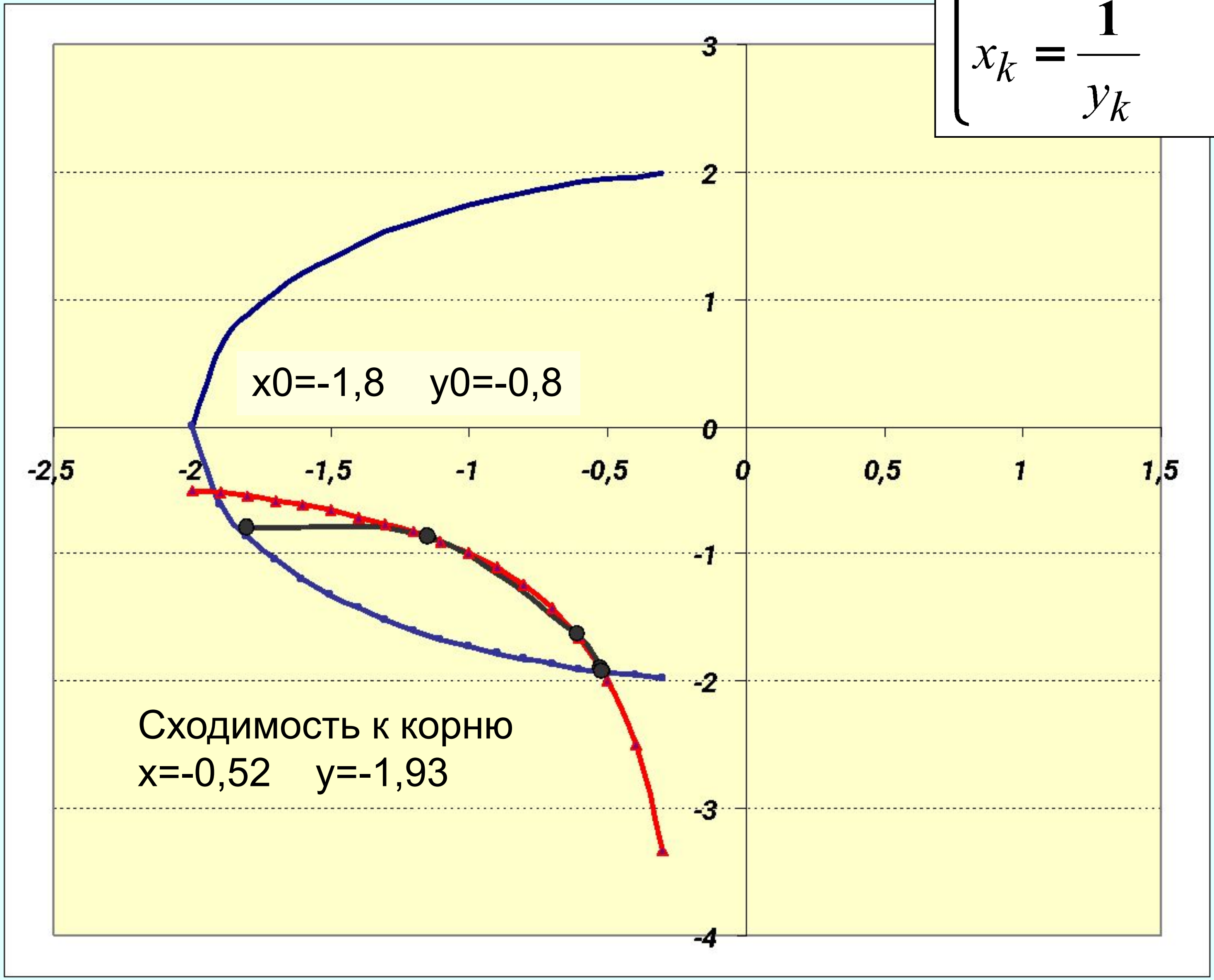
Пример 1

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{1}{y_{k-1}} \\ y_k = x_{k-1}\sqrt{\dfrac{4}{{x_{k-1}}^2} - 1} \end{cases}$$



Пример 1

$$\begin{cases} y_k = x_{k-1}\sqrt{\dfrac{4}{x_{k-1}^{2}} - 1} \\ x_k = \dfrac{1}{y_k} \end{cases}$$



выводы

- Вычисления в методе последовательных приближений просты
- Однако сложно найти такую систему которая была бы эквивалентна исходной системе и одновременно обеспечивала бы сходимость

Метод Ньютона

- Это точный аналог одномерного метода Ньютона, т.е. одноточечный метод в котором используется производная
- В многомерном случае необходимо уметь вычислять градиенты всех функций системы

Метод Ньютона

- Запишем систему двух уравнений с двумя неизвестными в векторной форме:

$$F(\vec{z}) = \mathbf{0}$$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} f\mathbf{1}(x, y) \\ f\mathbf{2}(x, y) \end{pmatrix} - \textit{вектор} - \textit{функция}$$

Метод Ньютона

- Обобщая формулу Ньютона на многомерный случай получим:

$$\vec{z}^{\,k+1} = \vec{z}^{\,k} - \left[F'\left(\vec{z}^{\,k}\right)\right]^{-1} \cdot F\left(\vec{z}^{\,k}\right)$$

Метод Ньютона

$$F'(\vec{z}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$-$ *матрица Якоби вектор* $-$ *функции*

Операции с матрицами

Произведение матрицы и вектора

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 \\ a_{21} \cdot b_1 + a_{22} \cdot b_2 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Пример 1 (метод Ньютона)

Применим метод к исходной системе

$$\begin{cases} y \cdot x = 1 \\ y^2 + x^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y \cdot x - 1 = 0 \\ y^2 + x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$F(\vec{z}) = \begin{pmatrix} y \cdot x - \mathbf{1} \\ y^{\mathbf{2}} + x^{\mathbf{2}} - \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

$$F'(\vec{z}) = \begin{pmatrix} y & x \\ \mathbf{2}x & \mathbf{2}y \end{pmatrix}$$

Пример 1 (метод Ньютона)

Найдем матрицу, обратную к матрице производных:

$$\left[F'(\vec{z})\right]^{-1} = \frac{1}{2y^2 - 2x^2}\begin{pmatrix} 2y & -x \\ -2x & y \end{pmatrix}$$

Пример 1 (метод Ньютона)

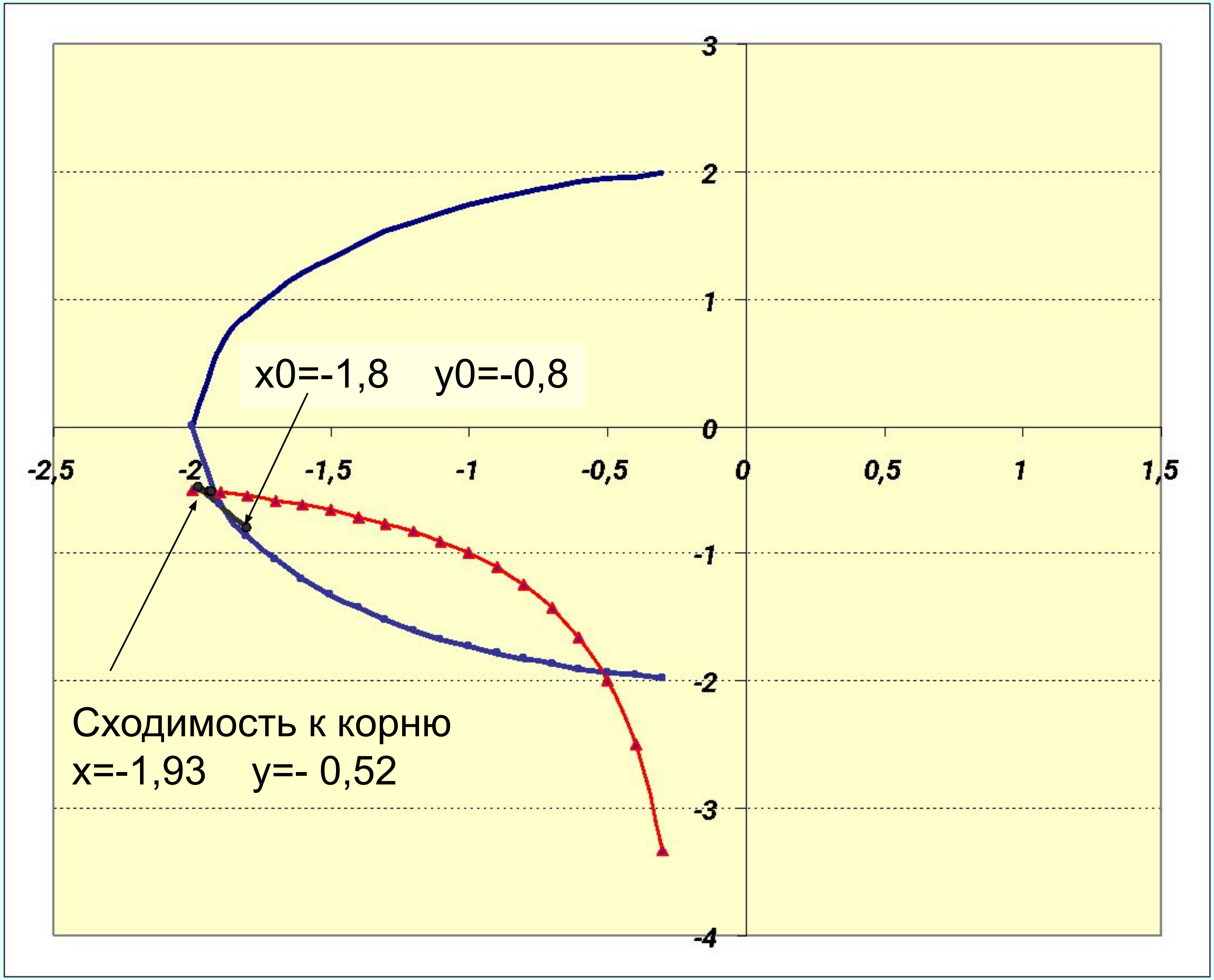
Окончательно получим итерационную схему

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x - \dfrac{2y(xy-1) - x\left(x^2+y^2-4\right)}{2y^2-2x^2} \\ y - \dfrac{-2x(xy-1) + y\left(x^2+y^2-4\right)}{2y^2-2x^2} \end{pmatrix}$$

Пример 1 (метод Ньютона)

k -итерация	x_k	y_k	Уравнение 1	Уравнение 2
0	-1,80000	-0,80000	1,44000	3,88000
1	-1,97692	-0,47692	0,94284	4,13568
2	-1,93308	-0,51641	0,99827	4,00348
3	-1,93185	-0,51764	1,00000	4,00000
4	-1,93185	-0,51764	1,00000	4,00000
5	-1,93185	-0,51764	1,00000	4,00000

Пример 1 (метод Ньютона)



Решить уравнение

$$x^3 - 2x - 6 = 0$$

- Используя численные методы (дихотомии, хорд, Ньютона)