Лекция №2.
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ.
Определения вероятности

Испытания и исходы

Испытанием назовем эмпирические наблюдения, тестирование, проведение эксперимента.

Пример испытания: подбрасывание игральной кости.

В результате испытания получаем **исходы**.

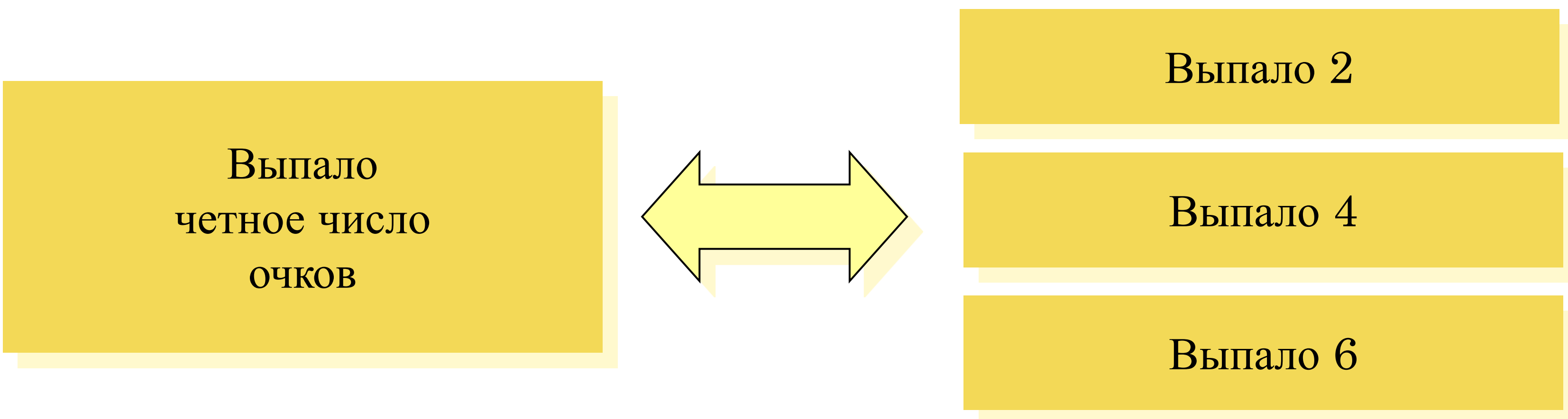
Пример исходов:

- выпадение единицы
- выпадение четного числа очков
- выпадение не менее четырех очков

Элементарные исходы

Элементарный исход испытания не может быть разделен на другие исходы.

Пример. Исход «Выпадение четного числа» не является элементарным, поскольку может быть разделен на исходы «выпадение двойки», «выпадение четверки» и «выпадение шестерки». Эти три исхода являются элементарными.



Неэлементарный исход **Элементарные исходы**

Пространство элементарных исходов

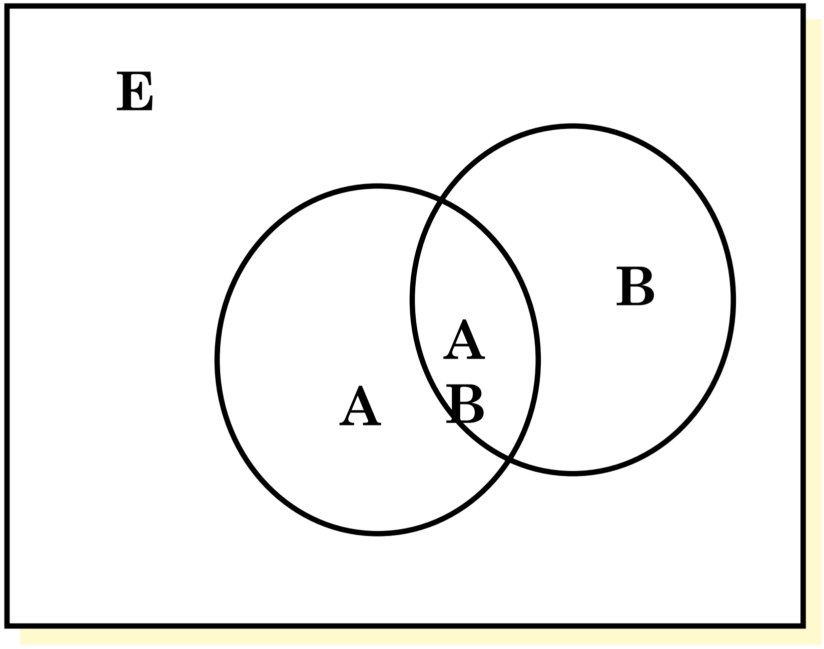
Пространство элементарных исходов включает все элементарные исходы, которые могут произойти в результате испытания.

Пример. Пространство элементарных исходов:

«1», «2», «3», «4», «5», «6».

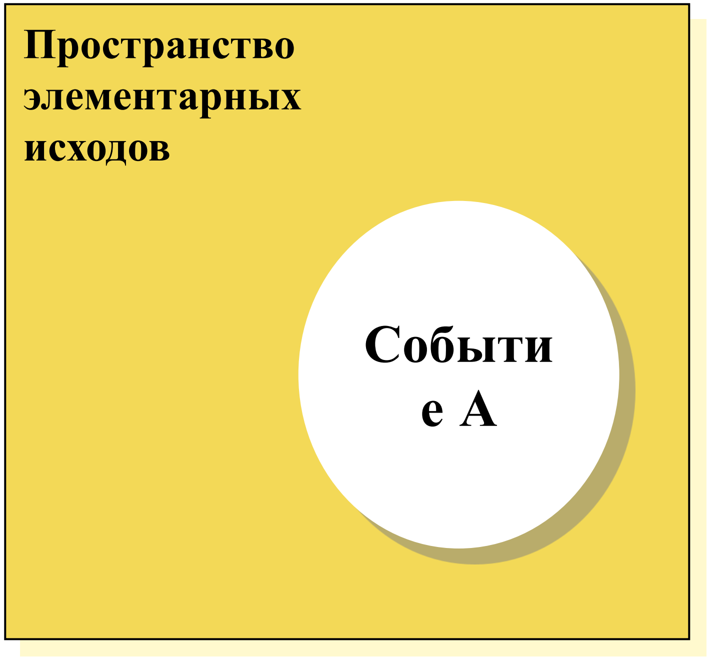
Диаграмма Венна

Для графического представления пространства случайных событий и отношений между событиями принято использовать **диаграммы Венна (Эйлера-Венна)**.



Случайное событие

Случайное событие есть некоторое подмножество пространства элементарных исходов испытания.



Обозначаем ожидаемое нами событие А.

Примеры случайных событий

Случайное событие – некоторое подмножество пространства элементарных исходов испытания.

Испытание	Пространство элементарных исходов	Примеры случайных событий
Одна кость	1, 2, 3, 4, 5, 6	«Выпадение 5» «Выпадение четного числа» «Выпадение 7»
Две кости	1-1, 1-2, …, 6-6	«Выпадение 1 и 7» «Выпадение суммы 7»

Невозможное и достоверное события

Достоверным назовем событие, наступающее при любом исходе испытания.

Невозможным назовем событие, не наступающее ни при одном исходе испытания.

Пример. Достоверное событие: при подбрасывании монеты выпадет Орел или Решка.

Невозможные события: «Встанет на ребро», «Повиснет в воздухе».

Равновозможные события

Равновозможными назовем события, для которых есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример. События А и В:

А = { выпадет четное число очков }

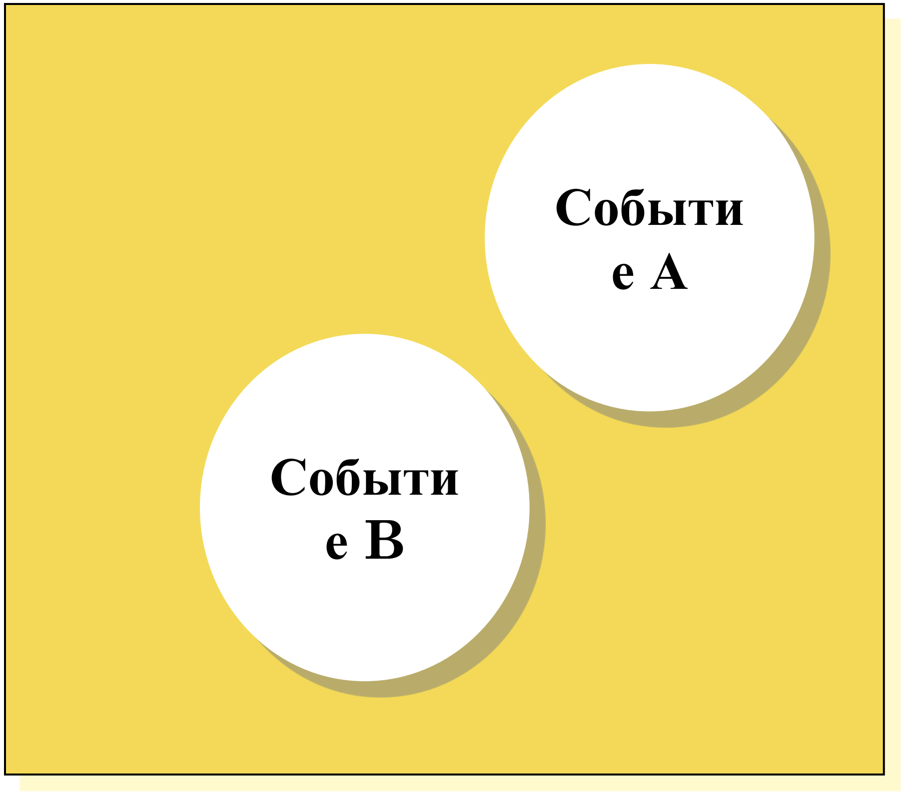
В = { выпадет нечетное число очков }

являются равновозможными.

Несовместные события

События *A* и *B* называются **несовместными,** если они не могут произойти одновременно.

В противном случае, эти события являются совместными.



Примеры

совместные события

- идет дождь и идет снег;
- человек ест и человек читает;
- число целое и четное;

несовместные события

- день и ночь;
- человек читает и человек спит;
- число иррациональное и четное.

Противоположное событие

(по отношению к рассматриваемому событию А) это событие , которое не происходит, если А происходит, и наоборот.

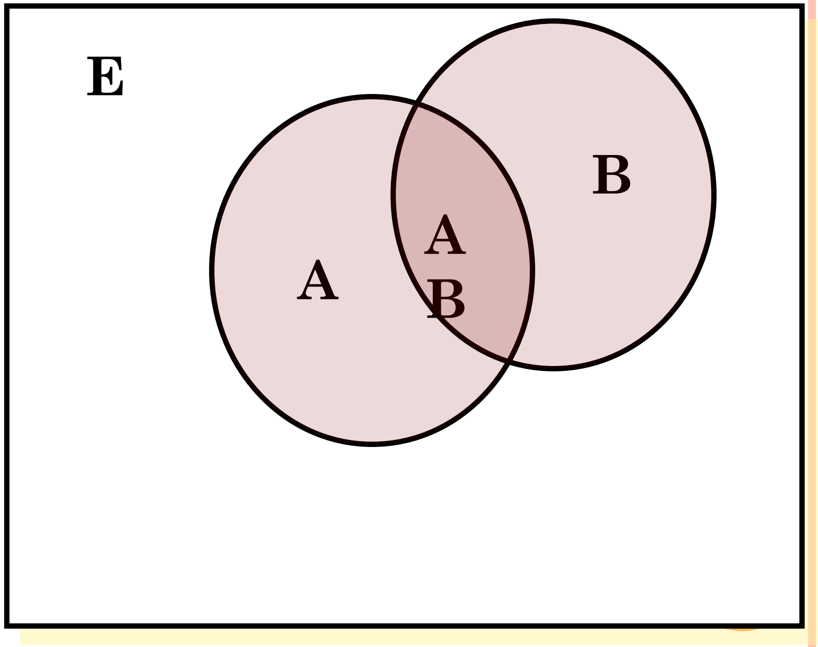
Примеры

- если сейчас день, то сейчас не ночь;
- если человек спит, то в данный момент он не читает;
- если число иррациональное, то оно не является четным.

Сумма событий

Суммой А+В случайных событий А и В называется событие, состоящее в том, что **произошло хотя бы одно** из них.

Сумма А+В означает, что произошло событие А или событие В, не исключая того, что они могли произойти оба.



Сумма событий есть их объединение.

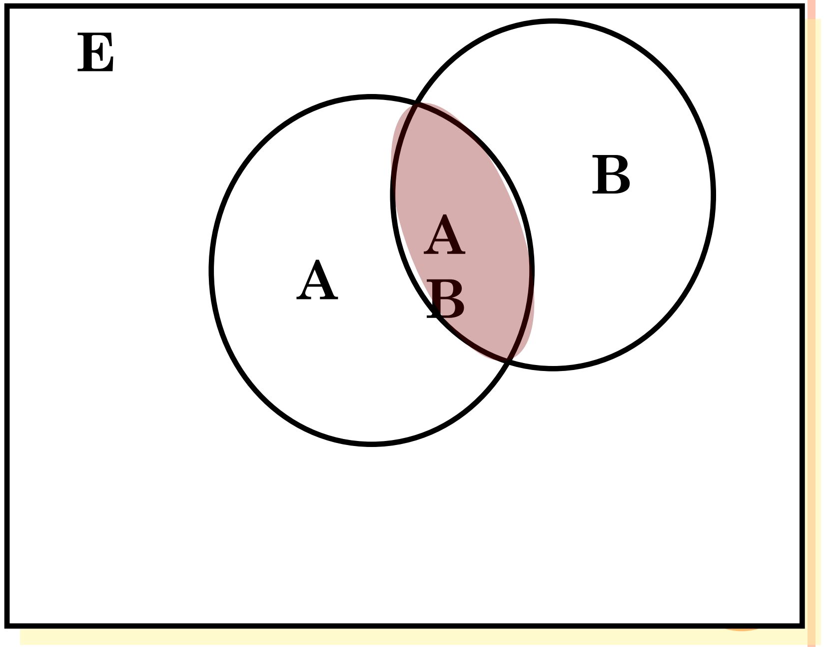
Любой элементарный исход, который входит в событие А или событие В, входит также и в их сумму А+В.

Произведение событий

Произведением АВ событий А и В называется событие, состоящее в том, что **произошли оба** события.

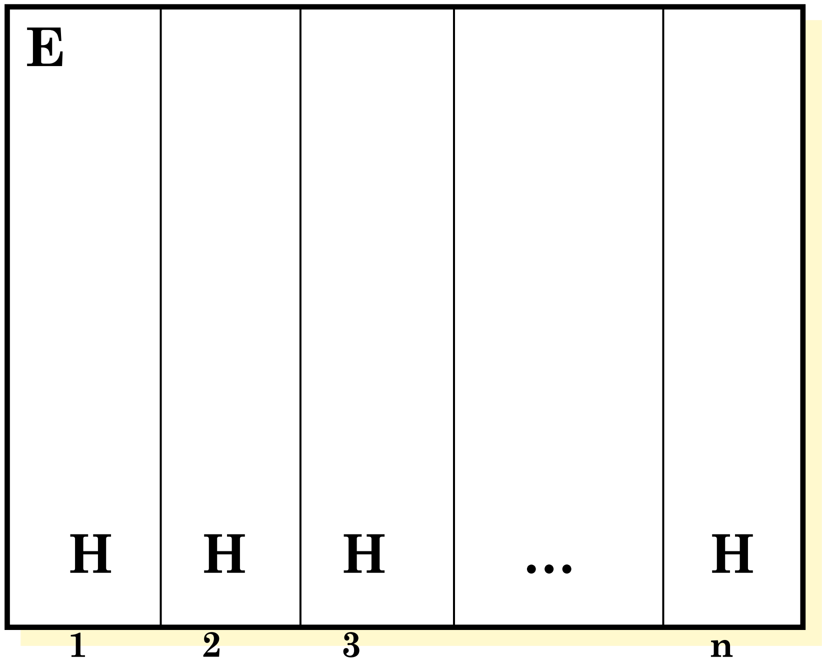
Произведение АВ означает, что произошло и событие А, и событие В одновременно.

Произведение событий есть их пересечение.



Полная группа событий

События H_1, H_2, … , H_n образуют **полную группу событий**, если они попарно *несовместны*, а их сумма является *достоверным* событием.



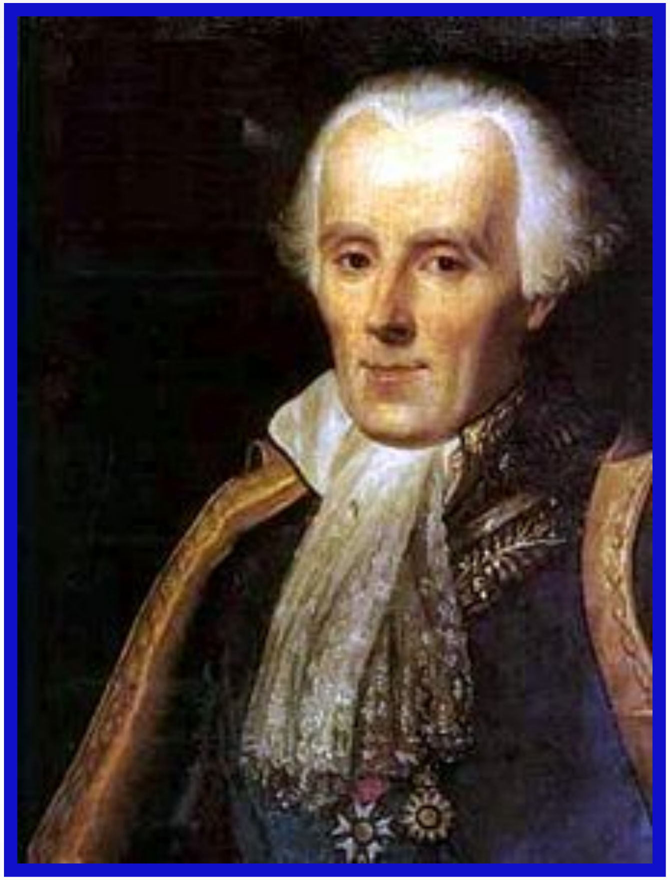
Благоприятные исходы

Элементарные исходы, образующие событие А, назовем **благоприятными**.

Если мы *ожидаем* событие А, то появление любого элементарного исхода, образующего событие А, для нас является *благоприятным*.

P.S. «Благоприятные» не значит «хорошие».

Классическое определение вероятности



Пьер-Симо́н Лапла́с

Классическое определение вероятности было впервые дано в работах французского математика Лапласа.

Вероятность (классическое определение)

Вероятностью события А назовем отношение числа благоприятных исходов к общему числу элементарных исходов:

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

где m – число благоприятных исходов,

n – общее число элементарных исходов.

Свойства вероятности

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

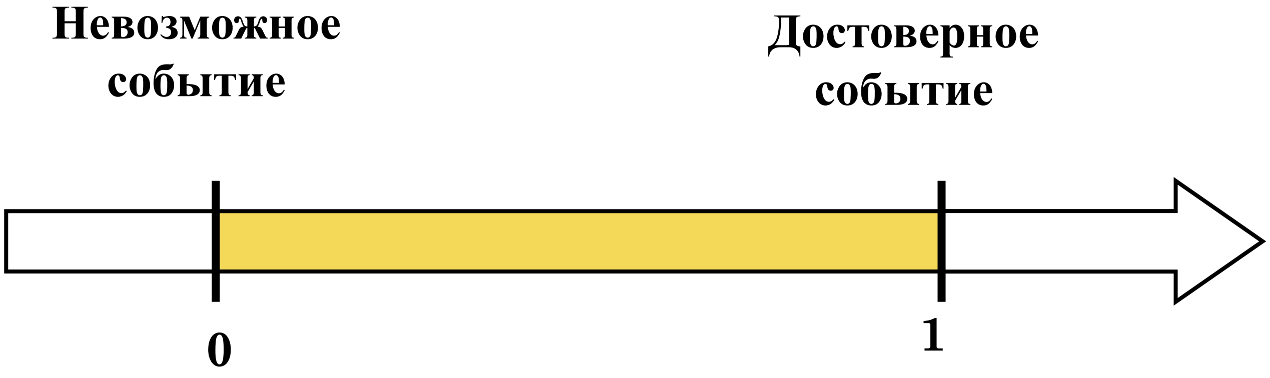
Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Свойство 3. Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы:

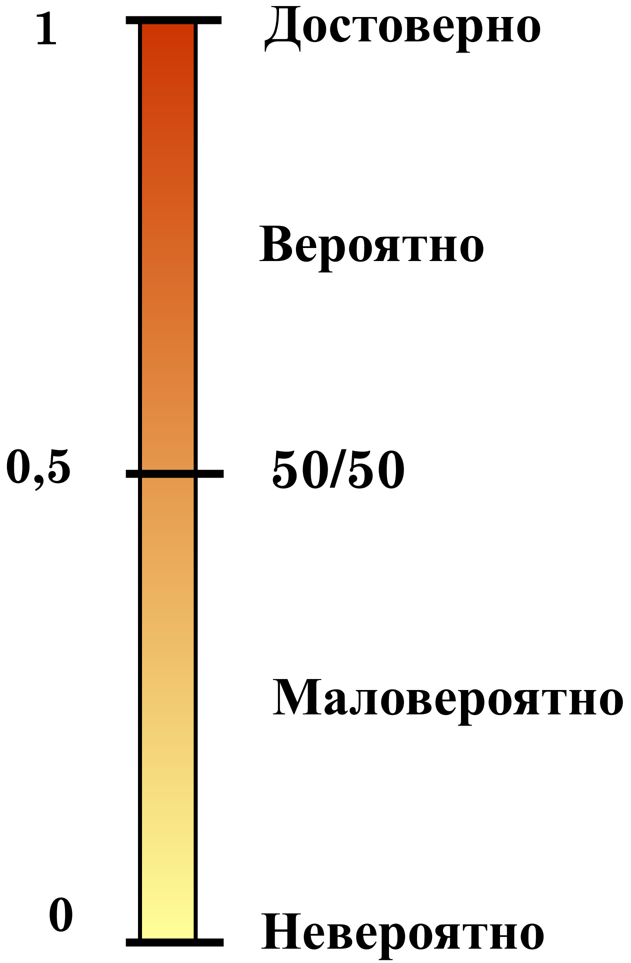
$$0 \le p(A) \le 1$$

Вероятность – мера со шкалой от 0 до 1

Вероятность выступает **мерой** для случайных событий. Каждому случайному событию ставится в соответствие одно единственное число от 0 до 1 включительно, которое называется вероятностью этого события.



Интерпретация вероятности



ЭКСПЕРИМЕНТ	ЧИСЛО ВОЗМОЖНЫХ ИСХОДОВ ЭКСПЕРИМЕНТА (n)	СОБЫТИЕ А	ЧИСЛО ИСХОДОВ, БЛАГОПРИЯТ-НЫХ ДЛЯ ЭТОГО СОБЫТИЯ (m)	ВЕРОЯТНОСТЬ НАСТУПЛЕНИЯ СОБЫТИЯ А P(A)=m/n
Бросаем монетку	2	Выпал «орел»	1	$\frac{1}{2}$
Вытягиваем экзаменаци-онный билет	24	Вытянули билет №5	1	$\frac{1}{24}$
Бросаем кубик	6	На кубике выпало четное число	3	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
Играем в лотерею	250	Выиграли, купив один билет	10	$\frac{10}{250}=\frac{1}{25}$

Пример.

Подбрасываем две монеты.

Имеется четыре элементарных исхода:

Орел - Орел

Орел - Решка

Решка - Орел

Решка - Решка

Событие:

А = {Герб выпал не менее одного раза}

состоит из трех элементарных исходов.

Его вероятность равна 3 / 4.

Пример.

Бросается игральная кость.
Элементарные исходы:
число выпавших очков равно 1, 2, 3, 4, 5 или 6.

Случайное событие
B = {число выпавших очков меньше 3}
Ему благоприятны выпадение 1 и 2.

$$P(B) = 2/6 = 1/3$$

Случайное событие
C = {число выпавших очков больше 2}
Ему благоприятны исходы 3, 4, 5, 6.

$$P(C) = 4/6 = 2/3$$

Правило округления

Если вероятность вычисляется в десятичных знаках, округляем ее до трех знаков после запятой:

$$P(A) = 2/3 = 0{,}667$$

$$P(B) = 100/205 = 0{,}488$$

Статистическое определение вероятности

Ошибка Даламбера

Жан Лерон Даламбер
(1717 -1783)

Великий французский философ и математик Даламбер вошел в историю теории вероятностей со своей знаменитой ошибкой, суть которой в том, что он неверно определил равновозможность исходов в опыте всего с двумя монетами!

Ошибка Даламбера

Подбрасываем две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что они упадут на одну и ту же сторону?

Решение Даламбера:

Опыт имеет три равновозможных исхода:

1) обе монеты упадут на «орла»;
2) обе монеты упадут на «решку»;
3) одна из монет упадет на «орла», другая на «решку».

Из них благоприятными будут два исхода.

$$n = 3, m = 2, P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$$

Правильное решение:

Опыт имеет четыре равновозможных исхода:

1) обе монеты упадут на «орла»;
2) обе монеты упадут на «решку»;
3) первая монета упадет на «орла», вторая на «решку»;
4) первая монета упадет на «решку», вторая на «орла».

Из них благоприятными будут два исхода.

$$n = 4, m = 2, P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Опыт «Выбор перчаток». В коробке лежат 3 пары одинаковых перчаток. Из нее, не глядя, вынимаются две перчатки. Перечислите все равновозможные исходы.

Какой вариант решения правильный:

1-ый вариант:

3 исхода:

1) «обе перчатки на левую руку»,
2) «обе перчатки на правую руку»,
3) «перчатки на разные руки».

2-ой вариант:

4 исхода:

1) «обе перчатки на левую руку»,
2) «обе перчатки на правую руку»,
3) «первая перчатка на левую руку, вторая на правую»,
4) «первая перчатка на правую руку, вторая на левую».

Правило: природа различает все предметы, даже если внешне они для нас неотличимы.

Вывод

Формула классической вероятности дает очень простой способ вычисления вероятностей. Однако простота этой формулы обманчива. При ее использовании возникают два очень непростых вопроса:

1. Как выбрать систему исходов опыта так, чтобы они были равновозможными, и можно ли это сделать вообще?
2. Как найти числа m и n и убедиться в том, что они найдены верно?

Можно ли вычислить вероятность события с помощью ряда экспериментов?

Опыт человечества:

Вероятность попасть под дождь в Лондоне гораздо выше, чем в пустыне Сахара.

Весь наш жизненный опыт подсказывает, что любое событие считается тем более вероятным, чем чаще оно происходит. Значит, вероятность должна быть каким-то образом связана с частотой.

Частота случайного события

Абсолютной частотой случайного события A в серии из N случайных опытов называется число N_A, которое показывает, сколько раз в этой серии произошло событие A.

Частота случайного события

Относительной частотой случайного события называют отношение числа появлений этого события к общему числу проведенных экспериментов:

$$W(A) = \frac{N_A}{N}$$

где A – случайное событие по отношению к некоторому испытанию,
N раз проведено испытание и при этом событие A наступило в N_A случаях.

Примеры

Пример 1. Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорожденных детей 515 мальчиков. Какова частота рождения мальчика в такой серии наблюдений?

$$W(A) = \frac{515}{1000} \approx 0{,}515$$

Ответ: 0,515

Пример 2. За лето на Черноморском побережье было 67 солнечных дней. Какова частота солнечных дней на побережье за лето? Частота пасмурных дней?

$$W(A) = \frac{67}{92} \approx 0{,}728$$

$$W(B) = \frac{25}{92} \approx 0{,}272.$$

Ответ: 0,728; 0,272

Можно ли относительную частоту принять за вероятность?

Фундаментальным свойством относительных частот является тот факт, что с увеличением числа опытов относительная частота случайного события постепенно стабилизируется и приближается к вполне определенному числу, которое и следует считать его **вероятностью.**

Пример.

Подбрасывание монеты. А – выпадает герб.

Классическая вероятность:

всего 2 исхода,

1 исход события A:

$$P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

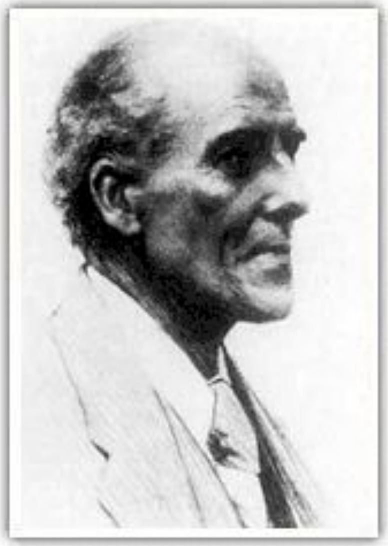
Проверка

Жорж Бюффон

Французский естествоиспытатель Бюффон (XVIII в.) бросил монету **4040** раз, и при этом герб выпал в **2048** случаях. Следовательно, частота выпадения герба в данной серии испытаний равна:

$$\mu = \frac{2048}{4040} = 0,50693..$$

Проверка



Карл Пирсон

Английский математик Карл Пирсон (1857-1936) бросал монету **24000** раз, причем герб выпал **12012** раз.

Следовательно, частота выпадения герба в данной серии испытаний равна:

$$\mu = \frac{12012}{24000} = 0{,}5005.$$

Результаты

$$P(A) = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\mu = \frac{2048}{4040} = 0,50693..$$

$$\mu = \frac{12012}{24000} = 0,5005.$$

Вывод

Пример подтверждает естественное предположение о том, что вероятность выпадения герба при одном бросании монеты равна 0,5

Статистическая вероятность

Вероятность случайного события приближенно равна частоте этого события, полученной при проведении большого числа случайных экспериментов: $P(A) = \frac{N_A}{N}$,

где N_A - число испытаний, в которых наступило событие А, N – общее число испытаний.

Задача №1.

Чтобы определить, как часто встречаются в лесопарке деревья разных пород, были проведены следующие эксперименты. Каждый исследователь выбрал свою тропинку и по пути следования записывал породу каждого десятого дерева.

Результаты были занесены в таблицу:

Породы	Сосна	Дуб	Береза	Ель	Осина	Всего
Число деревьев	315	217	123	67	35	757

Оцените вероятность того, что выбранное наугад в этом парке дерево будет:

а) сосной;
б) хвойным;
в) лиственным.

Ответ запишите в виде десятичной дроби с тремя знаками после запятой.

Решение:

а) A={выбранное наугад в парке дерево - сосна} N_A = 315, N = 757, $P(A)$ = 315/757 ≈ **0,416**;

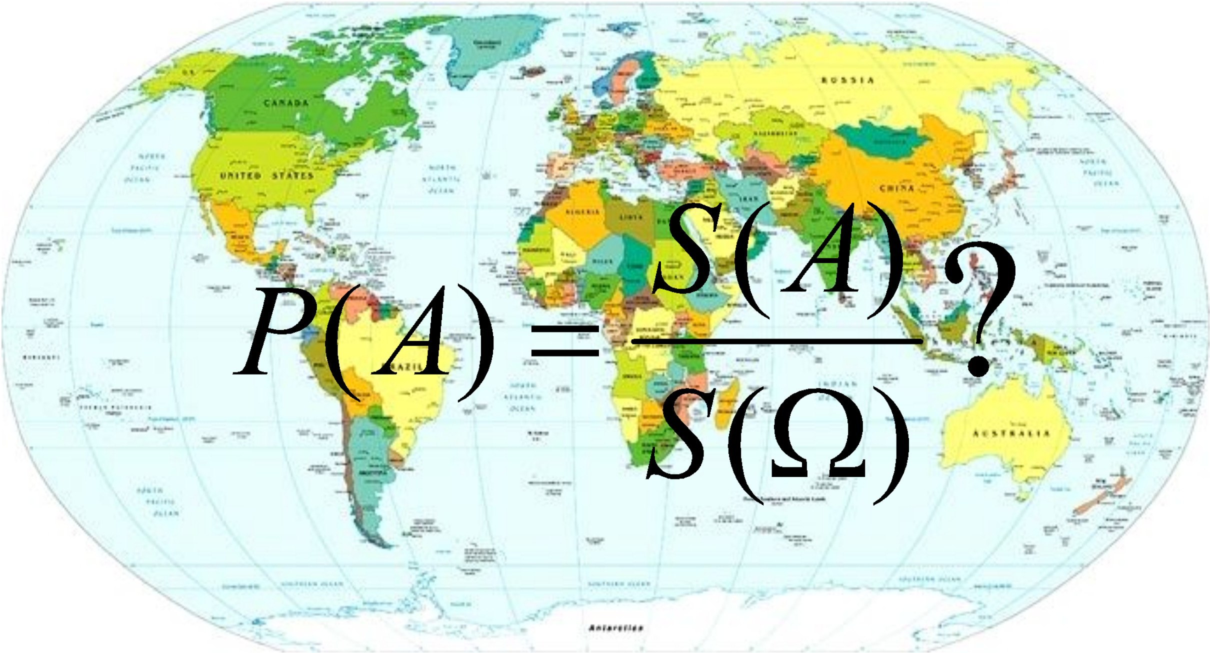
б) B ={выбранное наугад в парке дерево - хвойное} N_A = 315 + 67 = 382, N = 757.
$P(A)$ = 382/757 ≈ **0,505**;

в) C = {выбранное наугад в парке дерево - лиственное} N_A = 217 + 123 + 35 = 375, N = 757.
$P(A)$ = 375/757 ≈ **0,495**.

Геометрическая вероятность

Опыт 1. Выберем на географической карте мира случайную точку (например, зажмурим глаза и покажем указкой). Какова вероятность, что эта точка окажется в России?

- **Число исходов бесконечно.**
- **Вероятность будет зависеть от размера карты (масштаба).**



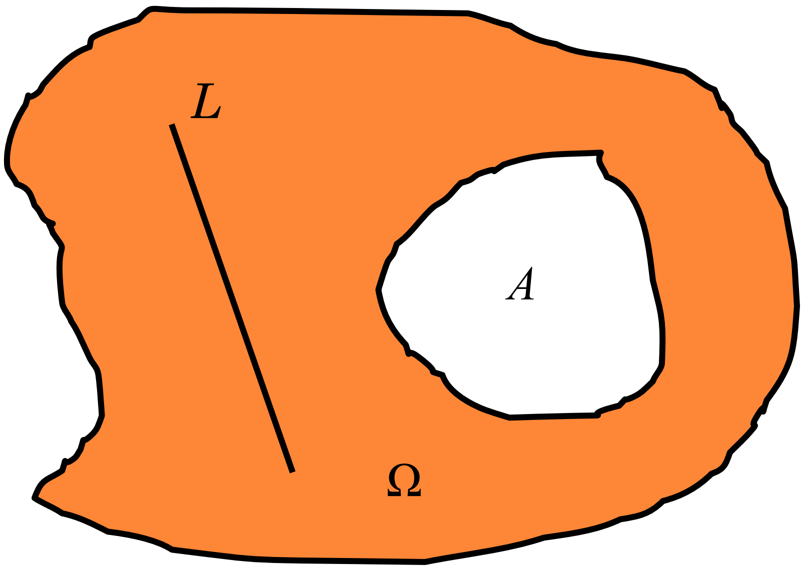
$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} ?$$

ГИПОТЕЗА: Очевидно, для ответа на вопрос нужно знать, какую часть всей карты занимает Россия.

Точнее, какую часть всей площади карты составляет Россия.

Отношение этих площадей и даст искомую вероятность.

Общий случай: в некоторой ограниченной области Ω случайно выбирается точка. Какова вероятность, что точка попадет в область A? На прямую L?



$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

$$S(L) = 0; P(L) = \frac{0}{S(\Omega)} = 0$$

Геометрическое определение вероятности

- Если предположить, что попадание в любую точку области Ω равновозможно, то вероятность **попадания случайной точки в заданное множество *A* будет равна отношению площадей:**

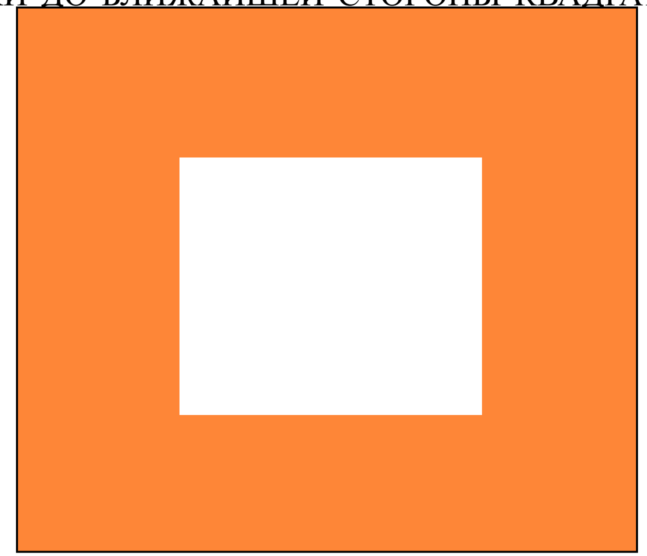
$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

- Если *A* имеет нулевую площадь, то вероятность попадания в *A* равна нулю.
- Можно определить геометрическую вероятность **в пространстве и на прямой**:

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}; P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}$$

Пример

В квадрат со стороной 4 см «бросают» точку. Какова вероятность, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата будет меньше 1 см?



Закрасим в квадрате множество точек, удаленных от ближайшей стороны меньше, чем на 1 см.

Площадь закрашенной части квадрата $16\text{см}^2 - 4\text{см}^2 = 12\text{см}^2$.

Значит,

$$P(A) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$