Функциональные и степенные ряды

- Функциональные ряды
- Степенные ряды
- Сходимость степенных рядов
- Свойства степенных рядов

Функциональные ряды

Пусть задана бесконечная последовательность функций, определенных в области *D*:

$$U_1(x); U_2(x); U_3(x) \ldots U_n(x) \ldots$$

Выражение вида:

$$U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \qquad (1)$$

называется ***функциональным рядом***.

Если в выражении *(1)* положим $x = x_0$, то получим некоторый числовой ряд:

$$U_1(x_0) + U_2(x_0) + U_3(x_0) + \ldots + U_n(x_0) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x_0) \qquad (2)$$

Функциональные ряды

Функциональный ряд *(1)* называется **сходящимся** в точке x_0, если числовой ряд *(2)*, получившийся из ряда *(1)* подстановкой $x = x_0$, является сходящимся рядом. При этом x_0 называется **точкой сходимости** ряда.

Множество всех точек сходимости функционального ряда называется **областью сходимости** данного ряда.

Обозначим область сходимости ряда - D_s.

Как правило, область D_s не совпадает с областью D, а является ее частью:

$$D_s \subset D$$

Функциональные ряды

Сумма функционального ряда *(1)* зависит от взятой точки области сходимости, следовательно сама является некоторой функцией от *x:*

$$f(x) = U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$$

Ряд *(1)* сходится к функции *f(x)*

Для функции *f(x)* имеет место разложение

Область определения этой функции совпадает с областью сходимости ряда D_s.

Пример

Дан ряд: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

Это геометрическая прогрессия со знаменателем $q = x$ и первым членом $b_1 = 1$. Имеет место разложение:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad |x| < 1$$

По формуле:

$$S = \frac{b_1}{1-q} \qquad |q| < 1$$

Функциональные ряды

Как и в случае числовых рядов для функционального ряда *(1)* можно составить последовательность частичных сумм:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{U_1(x)}_{S_1(x)}+U_2(x)}_{S_2(x)}+U_3(x)+\ldots+U_n(x)}_{S_n(x)}+\underbrace{U_{n+1}(x)+U_{n+2}(x)\ldots}_{r_n(x)}$$

Тогда: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ для любых x из области сходимости.

$r_n(x)=U_{n+1}(x)+U_{n+2}(x)+\ldots$ - n -й остаток ряда.

Таким образом: $f(x)=S_n(x)+r_n(x)$

При $n\to\infty$ $r_n(x)\to 0$ $\Longrightarrow$ $f(x)\approx S_n(x)$

Степенные ряды

Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x, то есть так называемый ***степенной ряд***.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, - постоянные числа – коэффициенты степенного ряда.

Ряд *(1)* расположен по степеням x.

Рассматривают также степенной ряд, расположенный по степеням $(x - x_0)$, то есть ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \quad (2)$$

Ряд *(2)* легко приводится к ряду *(1)* подстановкой $x - x_0 = z$, поэтому при изучении степенных рядов мы ограничимся степенными рядами вида *(1)*.

Сходимость степенных рядов

Любой степенной ряд вида *(1)* сходится в точке $x = 0$:

$$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \ldots + a_n \cdot 0^n + \ldots = a_0$$

Об области сходимости степенного ряда *(1)* можно судить, исходя из следующей теоремы:

Теорема Абеля

1. Если степенной ряд *(1)* сходится при некотором значении

$$x = x_0 \neq 0$$

то он абсолютно сходится при всех значениях x, для которых выполняется условие:

$$|x| < |x_0|$$

2. Если степенной ряд *(1)* расходится при некотором значении

$$x = x_0 \neq 0$$

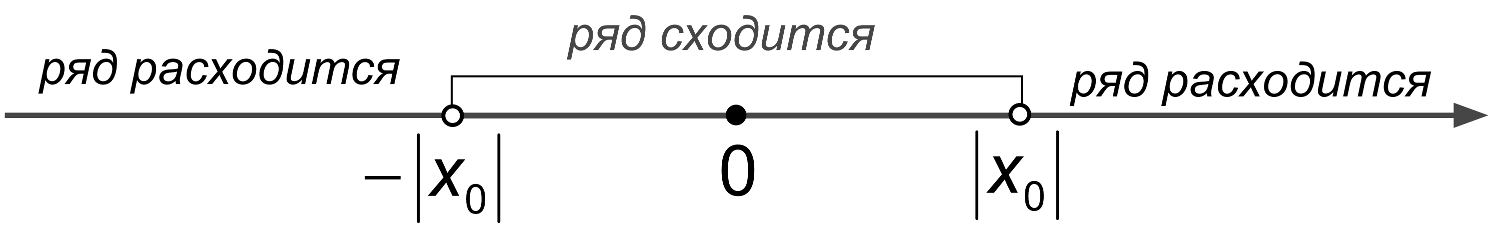
то он расходится при любом значении x при котором: $|x| > |x_0|$

Сходимость степенных рядов

Из теоремы Абеля следует, что существует такая точка x_0, что интервал:

$$\left(-\left|x_0\right|; \left|x_0\right|\right)$$

весь состоит из точек сходимости ряда, а при всех x вне этого интервала ряд расходится.



Интервал $\left(-\left|x_0\right|; \left|x_0\right|\right)$ называют ***интервалом сходимости*** степенного ряда.

Положив $\left|x_0\right| = R$ интервал сходимости можно записать в виде : *(-R; R).*

Число R называют ***радиусом сходимости*** степенного ряда.

Сходимость степенных рядов

В частности, если ряд сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$, то считаем $R = 0$.

Если ряд сходится при всех действительных значениях x, то считаем $R = \infty$

На концах интервала сходимости, то есть при $x = -R$ и при $x = R$ сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Для нахождения радиуса сходимости составим ряд из модулей членов данного степенного ряда

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

и применим к нему признак Даламбера.

Допустим существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq 0$$

Сходимость степенных рядов

По признаку Даламбера ряд сходится, если:

$$|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \Rightarrow |x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Таким образом, для степенного ряда *(1)* радиус сходимости равен:

$$\boxed{R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

Аналогично, пользуясь признаком Коши, можно установить, что

$$\boxed{R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}}$$

Свойства степенных рядов

1 Сумма *S(x)* степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости *(-R; R)*.

2 Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать, при этом для ряда:

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (1)$$

При $-R < x < R$ выполняется равенство:

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \quad (2)$$

3 Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости, при этом для ряда *(1)* выполняется равенство:

$$\int S(x)dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \quad (3)$$

Ряды *(2)* и *(3)* имеют тот же интервал сходимости, что и исходный ряд *(1)*.