Производная функции

Приращение функции и аргумента

$\Delta x = x - x_o$ – приращение аргумента

$\Delta f(x) = f(x) - f(x_o)$

$\Delta f(x) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$

– приращение функции

Найдите Δf, если $f(x) = x^2$, $x_o = 1$, $\Delta x = 0{,}5$

Решение: $f(x_o) = f(1) = 1^2 = 1$,

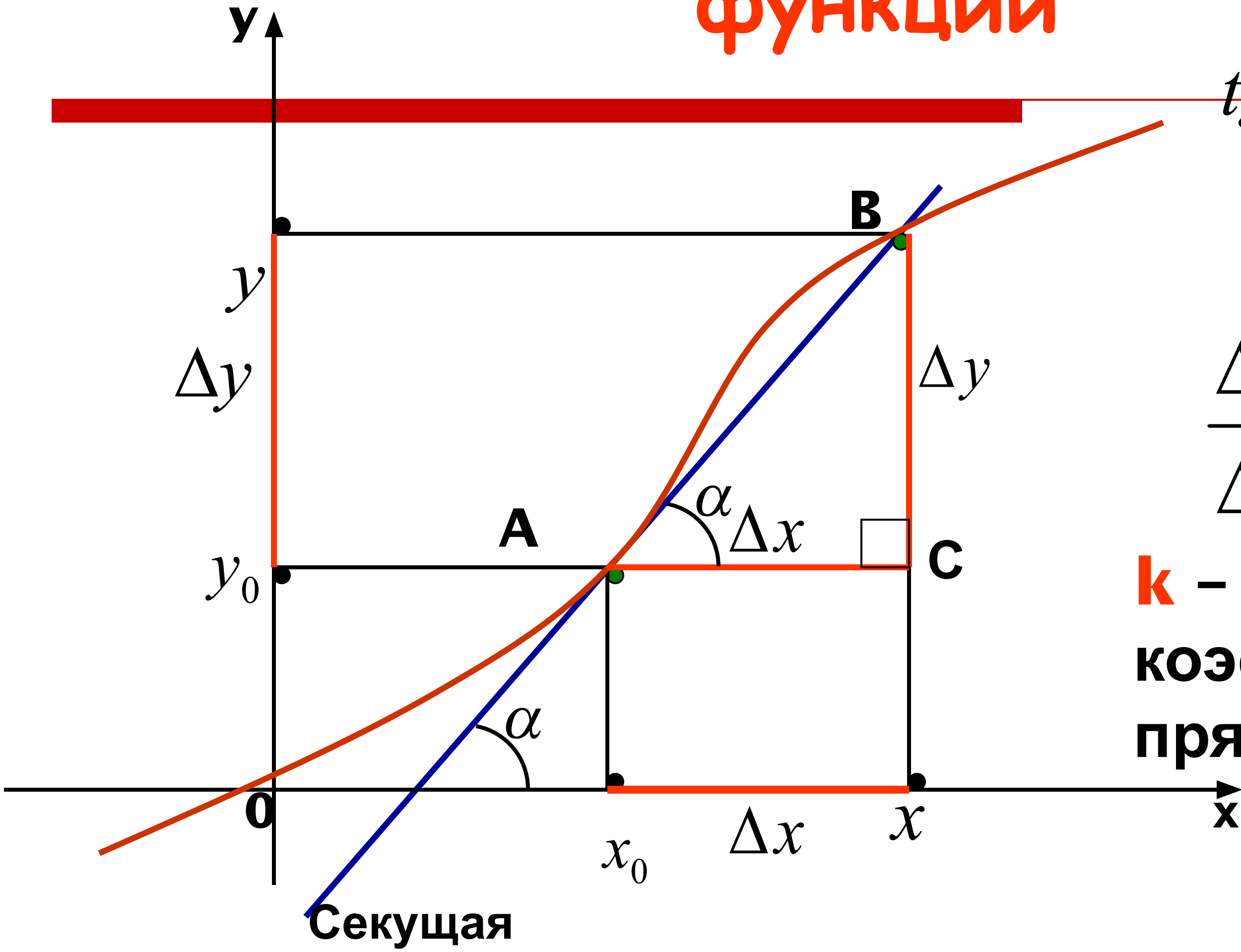
$f(x_o + \Delta x) = f(1 + 0{,}5) = f(1{,}5) = 1{,}5^2 = 2{,}25$,

$\Delta f = 2{,}25 - 1 = 1{,}25$.

Ответ: $\Delta f = 1{,}25$

изменение

Геометрический смысл приращения функции



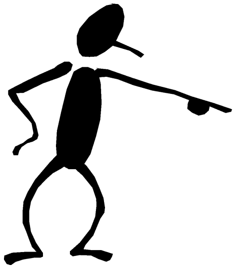
$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Итак,

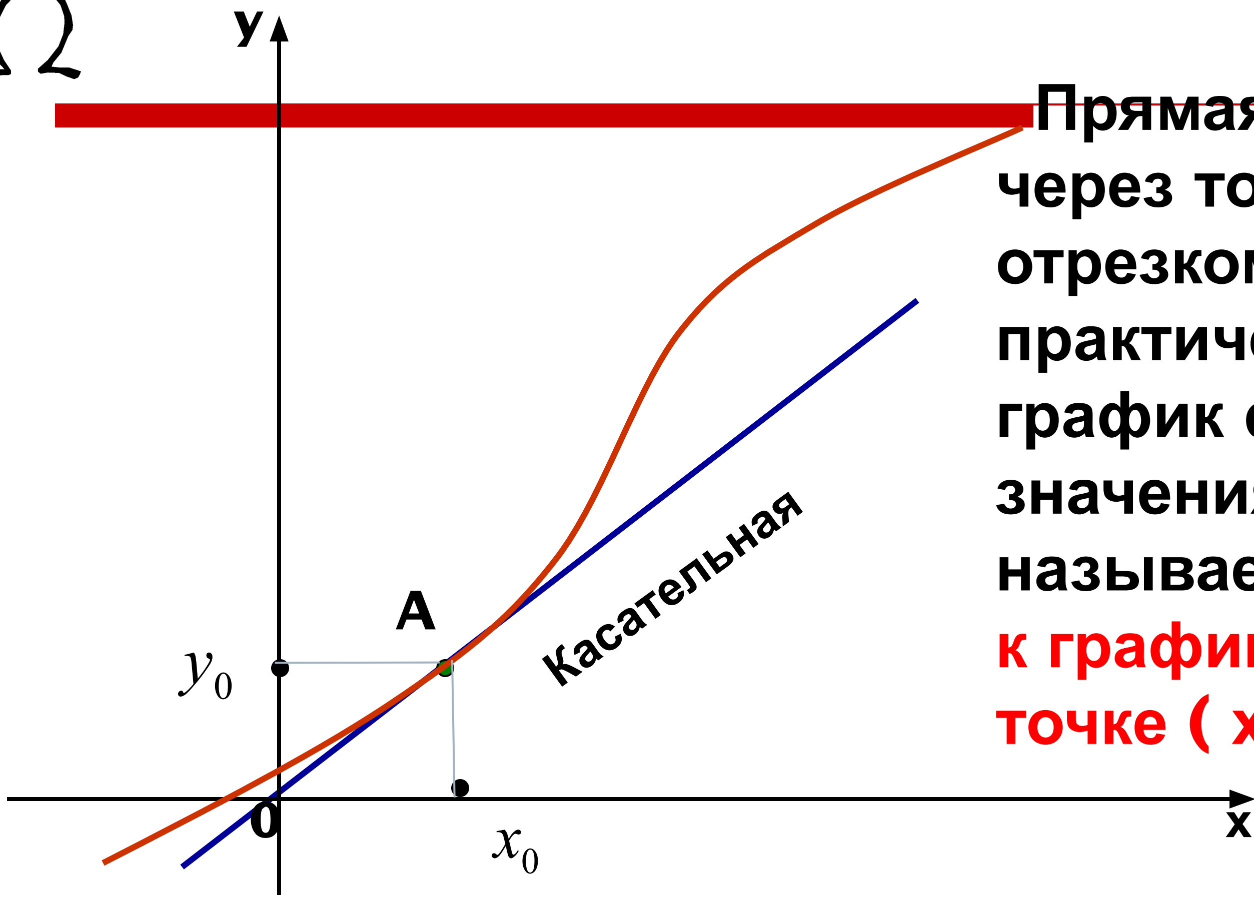
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = k$$

k – угловой коэффициент прямой(секущей)

$$y = kx + b$$



Касательная к графику функции



Прямая, проходящая через точку (x_0 ;f (x_0)), с отрезком которой практически сливается график функции f при значениях близких к x_0 , называется касательной к графику функции f в точке (x_0;f (x_0)).

Мгновенная скорость движения.

$$V_{ср.} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

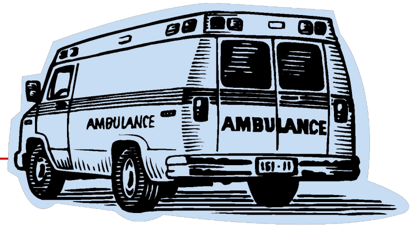
Или, если Δx – перемещение тела, а Δt – промежуток времени, в течении которого выполнялось движение, то

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ *– средняя скорость движения на промежутке времени t.*

Скорость, с которой движется тело в момент времени t называется ***мгновенной скоростью движения*** .

Если $\Delta t \to 0$, то $V_{ср.} \to V_{мгн.}$

$V_{мгн.} = \Delta x/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ.

Производной функции $f(x)$ *в точке* x_0 *называется*

число, к которому стремится отношение $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ *при* $\Delta x \to 0.$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to O} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Алгоритм нахождения производной :

1.С помощью формулы, задающей функцию f , находим ее приращение в точке x_0 **:**

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

2.Находим выражение для разностного отношения $\Delta f / \Delta x$, которое затем преобразуем - *упрощаем , сокращаем на Δx и т. п.*

3.Выясняем, к какому числу стремится отношение $\Delta f / \Delta x$, если считать, что Δx стремится к 0.

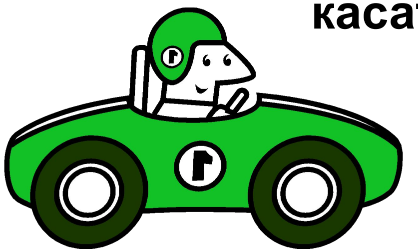
Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то ее называют **дифференцируемой в точке x**.

Она обозначается $f'(x)$ или y'.

Нахождение производной данной функции f называется **дифференцированием**.

Геометрический смысл производной :

Производная функции f в точке x выражает угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x



$$\boxed{f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k}$$

Физический (механический) смысл производной :

Если $s(t)$ - закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t.

$$\boxed{v = s'(t).}$$

Определение производной

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_o),$$

$f'(x_o)$ – число

Алгоритм:

1) $\Delta x,\ x_o$;

2) $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$;

3) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

$y = kx + в$

$$y(x_o) = kx_o + в,$$

$$y(x_o + \Delta x) = k \cdot (x_o + \Delta x) + в = k\,x_o + \\ + k\Delta x + в,$$

$$\Delta y = y(x_o + \Delta x) - y(x_o) = k\,x_o + k\Delta x + \\ + в - kx_o - в = k\Delta x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$$

Ответ: $\boxed{(kx + в)' = k}$

$y = x^2$

$y(x_o) = x_o^2,$

$y(x_o + \Delta x) = (x_o + \Delta x)^2 = x_o^2 + 2\,x_o\,\Delta x + (\Delta x)^2,$

$\Delta y = y(x_o + \Delta x) - y(x_o) = x_o^2 + 2\,x_o\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x_o^2 = 2\,x_o\,\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x_o + \Delta x),$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x\,(2x_o + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_o + \Delta x \to \mathbf{2x_o}$$

$при\ \Delta x \to \mathbf{0}$

Ответ: $\boxed{(x^2)' = 2x}$

$y = x^3$

$y(x_o) = x_o^3$

$y(x_o + \Delta x) =$

$= x_o^3 + 3x_o^2 \Delta x + 3x_o(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

$\Delta y = y(x_o + \Delta x) - y(x_o) =$

$= \Delta x(3x_o^2 + 3x_o \Delta x + (\Delta x)^2)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 3x_o^2$$

$$\boxed{(x^3)' = 3x^2}$$

Вывод

Нужны формулы:

- быстро,
- удобно.

$(kx + b)' = k$

$(x^2)' = 2x$

$(x^3)' = 3x^2$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$C' = 0$

Найди производную!

1. $(x^7)'$
2. $(5x^3)'$
3. $(-7x^9)'$
4. $(0{,}5x^{-3})'$
5. $(9x + 16)'$
6. $(7 - 4x)'$
7. $\left(\frac{1}{x}\right)'$
8. $\left(\sqrt{x}\right)'$

Проверь себя!

1. $7x^6$
2. $15x^2$
3. $-63x^8$
4. $-1{,}5x^{-4}$
5. 9
6. -4
7. $$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$
8. $$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$