

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\sin x \geq 0$$

$$\sin x \geq a$$

$$\frac{\pi a^3}{12} \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha - 1}$$

$$y = a$$

$$2\pi + \arcsin a$$

$$y = -a$$

$$\sin x < a$$

Понятие обратной функции.

Определение обратных тригонометрических функций.

Алгебра и начала анализа, 10 класс.

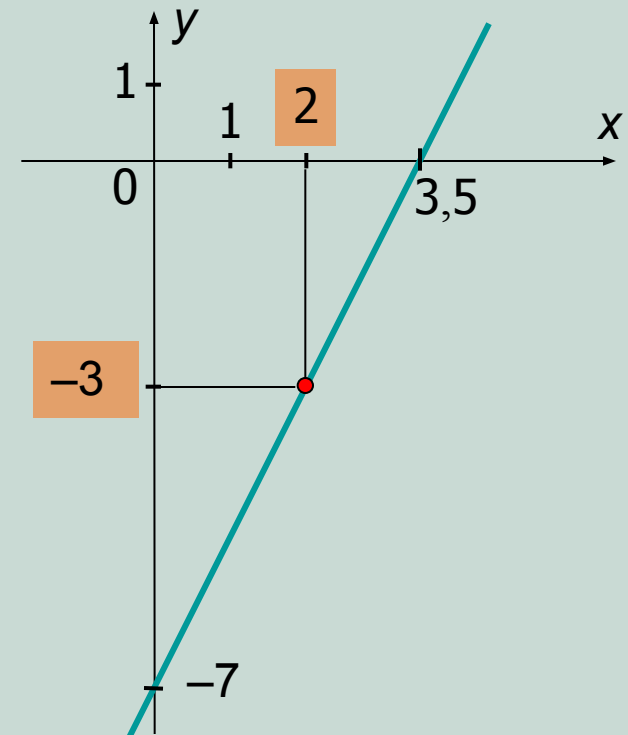
Касьянова Е.Н.

Рассмотрим пример какой-либо функции, заданной в явном виде формулой $y=f(x)$. Пусть, для определенности, это будет линейная функция $y=2x-7$. Вспомним, как выполняется такая задача: *найти значение функции по заданному значению аргумента*. Вспомнили?..

...Правильно: для этого надо данное значение аргумента подставить в формулу и произвести вычисления. Например, при $x=2$, значение функции равно $y=2 \cdot 2 - 7 = -3$.

Эту же задачу можно выполнить графическим способом. Для этого нужно:

- 1) построить график данной функции;
- 2) отметить на оси абсцисс значение 2;
- 3) получить на графике точку с отмеченной абсциссой 2;
- 4) найти ординату полученной в п.3 точки.



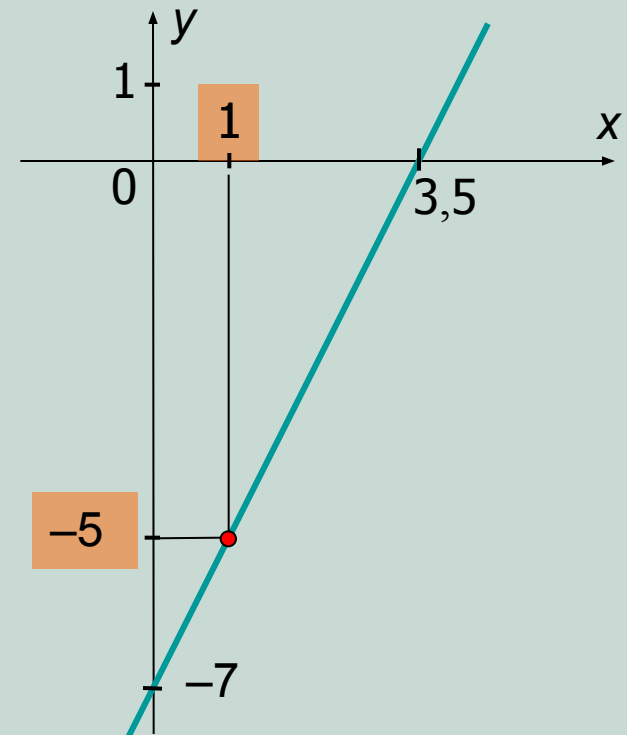
Для любой другой функции задача нахождения значения функции по заданному значению аргумента решается аналогично.

А теперь вспомним, как решается обратная задача по нахождению значения аргумента при заданном значении функции. В нашем примере с линейной функцией $y=2x-7$ это происходит по следующему алгоритму: в формулу, задающую данную функцию подставляют заданное значение функции и решают полученное уравнение с переменной x . Например, при $y=-5 \Rightarrow 2x-7=-5 \Rightarrow x=1$.

Эту же задачу можно выполнить графическим способом. Для этого нужно:

- 1) построить график данной функции;
- 2) отметить на оси ординат значение -5 ;
- 3) получить на графике точку с отмеченной ординатой -5 ;
- 4) найти абсциссу полученной в п.3 точки.

Для любой другой функции задача нахождения значения аргумента по заданному значению функции решается аналогично.



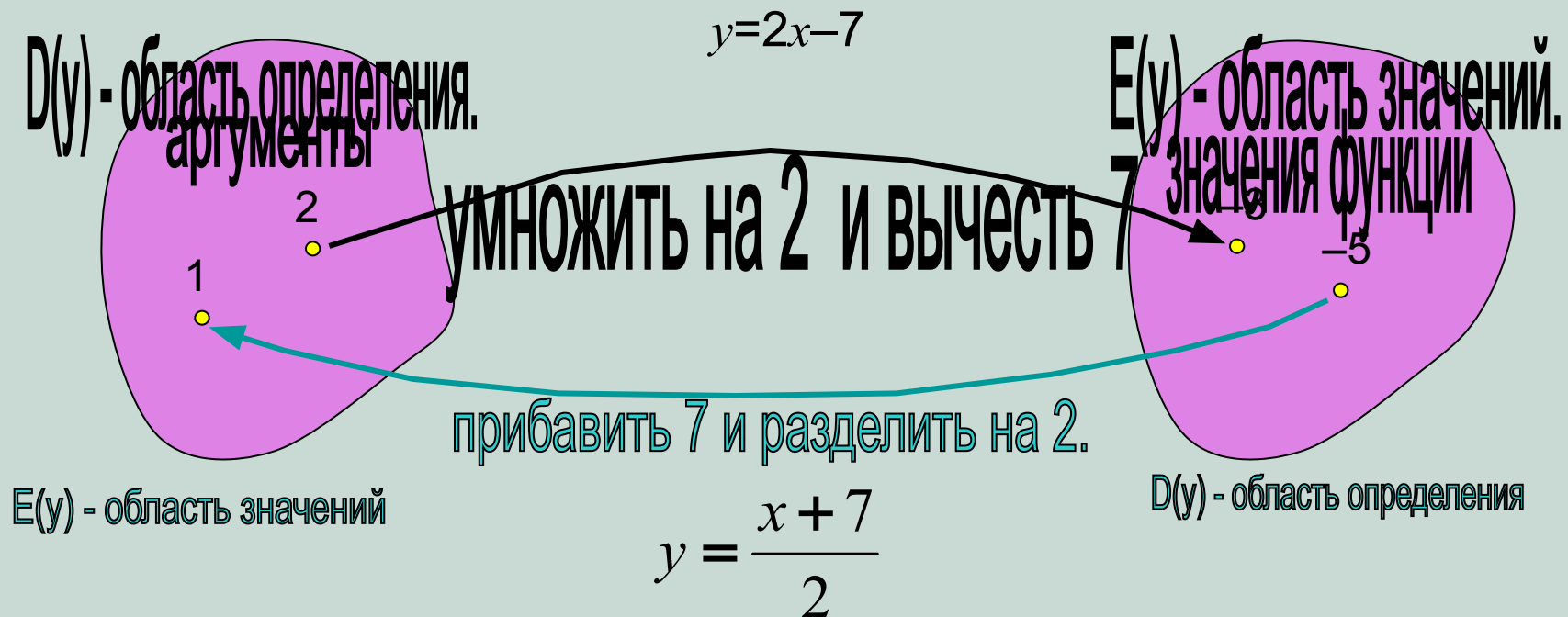
Однако, при решении **обратной** задачи можно поступить по-другому. Для этого составляют **обратную зависимость**, считая заданное значение данной функции аргументом этой зависимости. Сделать это можно двумя способами:

1) Выразить из формулы данной функции x через y . В нашем случае:

$y=2x-7 \Rightarrow 2x=y+7 \Rightarrow x=0,5y+3,5$. А теперь записать эту зависимость, как новую функцию, в привычном для нас виде: $y=0,5x+3,5$. Или

2) Поменять в формуле данной функции x и y . В нашем случае:

$y=2x-7 \Rightarrow x=2y-7$. А теперь записать эту зависимость, как новую функцию, в привычном для нас виде, выразив y через x : $2y=x+7 \Rightarrow y=0,5x+3,5$.



Таким образом, мы получили обратную для функции $y=2x-7$ зависимость, которая является в свою очередь также функцией $y=0,5x+3,5$. С помощью обратной функции мы можем решать обратную задачу по нахождению значения аргумента при заданном значении данной функции. Только для обратной функции это заданное значение функции является аргументом! Значит, для

$$y=x=-5 \Rightarrow y=0,5 \cdot (-5)+3,5=1.$$

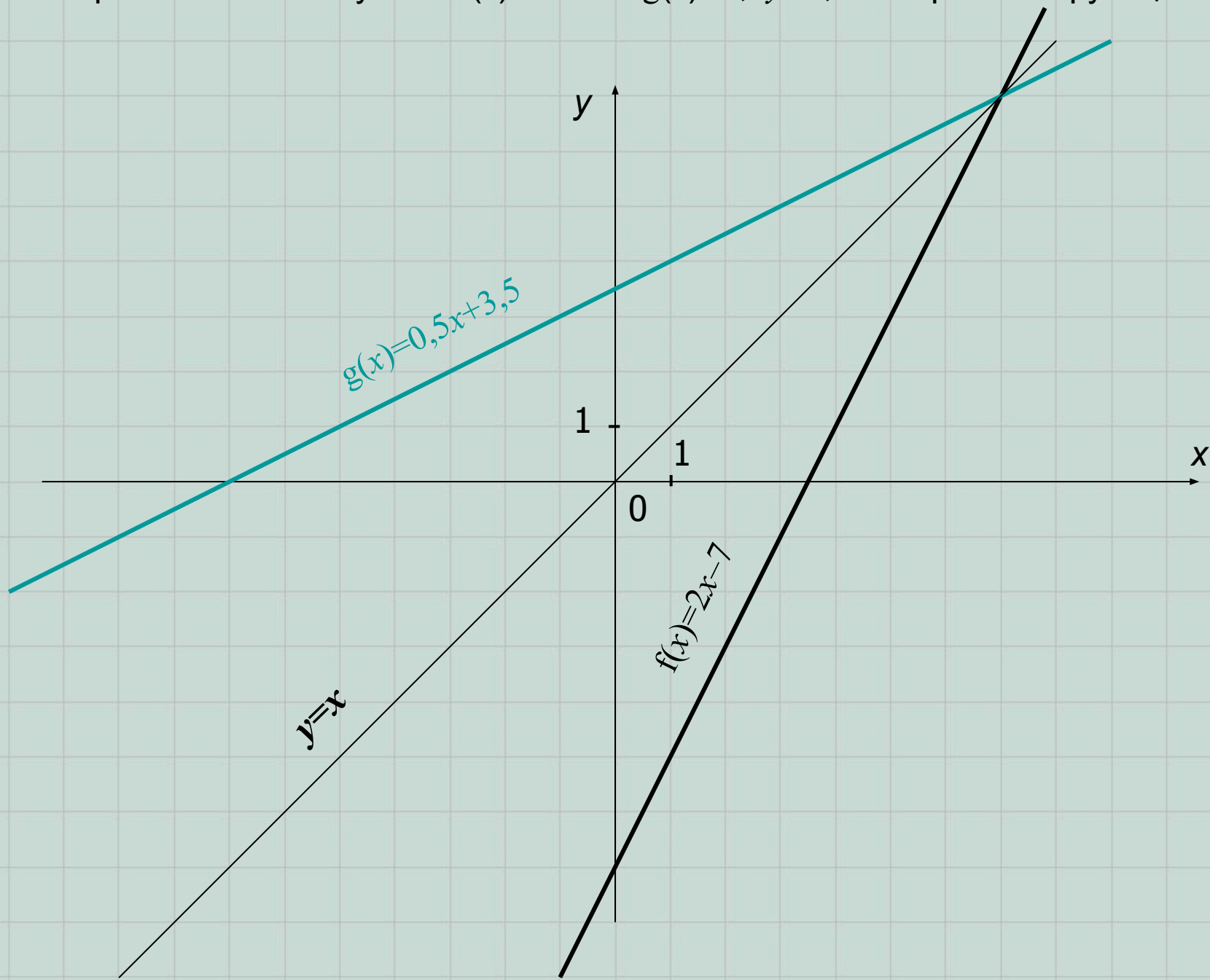
Примечание 1. Если для данной функции можно составить обратную зависимость, являющуюся также функцией, то говорят, что данная функция **обратима** и обратная зависимость является **обратной функцией**.

Примечание 2. Если функция $y=f(x)$ является обратимой и $y=g(x)$ – обратная для неё функция, то:

$$1) D(f)=E(g) \text{ и } E(f)=D(g); \quad 2) f(g(x))=g(f(x))=x.$$

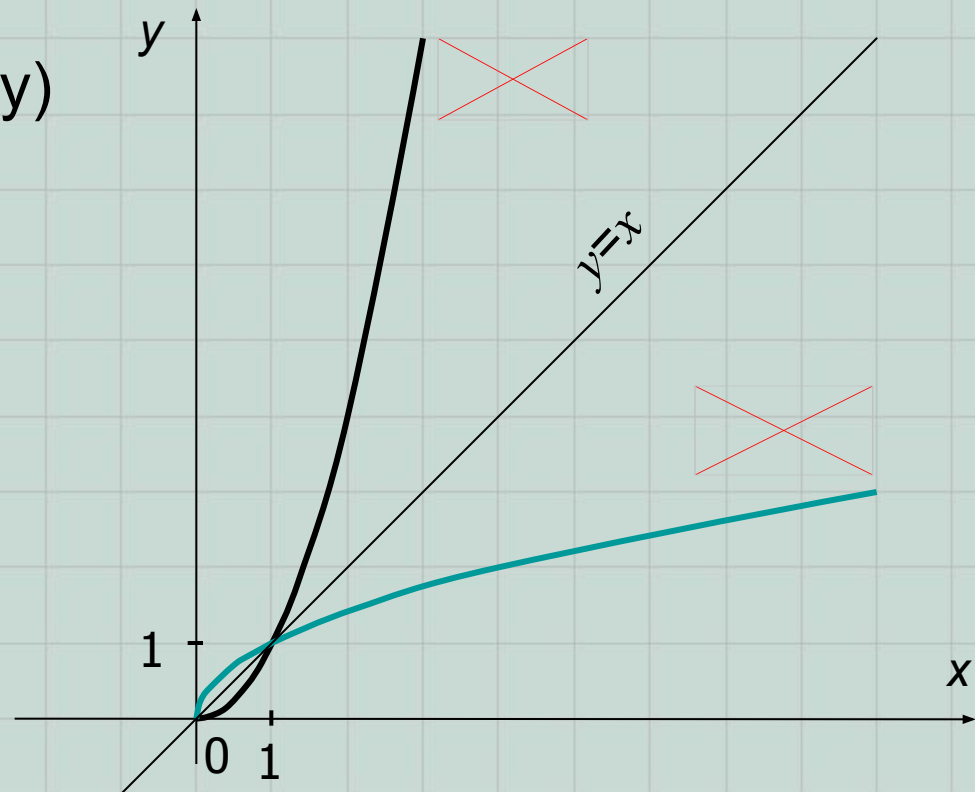
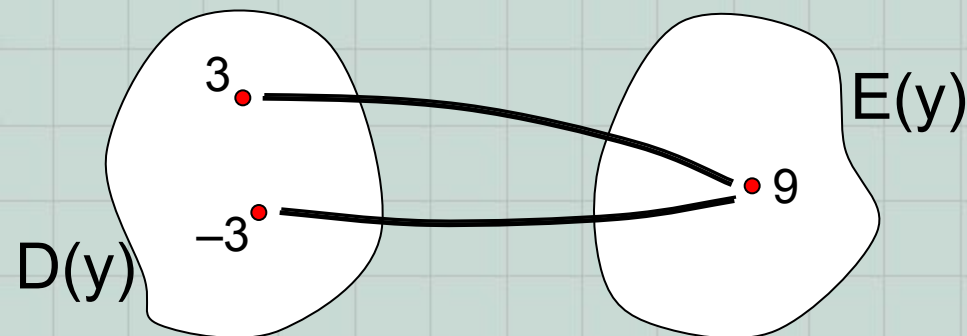
Примечание 3. Графики данной и обратной для неё функций симметричны относительно прямой $y=x$.

В рассмотренном нами случае: $f(x)=2x-7$ и $g(x)=0,5y+3,5$ – обратные функции.

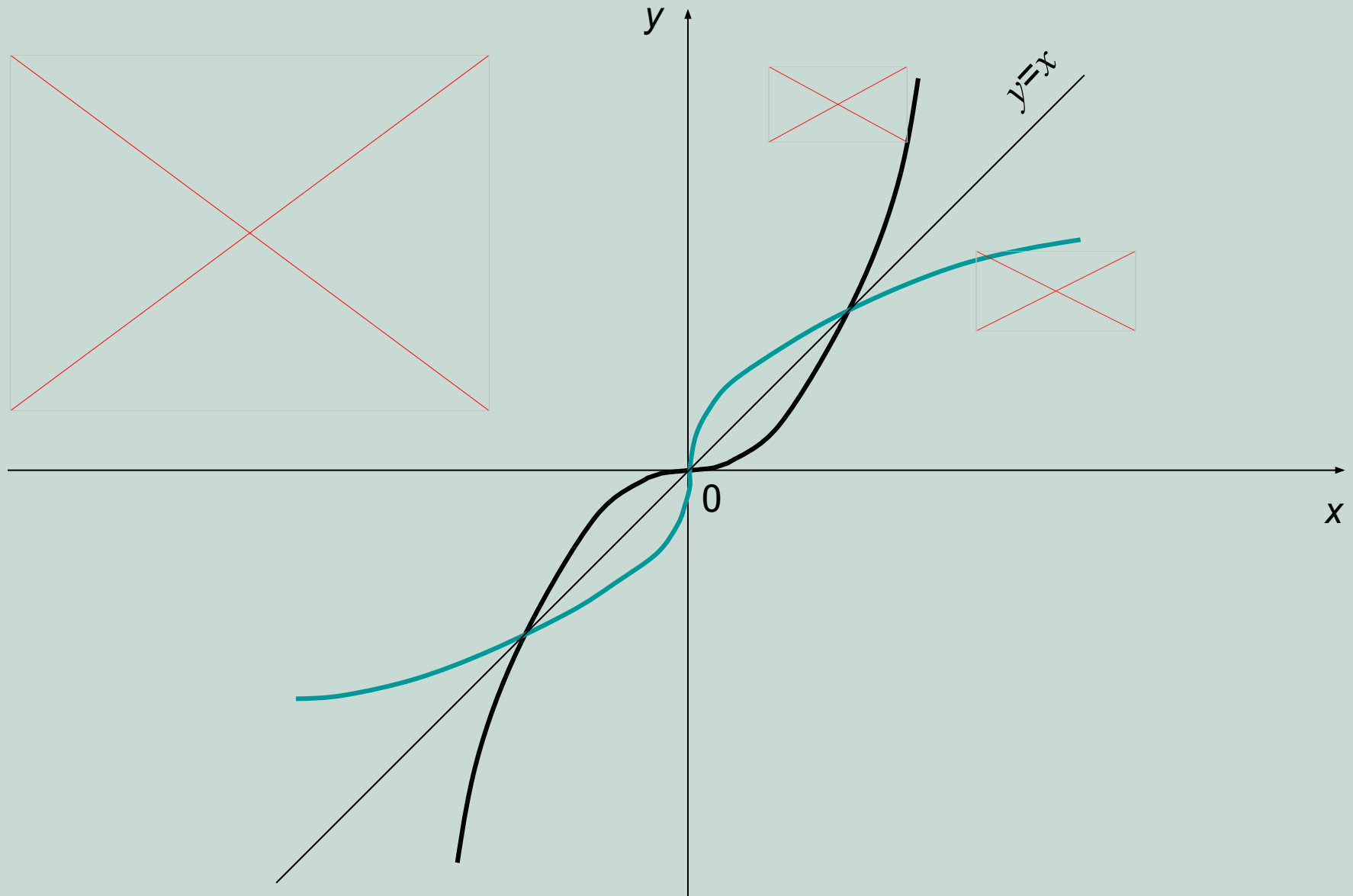


Чтобы обратная для данной функции зависимость была также функцией **необходимо и достаточно**, чтобы каждое свое значение функция принимала только при одном значении аргумента. Значит, чтобы функция была обратимой, данная функция должна быть **монотонно возрастающей** или **монотонно убывающей** на всей своей области определения.

Пример 1. Функция $y=x^2$ не является обратимой на $D(y)=\square$, т.к. при $x=3$ или -3 функция принимает одно и то же значение 9, а значит, обратная зависимость функцией не является. Однако, на области $x \in [0; +\square)$ данная функция обратима и обратной для неё является знакомая Вам функция ~~_____~~.



Пример 2. Любая степенная функция с нечетным натуральным показателем является обратимой (проверьте самостоятельно).



Рассмотрим теперь знакомую Вам тригонометрическую функцию $y = \sin x$. На всей области определения ($x \in \mathbb{R}$) она обратимой не является (самостоятельно объясните почему). Выберем ближайший к началу отсчета промежуток возрастания данной функции – отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. На данном промежутке функция обратима и обратной для неё является функция:

$$x = \sin y.$$

Теперь перед нами стоит задача выразить эту зависимость в привычном для нас виде, т.е. y через x . Это можно сделать с помощью нового для Вас понятия – $\arcsin x$, т.е.



Читают – «арксинус числа икс».

Определение. **Арксинусом** числа $x \in [-1; 1]$ называется $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (величина угла в радианной мере), синус которого равен x .

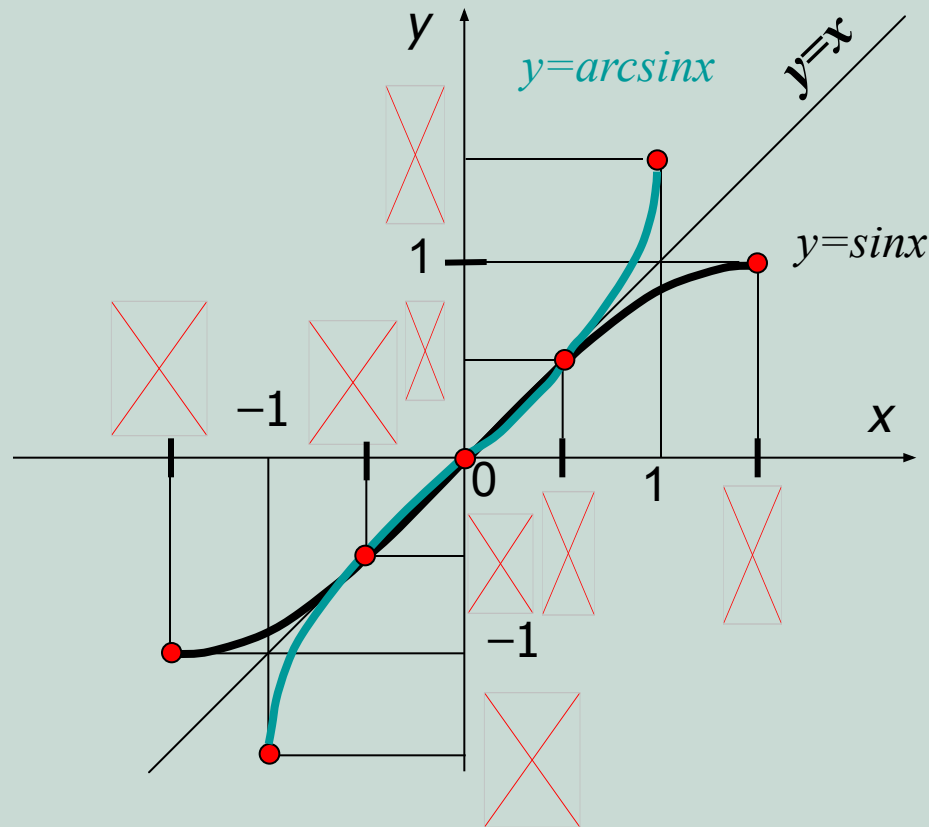
Пример 1. $\sin(0,5\pi) = 1 \Rightarrow \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Пример 2. $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$. Но записать тождественное равенство в виде $\arcsin \sin x = x$ нельзя,

т.к. $\arcsin \sin x \neq x$ для $x \notin [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Применив свойство $\sin x = \sin(\pi - x)$, получим:
А, значит,

А теперь ответьте на вопрос: синус какого угла равен 0,1?... Правильно: $\arcsin 0,1$.

Итак, если $D(\sin) = \boxed{\times}$ и $E(\sin) = [-1; 1]$, то $D(\arcsin) = [-1; 1]$ и $E(\arcsin) = \boxed{\times}$. К тому же, зная график функции $y = \sin x$ и свойство графиков взаимно обратных функций, нетрудно получить график функции $y = \arcsin x$.

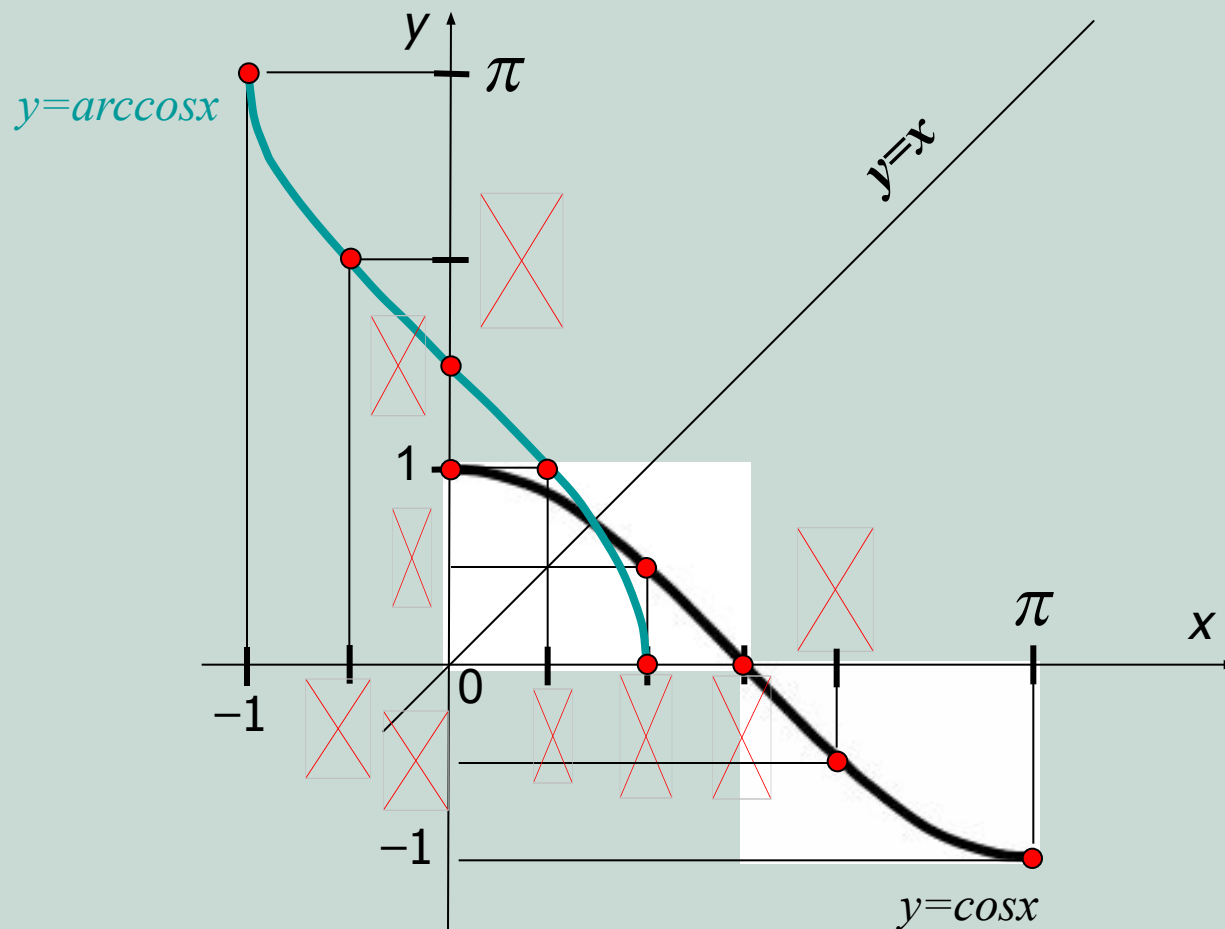


Из определения следует, что $\sin(\arcsin y) = y$ и $\arcsin(\sin x) = x$, при $y \in [-1; 1]$, $x \in \boxed{\times}$. Полезно вывести и запомнить также, что $\arcsin(-a) = -\arcsin(a)$.

Аналогично можно ввести понятие **арккосинуса** числа.

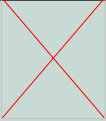
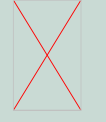
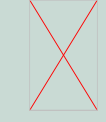
Определение. **Арккосинусом** числа $x \in [-1; 1]$ называется число $y \in [0; \pi]$ (величина угла в радианной мере), косинус которого равен x , т.е.

Примечание. Для значений функции арккосинус выбран отрезок $[0; \pi]$, т.к. это ближайший к началу отсчета промежуток убывания функции косинус.



Из определения следует, что $\cos(\arccos y) = y$ и $\arccos(\cos x) = x$, при $y \in [-1; 1]$, $x \in [0; \pi]$
 Полезно вывести и запомнить также, что $\arccos(-a) = \pi - \arccos(a)$.

Задание. Заполните предложенную таблицу:

a	1				0				-1
$\arccos a$	0								π

Задание. Подумайте как обосновать (самостоятельно 😊 или с помощью учителя) следующие тождества:

$$\sin(\arccos a) = \sqrt{1 - a^2};$$

$$\cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}; \quad \arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

Дадим теперь определение двум оставшимся обратным тригонометрическим функциям $y = \arctg x$ и $y = \text{arcctg} x$.

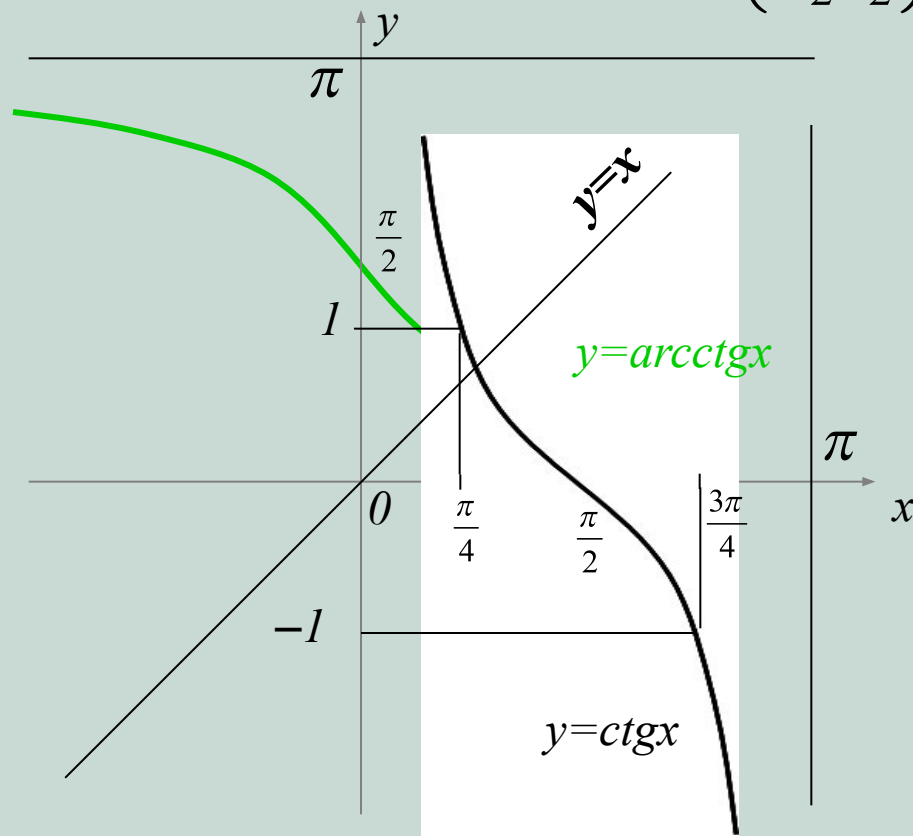
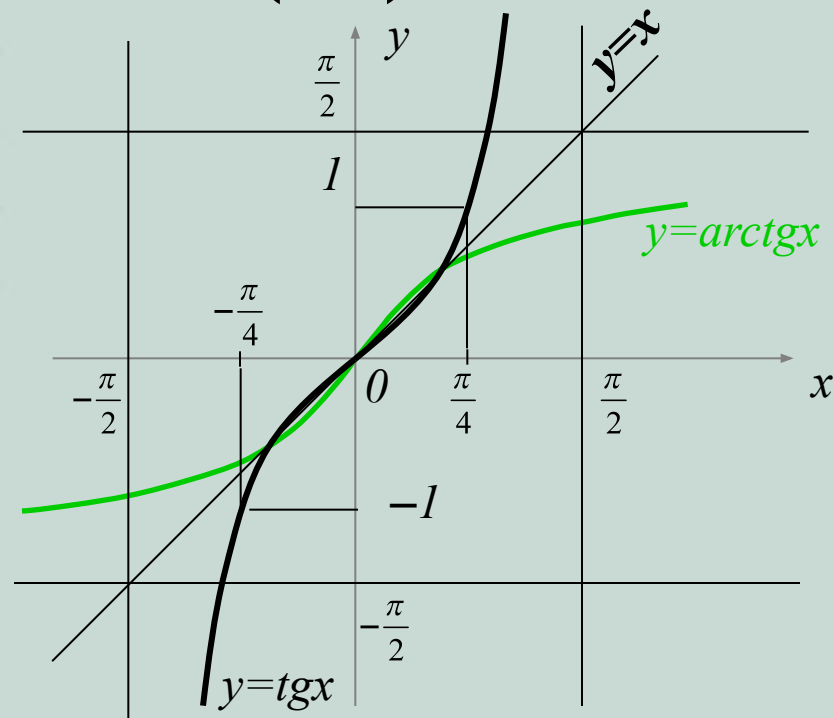
Определение. Арктангенсом числа $x \in \mathbb{R}$ называется число $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (величина угла в радианной мере), тангенс которого равен x , т.е.

$$x = \operatorname{tg} y \Leftrightarrow y = \operatorname{arctg} x.$$

Определение. Арккотангенсом числа $x \in \mathbb{R}$ называется число $y \in (0; \pi)$ (величина угла в радианной мере), котангенс которого равен x , т.е.

$$x = \operatorname{ctg} y \Leftrightarrow y = \operatorname{arcctg} x.$$

Обязательно разберитесь, почему $D(\operatorname{arctg}) = D(\operatorname{arcctg}) = \mathbb{R}$ и $E(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $E(\operatorname{arcctg}) = (0; \pi)$!



Тригонометрические функции связаны между собой различными тригонометрическими формулами (например, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Обратные тригонометрические функции также связаны друг с другом. Полезно вывести и помнить следующие тождества:

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{arcsin} a &= \arccos \sqrt{1-a^2} = \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}; \\ \operatorname{arc} \cos a &= \operatorname{arcsin} \sqrt{1-a^2} = \operatorname{arcctg} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}; \\ \operatorname{arctg} a &= \operatorname{arcctg} \frac{1}{a} = \operatorname{arcsin} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}; \end{aligned} \right\} \text{при } a > 0,$$

$$\operatorname{arcsin} a + \arccos a = \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a.$$

Понятие об обратных тригонометрических функциях позволяет нам решать *тригонометрические уравнения и неравенства*. Но это уже тема нового урока!