ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЛОГИСТИКЕ

- Матвейчук Наталья Михайловна, к.ф.-м.н., доцент кафедры ЭИ,
- ауд. 804-5(кафедра), 801а-5
- (44)700-91-83, (29)740-11-63
- matsveichuk@tut.by

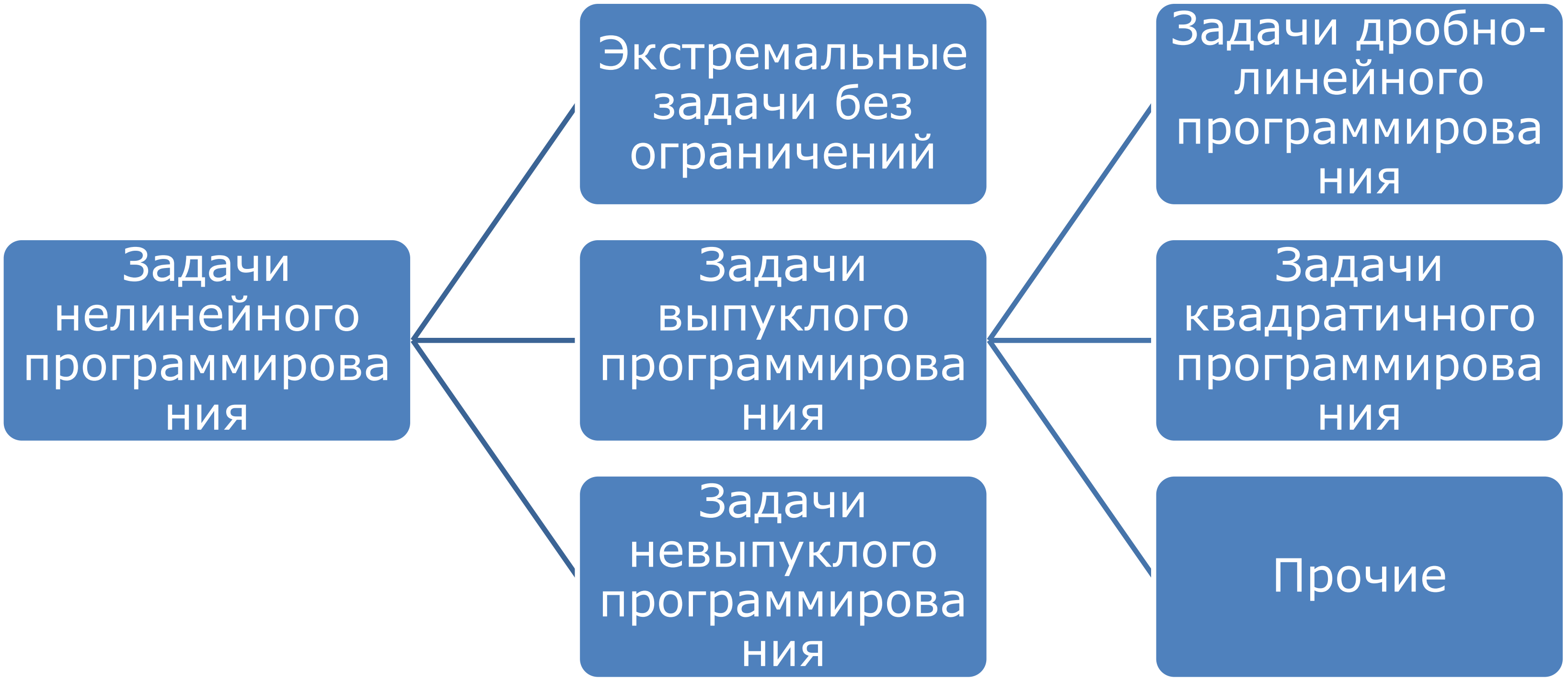
ТЕМЫ:

1. Задачи нелинейного и целочисленного линейного программирования
2. Модели управления запасами
3. Динамическое программирование
4. Оптимизационные задачи на графах
5. Марковские процессы
6. Системы массового обслуживания
7. Теория игр
8. Многокритериальная оптимизация

- **Теория игр**
- Джон Нэш – 1994 (экономика)
- Элвин Рот и Ллойд Шепли – 2012 (экономика)
- **Теория графов**
- Эдсгер Дейкстра – медаль Филдса – 1972
- Ричард М. Карп – медаль Филдса – 1985
- **СМО**
- Агнер К. Эрланг (1878-1929) его именем названа единица интенсивности нагрузки в телекоммуникационных системах (**эрланг**)
- **Динамическое программирование**
- Ричард Беллман - Премии Норберта Винера по прикладной математике (1970), Диксона (1970), фон Неймана (1976), Медаль почёта IEEE (1979)

ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Классификация задач нелинейного программирования



Экстремальная задача без ограничений: случай одной переменной

Постановка задачи: $y = f(x) \to \max (\min)$

Необходимое условие экстремума в точке x_0: $f'(x_0) = 0$ (x_0 – стационарная точка)

Достаточные условия экстремума в точке x_0 (функция $f(x)$ должна быть непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядка в этой точке):

- если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума,
- если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума,
- если $f''(x_0) = 0$, то в точке x_0 экстремума нет.

Повторение

Экстремальная задача без ограничений: случай двух переменных

Постановка задачи:

$$z = f(x, y) \to \max (\min)$$

Необходимое условие экстремума в точке (x_0, y_0):

((x_0, y_0) – стационарная точка)

Повторение

$$\frac{df(x_0, y_0)}{dx} = 0 \qquad \frac{df(x_0, y_0)}{dy} = 0$$

Функция $f(x, y)$ должна быть непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго порядка в этой точке

Экстремальная задача без ограничений: случай двух переменных

Повторение

Достаточные условия экстремума в точке (x_0, y_0):
обозначим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} = A \qquad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = B \qquad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = C$$

Вычислим $D = AC - B^2$:

- если $D > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет локальный максимум при $A<0$ и локальный минимум при $A>0$;
- если $D < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ экстремума не имеет;
- если $D = 0$, то требуются дополнительные исследования.

Экстремальная задача без ограничений:

общий случай

Постановка задачи:

$$y = f(X) = f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) \to \max(\min)$$

Необходимое условие экстремума в точке

$$X^0 = \left(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0\right)$$ (***X*⁰** – стационарная точка):

$$\nabla f\left(X^0\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(X^0\right),\quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(X^0\right)\right) = 0$$

Функция $\boldsymbol{f(x_1,\dots,x_n)}$ непрерывна и имеет в точке $\boldsymbol{X^0}$ частные производные, по крайней мере, второго порядка

Экстремальная задача без ограничений:
общий случай

Достаточные условия экстремума в точке X^0:

- Если матрица вторых частных производных функции $f(X)$ (матрица Гессе H) в стационарной точке X^0 положительно определена, то X^0 – точка локального минимума функции $f(X)$
- Если матрица вторых частных производных функции $f(X)$ (матрица Гессе H) в стационарной точке X^0 отрицательно определена, то X^0 – точка локального максимума функции $f(X)$

Матрица Гессе:

$$H(X)=\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)\right\}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$$

$$H=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & .... & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & ... & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ .... & ..... & .... & ..... \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & ..... & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{\left(x_1^0,\ldots x_n^0\right)}$$

- Матрица Гессе является матрицей квадратичной формы относительно приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.
- Матрица положительно (отрицательно) определена (полу), если все ее собственные значения положительны (отрицательны) (могут быть равны нулю).
- Если отрицательно (положительно) полуопределена, то точка нестрогого экстремума (и необходимые условия). Если отрицательно (положительно) определена – точка строгого экстремума (и достаточные условия).

Критерий Сильвестра

(устанавливает определенность квадратичной формы):

квадратичная форма **положительно определена** тогда и только тогда, когда все главные миноры ее матрицы **положительны**, и

отрицательно определена, тогда и только когда главные миноры **переменных знаков, начиная с «-».**

Порядок решения:

- найти частные производные первого порядка и приравнять к нулю;
- решить полученную систему, найти стационарные точки;
- в каждой стационарной точке определить матрицу Гессе;
- для каждой матрицы Гессе (для каждой стационарной точки) проверить критерий Сильвестра (установить определенность матрицы Гессе);
- применить достаточное условие экстремума в стационарной точке.

Пример. Квадратичная функция

$$\max f\left(X\right) = -8x_1^2 - 4x_1x_2 - 5x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -16x_1 - 4x_2 \qquad \nabla f\left(X\right) = \begin{bmatrix} -16x_1 - 4x_2 \\ -10x_2 - 4x_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -10x_2 - 4x_1 \qquad \nabla f\left(X\right) = 0$$

$$\begin{cases} -16x_1 - 4x_2 = 0 \\ -10x_2 - 4x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Пример. Квадратичная функция

$$\max f(X) = -8x_1^2 - 4x_1x_2 - 5x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1^2} = -16 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} = -4 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2^2} = -10$$

Матрица Гессе:

$$H(X) = \begin{bmatrix} -16 & -4 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = -16 < 0$$

$$\Delta = (-16)(-10) - (-4)(-4) = 160 - 16 = 144 > 0$$

Точка (0, 0) – точка максимума

Задача нелинейного программирования

Найти значения переменных $x_1, \ldots, x_n$, доставляющих максимум (минимум) целевой функции

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to \max(\min)$$

При этом переменные должны удовлетворять ограничениям (часто без условий неотрицательности):

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_1 \ldots 0; x_2 \ldots 0; \ldots; x_n \ldots 0$$

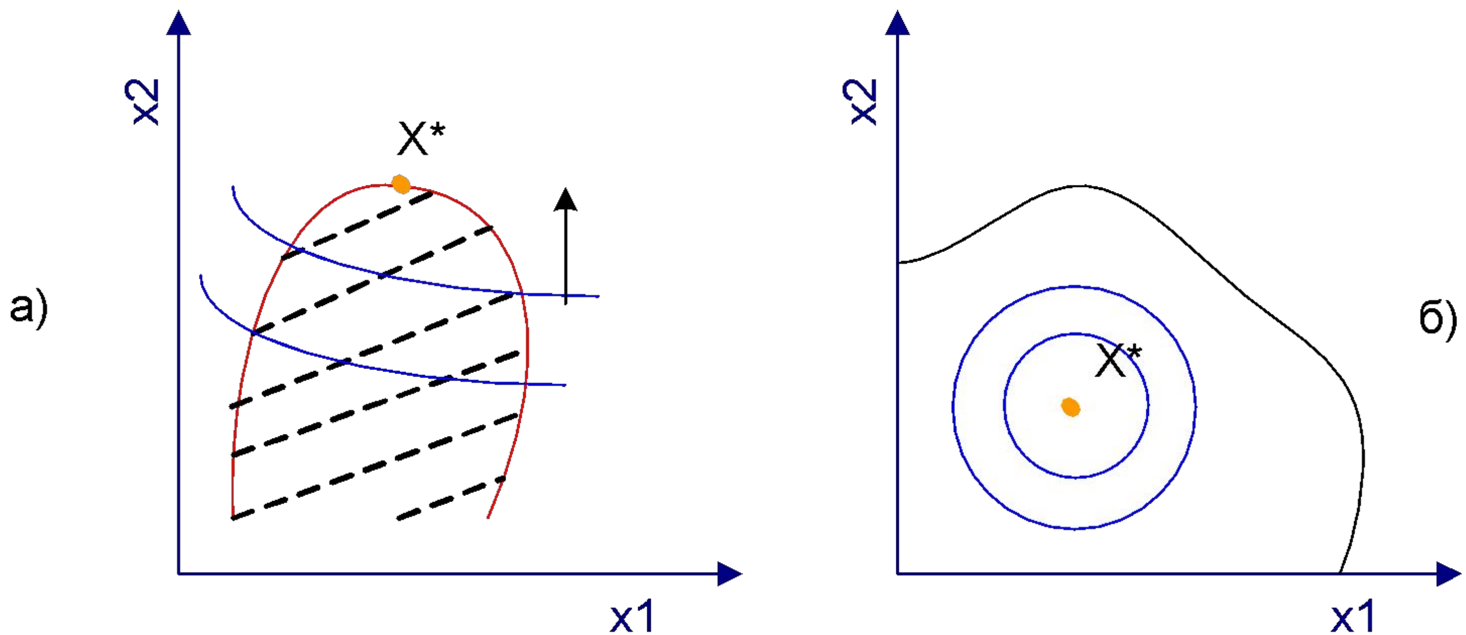
Хотя бы одна из функций f, g_i нелинейная.

Отличия от ЗЛП:

1. ОДЗ не обязательно выпуклая.
2. Экстремум не обязан находится на границе ОДЗ.

Геометрически задача НП состоит в отыскании точки или множества точек из допустимого множества, где достигается поверхность наибольшего (наименьшего) уровня.

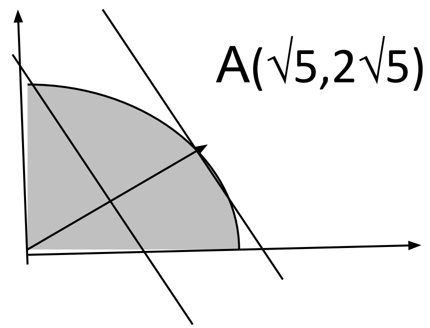
Решение (глобальный максимум или минимум) существует, если допустимое множество не пустое и ограниченное. Решение может принадлежать либо границе (а), либо внутренней части допустимого множества (б).



Пример:

- *Найти экстремумы функции* $L(x_1,x_2)=x_1+2x_2$ *при ограничениях* $x_1^2 + x_2^2 \le 25$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Максимум достигается в точке A касания окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$ и линии уровня $x_1 + 2x_2 = C$

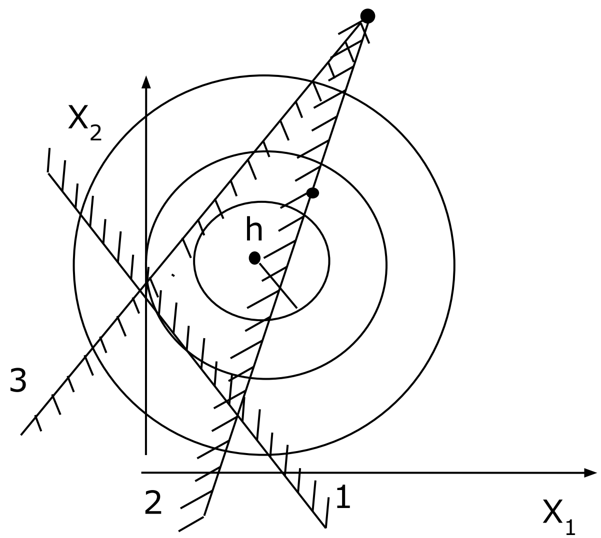


Пример:

$$F = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min, \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7 & (1) \\ 10x_1 - x_2 \leq 8 & (2) \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12 & (3) \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Минимум достигается в центре окружности:

$$x^*_1 = 1, x^*_2 = 4,$$

$$f(\min) = 0$$

Максимум достигается в точке пересечения ограничений 2 и 3:

$$\begin{cases} -18x_1 + 4(10x_1 - 8) = 12 \\ 10x_1 - 8 = x_2 \end{cases}$$

$$x^{**}_1 = 2, x^{**}_2 = 12,$$

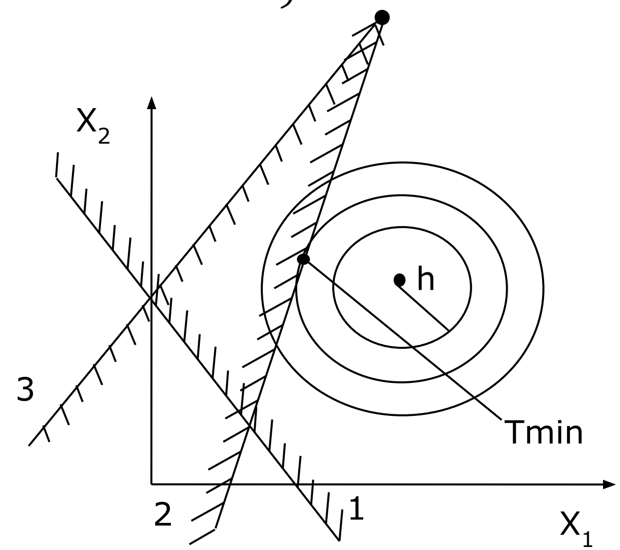
$$f(\max) = 65$$

Пример:

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min, \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 7 & (1) \\ 10x_1 - x_2 \le 8 & (2) \\ -18x_1 + 4x_2 \le 12 & (3) \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = h$$

$$2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4)x_2' = 0$$

$$x_2' = \frac{-2(x_1 - 3)}{2(x_2 - 4)} = \frac{x_1 - 3}{4 - x_2}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3 = 10(4 - x_2) \\ 10x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$$

$$x_1^* = \frac{123}{101}; x_2^* = \frac{422}{101}$$

$$f(\min) = \frac{324}{101}$$

$$\begin{cases} -18x_1 + 4(10x_1 - 8) = 12 \\ 10x_1 - 8 = x_2 \end{cases}$$

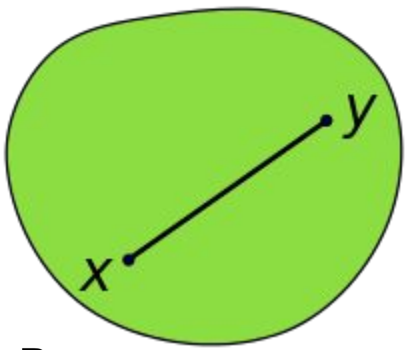
$$x^{**}{}_1 = 2, x^{**}{}_2 = 12,$$

$$f(\max) = 65$$

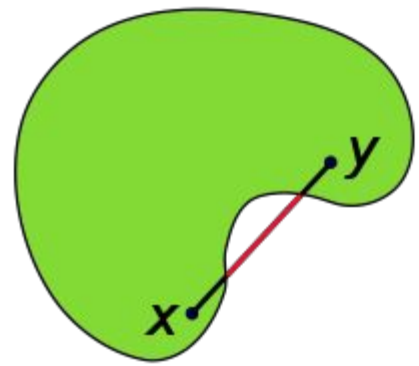
Задача нелинейного программирования

Общая задача НП очень сложна и до сих пор не имеет полного решения. Она становится легче, если ограничимся случаем, когда область ограничений выпукла, а целевая функция выпукла или вогнута.

Важно: выпуклость и вогнутость функции определяется только на выпуклом множестве ***M*** (ОДЗ)



Выпуклое множество



Невыпуклое множество

Выпуклое множество содержит отрезок, соединяющий две любые точки этого множества

Пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством

- Функция ***f*(*x*)** является <u>**выпуклой**</u>, если для любых $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ и положительных **α, β**, в сумме равных 1, имеет место

$$f(\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2)\ \ldots\ \alpha f(\mathbf{x}_1)+\beta f(\mathbf{x}_2).$$

  - Функция ***f*(*x*)** является <u>**строго выпуклой**</u>, если для любых $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ и положительных **α, β**, в сумме равных 1, при $\mathbf{x_1 \neq x_2}$ имеет место

$$f(\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2)>\alpha f(\mathbf{x}_1)+\beta f(\mathbf{x}_2).$$

- Функция ***f*(*x*)** является <u>**вогнутой**</u>, если для любых $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ и положительных **α, β**, в сумме равных 1, имеет место

$$f(\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2)\ „\ \alpha f(\mathbf{x}_1)+\beta f(\mathbf{x}_2).$$

- Функция ***f*(*x*)** является <u>**строго вогнутой**</u>, если для любых $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ и положительных **α, β**, в сумме равных 1, при $\mathbf{x_1 \neq x_2}$ имеет место

$$f(\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2)<\alpha f(\mathbf{x}_1)+\beta f(\mathbf{x}_2).$$

- Линейные функции одновременно являются и выпуклыми и вогнутыми, но не являются ни строго выпуклыми, ни строго вогнутыми

Повторение

ПРИЗНАК СТРОГОЙ ВЫПУКЛОСТИ

Дважды дифференцируемая функция $\boldsymbol{f(X) = f(x_1, \ldots, x_n)}$ является выпуклой в том и только том случае, когда

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j \geq 0$$

для любых $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{\Delta x_i}$, $\boldsymbol{\Delta x_j}$, не обращающихся в 0 одновременно.

То есть если в каждой точке ОДЗ второй дифференциал $\mathbf{d^2}\boldsymbol{f}\mathbf{(X)}$ есть положительно (полу)определенная квадратичная форма от дифференциалов независимых переменных, то $\boldsymbol{f}$ (не)строго выпукла.

Получаем, что для определения выпуклости (вогнутости) можно воспользоваться критерием Сильвестра.

Задача выпуклого программирования

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to \min$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \quad i = \overline{1, m}$$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – **выпуклая** на М

$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - **выпуклые** на выпуклом множестве М

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to \max$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \quad i = \overline{1, m}$$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – **вогнутая** на М

$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - **выпуклые** на выпуклом множестве М

Задача ЛП является частным случаем задачи выпуклого программирования

Свойства выпуклых функций:

1) Если $f(X)$ – выпукла, то функция $-f(X)$ – вогнута.
2) Линии уровня выпуклой или вогнутой функции выпуклы.
3) Если функции $f_i(X)$ –выпуклы, $i = 1, \ldots, m$, то при любых действительных числах $\alpha_i \geq 0$ функция $\Sigma\alpha_i f_i(X)$ также является выпуклой.
4) Если $f(X)$ –выпукла, то для любого числа α область решений неравенства $f(X) < \alpha$ является либо выпуклым множеством, либо пустым.
5) Если $g_i(X)$ –выпуклые при всех неотрицательных значениях переменных, то область решений системы неравенств $g_i(X) \leq b_i$, $i = 1, \ldots, m$, является либо выпуклым множеством либо пустым.
6) Выпуклая (вогнутая) функция, определённая на выпуклом множестве, непрерывна в каждой внутренней точке этого множества.

Теорема Вейерштрасса:

если функция f непрерывна на компакте (ограниченном и замкнутом множестве), то она достигает минимума и максимума на внутренней (стационарной) или граничной точке множества.

(Любой локальный экстремум выпуклой функции является глобальным)

Множество точек, на котором достигается глобальный максимум, выпукло.

- Если целевая функция ***f*** является **строго** выпуклой (**строго** вогнутой) и если область решений системы ограничений не пуста и ограничена, то задача ВП всегда имеет единственное решение,
- потому что
- Всякая дифференцируемая строго выпуклая (вогнутая) функция имеет не более одной стационарной точки, которая является точкой локального и глобального минимума (максимума).

Свойства строго выпуклых функций:

- строго выпуклая функция ***f*** имеет не больше одного локального минимума на *M* и ни одного локального максимума. Глобальный максимум – на границе (если *M* – выпуклый компакт).

- если ***f*** дифференцируема, строго выпукла на выпуклой области *M* и имеет стационарную точку $\boldsymbol{x}^0$ в *M*, то $\boldsymbol{x}^0$ является точкой глобального минимума, притом единственной.

Решение любой задачи математического программирования (в том числе нелинейного) можно свести к решению задачи нелинейного программирования без ограничений.

Для этого необходимо на основе исходной ЗМП построить ***функцию Лагранжа***.

Два случая:

- задача содержит только ограничения-равенства;
- задача содержит ограничения-неравенства.

Задача нелинейного программирования с ***ограничениями-равенствами***:

$$f(x_1,\ldots,x_n) \to \max$$

$$g_i(x_1,\ldots,x_n) = b_i \quad (i = \overline{1,m}) \quad (m < n)$$

Метод неопределенных множителей Лагранжа

Введем вектор-строку из *m* новых переменных $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$- **множители Лагранжа**

Составим **функцию Лагранжа**:

$$L = f(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1,\ldots,x_n)]$$

Принцип Лагранжа

(необходимое условие экстремума)

Если $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ - точка экстремума функции $f(x_1, \ldots x_n)$

причем все g_i непрерывно дифференцируемы в окрестности этой точки, и векторы $\dfrac{\partial g_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_j}$

(частные!!!) линейно независимы, тогда существуют такие множители Лагранжа, <u>не равные одновременно нулю</u> $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$

что $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ - стационарная точка функции Лагранжа $L(x_1, .., x_n, \lambda_1, .., \lambda_m)$

Условие линейной независимости выполняется, если ОДЗ регулярно по Слейтеру (имеет хотя бы одну внутреннюю точку)

Применим необходимое условие экстремума функции $L(x_1,..,x_n,\lambda_1,..,\lambda_m)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}=0 \\ \quad\ldots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}=0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_m}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j}-\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial g_i(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j}=0 \quad (j=\overline{1,n}) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}=b_i-g_i(x_1,\ldots,x_n)=0 \quad (i=\overline{1,m}) \end{cases}$$

Решив полученную систему уравнений, найдем вектор $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$

Из стационарных точек, взятых без координат $\boldsymbol{\lambda_1, \dots, \lambda_m}$, выберем точки, в которых функция ***f*(*x*)** имеет условные локальные экстремумы. Этот выбор осуществляется, с применением достаточных условий локального экстремума.

Если функция ***f*(*x*)** является строго выпуклой (вогнутой), то она имеет (всегда!) единственный локальный экстремум – **достаточное условие экстремума**. Тогда если получена единственная стационарная точка функции Лагранжа, то это точка экстремума.

Считаем, что функции $f(x_1,\dots,x_n)$ и $g_i(x_1,\dots,x_n)$ непрерывны и имеют частные производные, по крайней мере, второго порядка.

Задача

По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Они могут быть изготовлены двумя способами.

При производстве x_1 штук первым способом затраты на них $4x_1 + x_1^2$ рублей

При производстве x_2 штук вторым способом затраты на них $8x_2 + x_2^2$ рублей.

Определить: сколько изделий каждым способом нужно изготовить, чтобы затраты на производство были минимальными.

$$F = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 = 180$$

$$L = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

$x_1^* = 91, \quad x_2^* = 89 \qquad F = 17278$ – затраты.

Интерпретация множителей Лагранжа

Помимо того, что метод Лагранжа дает решение задачи на максимум, он позволяет также проанализировать, насколько оптимальное решение целевой функции чувствительно к изменению констант ограничений *b:*

Действительно, пусть b_i – переменные и величины x_j и λ_i будут функциями от них. Тогда $L(b) = f(x(b)) + \lambda(b)(b - g(x(b)))$

есть тоже функция от *b*. Дифференцирование по *b* дает:

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + (b - g(x))^T \frac{\partial \lambda^T}{\partial b} + \lambda = \frac{\partial x}{\partial b}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\right) - (b - g(x))^T \frac{\partial \lambda^T}{\partial b} + \lambda$$

Из-за условий первого порядка первые два члена этого выражения равны 0. Значение функции Лагранжа в точке $(\tilde{o}_1^0, \tilde{o}_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, ..., \lambda_m^0)$ *суть оптимальное значение целевой функции.*

Следовательно,

$$\frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial b} = \frac{\partial f^0}{\partial b} = \lambda^0$$

Экономическая интерпретация множителей Лагранжа, соответствующих оптимальному решению, аналогична интерпретации двойственных оценок ограничений ЗЛП

– Они показывают величину изменения целевой функции в расчёте на единицу изменения свободного члена ограничения, которому соответствует множитель Лагранжа, в очень малой окрестности оптимума
  - Если ограничение можно рассматривать в качестве баланса ресурса и максимизируется прибыль, то множитель Лагранжа в точке оптимума равен оптимальной цене
    – Если найдётся рынок, где ресурс дешевле, то его покупка увеличит прибыль
    – Если найдётся рынок, где ресурс дороже, то для увеличения прибыли его следует продать
– В отличие от случая ЗЛП, множители Лагранжа (кроме частных случаев) не обладают свойством устойчивости
  - Они меняют свои значения даже при сколь угодно малом изменении свободных членов ограничений

Задача нелинейного программирования с ***ограничениями-неравенствами***:

$$f(x_1,\dots,x_n)\to\max$$

$$g_i(x_1,\dots,x_n)\le b_i \quad (i=\overline{1,m}) \quad (m<n)$$

Чтобы применить метод неопределенных множителей Лагранжа, ограничения-неравенства преобразуем к виду равенств путем введения дополнительных неотрицательных переменных *s*=(*s*$_1$,…,*s*$_m$) и запишем ограничения в виде

$$g_i(x_1,\dots,x_n)+s_i^2=b_i \quad (i=\overline{1,m})$$

Введем вектор **множителей Лагранжа** $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$

Составим **функцию Лагранжа**:

$$L(x,\lambda,s)=f(x_1,\dots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[b_i-g_i(x_1,\dots,x_n)-s_i^2]$$

Необходимым условием оптимальности является неотрицательность вектора $(\lambda_1^0,...,\lambda_m^0)$

Действительно, как было показано,

$$\frac{\partial f^0}{\partial b} = \lambda^0$$

Но при увеличении *b* допустимое множество расширяется, и, следовательно, максимум целевой функции не может уменьшиться . Поэтому $\lambda^0 \geq 0$.

Аналогично в задаче минимизации $\lambda^0 \leq 0$.

Если же ограничения заданы в виде равенств, то на знак λ^0 никаких условий не накладывается.

Применим необходимое условие экстремума функции $L(x_1,..,x_n,\lambda_1,..,\lambda_m,s_1,..,s_m)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_j}-\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial g_i(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_j}=0 \quad (j=\overline{1,n}) \\ \dfrac{\partial L}{\partial s_i}=-2\lambda_i s_i=0 \quad (i=\overline{1,m}) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}=b_i-g_i(x_1,\dots,x_n)-s_i^2=0 \quad (i=\overline{1,m}) \end{cases}$$

Из двух последних выражений имеем

1. Если $\lambda_i>0$, то $s_i=0$ и $b_i-g_i(x_1,\dots,x_n)=0$.
2. Если $b_i-g_i(x_1,\dots,x_n)>0$, то $s_i>0$ и $\lambda_i=0$.

Следовательно, можем записать

$$\lambda_i(b_i-g_i(x_1,\dots,x_n))=0 \quad (i=\overline{1,m})$$

С учетом неотрицательности вектора $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$

и условия $g_i(x_1, \dots, x_n) \le b_i \quad (i = \overline{1, m})$

Получаем условие дополняющей нежесткости

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

Условия Куна-Таккера
(необходимые условия экстремума в задаче с ограничениями-неравенствами):

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_j} = 0 \quad (j=\overline{1,n}) \\
\lambda_i(b_i - g_i(x_1,\dots,x_n)) = 0 \quad (i=\overline{1,m}) \\
g_i(x_1,\dots,x_n) \le b_i \quad (i=\overline{1,m}) \\
\lambda_i \ge 0 \quad (i=\overline{1,m})
\end{cases}
$$

Задача нелинейного программирования с ***ограничениями-неравенствами и ограничениями на знак переменных***:

$$f(x_1,\dots,x_n)\to\max$$

$$g_i(x_1,\dots,x_n)\le b_i \quad (i=\overline{1,m}) \quad (m<n)$$

$$x_j\ge 0 \quad (j=\overline{1,n})$$

Перепишем задачу в виде

$$f(x_1,\dots,x_n)\to\max$$

$$g_i(x_1,\dots,x_n)\le b_i \quad (i=\overline{1,m})$$

$$-x_j\le 0 \quad (j=\overline{1,n})$$

Аналогично предыдущему ограничения-неравенства преобразуем к виду равенств путем введения дополнительных неотрицательных переменных $s=(s_1,\dots,s_m)$ и $t=(t_1,\dots,t_n)$.

Перепишем задачу в виде

$$f(x_1,\ldots,x_n)\to\max$$

$$g_i(x_1,\ldots,x_n)+s_i^2=b_i \quad (i=\overline{1,m}) \quad (m<n)$$

$$-x_j+t_j^2=0 \quad (j=\overline{1,n})$$

Введем **множители Лагранжа** $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ и $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$

Составим **функцию Лагранжа**:

$$L(x,s,t,\lambda,\mu)=f(x_1,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[b_i-g_i(x_1,\ldots,x_n)-s_i^2]+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\mu_j[x_j-t_j^2]$$

Запишем условия Куна-Таккера:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j} + \mu_j = 0 \quad (j=\overline{1,n}) \\ \lambda_i(b_i - g_i(x_1,\ldots,x_n)) = 0 \quad (i=\overline{1,m}) \\ g_i(x_1,\ldots,x_n) \le b_i \quad (i=\overline{1,m}) \\ \lambda_i \ge 0 \quad (i=\overline{1,m}) \\ \mu_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}) \\ x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}) \\ \mu_j x_j = 0 \quad (j=\overline{1,n}) \end{cases}$$

- Исключив из этих уравнений μ, получим

Условия Куна-Таккера:

- Условия первого порядка:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} \le 0 \quad (j = \overline{1,n}) \qquad g_i(X) \le b_i \quad (i = \overline{1,m})$$

- Условия **дополняющей нежесткости**:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} \right) x_j = 0 \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(X)) = 0$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}) \qquad \lambda_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,m})$$

В случае задачи минимизации знаки неравенств в первой и последнем из этих условий заменяются на противоположные

Точка, удовлетворяющая условиям Куна-Таккера – **точка Куна-Таккера**

Теорема Куна-Таккера

любой из существующих оптимумов функции ***f*** соответствует *точке Куна-Таккера* функции Лагранжа

Если функция ***f*** строго выпукла, точек Куна-Таккера не более одной.

Тогда если точка Куна-Таккера имеется, то в ней находится оптимум (условия Куна-Таккера являются <u>необходимыми и достаточными</u>).

Для невыпуклой задачи условия Куна-Таккера могут не иметь решения

Достаточность условий Куна-Таккера:

- Проверить матрицу Гессе:
- Если положительно определённая в стационарной точке, то – минимум. Если отрицательно определённая в стационарной точке, то – максимум.

По теореме Куна-Таккера, решение задачи выпуклого программирования находится среди седловых точек функции Лагранжа целевой функции.
По дифференциальному варианту теоремы Куна-Таккера, в седловой точке выполняются условия Куна-Таккера.