# Логика предикатов

Определение. *Предикатом* называется утверждение, содержащее переменные $x_1,\ldots,x_n$, которое превращается в высказывание при замене этих переменных конкретными объектами из некоторой области возможных значений.

Обозначаются предикаты $P,Q,\ldots$

Переменные $x_1,\ldots,x_n$, называются *предметными* или *индивидуальными переменными*. Число предметных переменных в предикате называется его *арностью* или *местностью*.

Более точно, предикат $P$ с $n$ предметными переменными называется *n-арным* или *n-местным предикатом* и обозначается $P(x_1,\ldots,x_n)$.

Предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ является функцией, которая каждому набору значений $x_1 = a_1,\ldots,x_n = a_n$ его *n* предметных переменных $x_1,\ldots,x_n$ ставит в соответствие некоторое высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$, имеющее определенное истинностное значение $\lambda(P(a_1,\ldots,a_n))$.

Если отвлечься от содержания высказываний и учитывать только их истинностные значения, то предикат можно рассматривать как *истинностную функцию* на множестве $M^n$ с значениями в множестве $\{0,1\}$.

Функция $P: M^n \to \{0,1\}$ определяется двумя множествами:

$$P^+ = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n : \lambda(P(a_1, \dots, a_n)) = 1\}$$ –

*множество истинности*,

$$P^- = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n : \lambda(P(a_1, \dots, a_n)) = 0\}$$ –

*множество ложности*.

<u>Определение</u>. Предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ *на множестве* $M$ называется:

- *тождественно истинным*, если для любых значений $x_1 = a_1 \in M,\ldots,x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$ истинно, т.е. $P^+=M^n$;
- *тождественно ложным*, если для любых значений $x_1 = a_1 \in M,\ldots,x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$ ложно, т.е. $P^+ = \varnothing$;
- *выполнимым*, если для некоторых значений $x_1 = a_1 \in M,\ldots,x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$ истинно, т.е. $P^+ \neq \varnothing$;
- *опровержимым*, если для некоторых значений $x_1 = a_1 \in M,\ldots,x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$ ложно, т.е. $P^+ \neq M^n$.

Определение. Пусть предикаты одинаковой арности $P(x_1,\ldots,x_n)$ и $Q(x_1,\ldots,x_n)$ рассматриваются на множестве $M$. Тогда предикаты $P$ и $Q$ называются *эквивалентными*, если $P^+ = Q^+$, т.е. при любых значениях $x_1 = a_1 \in M,\ldots,x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$ истинно в том и только том случае, если истинно высказывание $Q(a_1,\ldots,a_n)$.

# Алгебра предикатов

Определение.

Результатом действия квантора общности $(\forall x_1)$ по переменной $x_1$ на $n$-местный предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ называется $(n-1)$-местный предикат $(\forall x_1)P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, который зависит от переменных $x_2,\ldots,x_n$ и который при значениях $x_2=a_2,\ldots,x_n=a_n$ в том и только том случае истинен на множестве $M$ допустимых значений переменной $x_1$, если при любых значениях $x_1=a_1\in M$ высказывание $P(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ истинно.

Определение.

Результатом действия квантора существования $(\exists x_1)$ по переменной $x_1$ на $n$-местный предикат $P(x_1,\dots,x_n)$ называется ($n$–1)-местный предикат $(\exists x_1)P(x_1,x_2,\dots,x_n)$, который зависит от переменных $x_2,\dots,x_n$ и который при значениях $x_2=a_2,\dots,x_n=a_n$ в том и только том случае истинен на множестве $M$ допустимых значений переменной $x_1$, если при некотором значении $x_1=a_1\in M$ высказывание $P(a_1,a_2,\dots,a_n)$ истинно.

*Квантор существования и единственности* $(\exists! x)$ определяется как сокращение записи следующей формулы

$$(\exists x)(P(x) \wedge ((\forall y)(P(y) \Rightarrow x = y))).$$

Результат действия такого квантора на предикат $P(x)$ обозначается $(\exists! x)P(x)$ и читается «существует и единственен $x$, для которого выполняется $P(x)$»).

*Ограниченный квантор существования* $(\exists Q(x))$ определяется как сокращение записи следующей формулы

$$(\exists x)(Q(x) \wedge P(x)).$$

Результат действия такого квантора на предикат $P(x)$ обозначается $(\exists Q(x))P(x)$ и и читается «существует $x$, удовлетворяющий $Q(x)$, для которого выполняется $P(x)$».

*Ограниченный квантор общности* $(\forall Q(x))$ определяется как сокращение записи следующей формулы

$$(\forall x)(Q(x) \Rightarrow P(x)).$$

Результат действия такого квантора на предикат $P(x)$ обозначается $(\forall Q(x))P(x)$ и читается «для всех $x$, удовлетворяющих $Q(x)$, выполняется $P(x)$».

Определение.

*Алгеброй предикатов* называется множество всех предикатов ***P*** с логическими операциями $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ и операциями квантификации $(\forall x), (\exists x)$ для всех предметных переменных $x$.

# Формулы алгебры предикатов

Свойства алгебры предикатов ***P*** описываются с помощью специальных формул, которые строятся из символов предикатов и предметных переменных с помощью специальных вспомогательных символов – скобок и знаков логических операций над предикатами.

*Алфавит* алгебры предикатов состоит из следующих символов:

1) *предметные переменные* $x_1, x_2, \ldots$, которые используются для обозначения элементов множества допустимых значений,

2) *n*-местные *предикатные символы* $P, Q, \ldots$, которые используются для обозначения *n*-местных предикатов на множестве допустимых значений,

3) символы логических операций $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$,

4) вспомогательные символы (,) и другие.

*Формулы* алгебры предикатов определяются по индукции следующим образом:

1) для любого $n$-местного предикатного символа $P$ и любых $n$ предметных переменных $x_1,\dots,x_n$ выражение $P(x_1,\dots,x_n)$ есть формула, которая называется *элементарной* (или *атомарной*) *формулой*;
2) если $\Phi,\Psi$ – формулы, то формулами являются также выражения
$$(\neg\Phi),\ (\Phi\wedge\Psi),\ (\Phi\vee\Psi),\ (\Phi\Rightarrow\Psi),\ (\Phi\Leftrightarrow\Psi);$$
3) если $\Phi$ – формула и $x$ – предметная переменная, то формулами являются также выражения $(\forall x)\Phi$, $(\exists x)\Phi$; при этом переменная $x$ и формула $\Phi$ называется *областью действия* соответствующего *квантора*.

Если в формулу Ф входят переменные $x_1,\dots,x_n$, то записывают $\Phi = \Phi(x_1,\dots,x_n)$.

Вхождение предметной переменной $x$ в формулу Ф называется *связным*, если она находится в области действия одного из этих кванторов; в противном случае вхождение предметной переменной $x$ в формулу Ф называется *свободным*.

Формула без свободных вхождений переменных называется *замкнутой формулой* или *предложением*.