ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Я бы почувствовал настоящее удовлетворение лишь в том случае, если бы смог передать ученику гибкость ума, которая дала бы ему в дальнейшем возможность самостоятельно решать задачи.

У.У. Сойер.

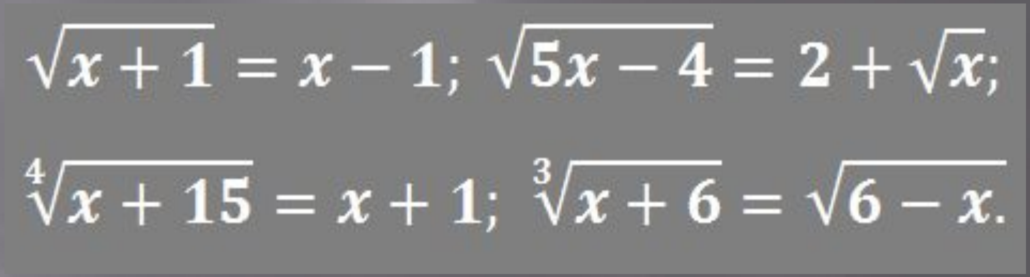
План

1) Понятие иррациональных уравнений.
2) Методы решения иррациональных уравнений.
3) Решение иррациональных уравнений.

Определение

- Иррациональным уравнением называют уравнение, в котором неизвестная величина содержится под знаком радикала.

Примеры:



$$\sqrt{x+1} = x-1; \quad \sqrt{5x-4} = 2+\sqrt{x};$$

$$\sqrt[4]{x+15} = x+1; \quad \sqrt[3]{x+6} = \sqrt{6-x}.$$

Приёмы решения иррациональных уравнений.

- Решение иррационального уравнения основано на преобразовании его к рациональному уравнению. Это достигается возведением обеих его частей в одну и ту же степень (иногда несколько раз).
- При этом если обе части уравнения возвести в нечётную степень, то получим уравнение, равносильное данному.
- Уравнения, имеющие одни и те же корни, называют равносильными.

- В процессе решения заданное уравнение заменяют более простым, при этом используя следующие правила преобразований уравнения в равносильное:
  - перенос слагаемых из одной части равенства в другую с противоположным знаком;
  - обе части уравнения можно умножить или разделить на и то же, отличное от нуля число;
  - уравнение $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ м менить

  равносильной системой $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ или решить

  f(x)=0, а затем отбросить те корни, которые

Степень чётная:

- При возведении обеих частей иррационального уравнения в чётную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного.
- Уравнению-следствию удовлетворяют все корни исходного уравнения, но могут появиться и корни, которые не являются корнями исходного уравнения, так называемые посторонние корни.
- Поэтому все найденные корни уравнения-следствия проверяют подстановкой в исходное уравнение и посторонние корни

- К появлению посторонних корней могут привести (не обязательно приводят) следующие преобразования:
  - возведение в квадрат (или четную степень) обеих частей уравнения;
  - умножение обеих частей уравнения на алгебраическое выражение, содержащее переменную.

Правила равносильного перехода для простейших иррациональных уравнений

1) если а>0, то $\sqrt{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^2$ (здесь проверять обла… ний не надо);

2) если $\sqrt{f(x)} = -a \Leftrightarrow x \in \varnothing$

3) если квадратный корень равен нулю, то и подкоренное выражение равно нулю:

$$\sqrt{f(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Уравнение вид $\sqrt[n]{f(x)} = a$ при $n = 2m$ решаются по аналогичным

4) если $n = 2m+1$, то $\sqrt[n]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^n.$

Пример 1.

Решить уравнение:

$$\sqrt{x^2 - 7} = 3,$$

$$x^2 - 7 = 9,$$

$$x^2 = 16,$$

$$x_1 = -4;\ x_2 = 4.$$

Подставив полученные корни в исходное уравнение, видим, что они удовлетворяют ему.

Ответ: -4; 4.

Пример 2.

Решить уравнени $\sqrt{x^2-7}=-2$.

Решение.

$$\sqrt{x^2-7}=-2\Leftrightarrow x\in\emptyset.$$

По определению арифметического квадратного к

$$\sqrt{a}=y\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=a\\y\geq 0\end{cases}$$

- это неотрицательное число, квадрат которого равен а.

Уравнение вид $\sqrt{f(x)} = g(x).$

Способ решения $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$

Пример 3.

Решить уравнени $\sqrt{22 - 2x} = x + 1.$

Решение.

$$\sqrt{22 - 2x} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ 22 - 2x = (x + 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ 22 - 2x = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \begin{cases} x \geq -1, \\ -x^2 - 4x + 21 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + 4x - 21 = 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -1, \\ \left[\begin{array}{l} x = -7 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: 3

Рассмотрим уравнени $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Из двух систем решают ту, которая решается проще.

Пример 4.

Решить уравнение $\sqrt{-2x-1} = \sqrt{x^2-36}$.

$$\sqrt{-2x-1} = \sqrt{x^2-36} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-1 = x^2-36 \\ -2x-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2-2x-1+36 = 0 \\ -2x \geq 1 \end{cases} \begin{cases} x^2+2x-35 = 0 \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -7 \\ x = 5 \end{array}\right. \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -7.$$

Ответ: -7.

Пример 5.

Решить уравнени $\sqrt{x-5}=\sqrt{3-x}$.

Решение.

Подкоренные выражения не должны быть отрицательными:

$$\begin{cases} x-5\geq 0, \\ 3-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 5, \\ x\leq 3. \end{cases}$$

Полученная система неравенств решений не имеет, не имеет их, таким образом, и исходное уравнение.

Ответ: решений нет.

Линейные комбинации двух и более радикалов.

Если уравнение содержит два и более радикала, то необходимо придерживаться следующих правил:

1. указать область допустимых значений уравнения;
2. распределить радикалы по обеим частям, чтобы обе части уравнения стали неотрицательными;
3. только после этого возводить в квадрат левую и правую части уравнения.

Пример 6.

Решить уравнение: $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}=5.$

Решение.

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}=5 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}\right)^2=25 \\ x-1\ge 0 \\ 2x-1\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-1}\sqrt{2x-1}=27-3x, \\ x\ge 1, \\ 27-3x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\right)^2=(27-3x)^2, \\ x\ge 1, \\ x\le 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-150x+725=0, \\ 1\le x\le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=145 \end{array}\right. \\ 1\le x\le 9 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

Ответ: 5.

Пример 7.

Решить уравнени $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=\dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$.

Решение

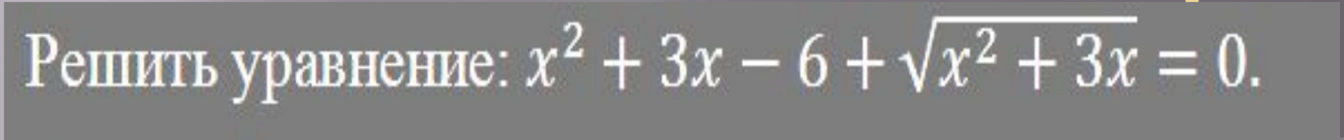
$$\begin{cases}\sqrt{x}\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}\right)^2=4,\\ x\geq 0,\\ x+2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x(x+2)}+x+2=4,\\ x\geq 0,\\ x\geq -2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x(x+2)}=2-x,\\ x\geq 0,\\ x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+2)=(2-x)^2,\\ 0\leq x\leq 2\end{cases}$$

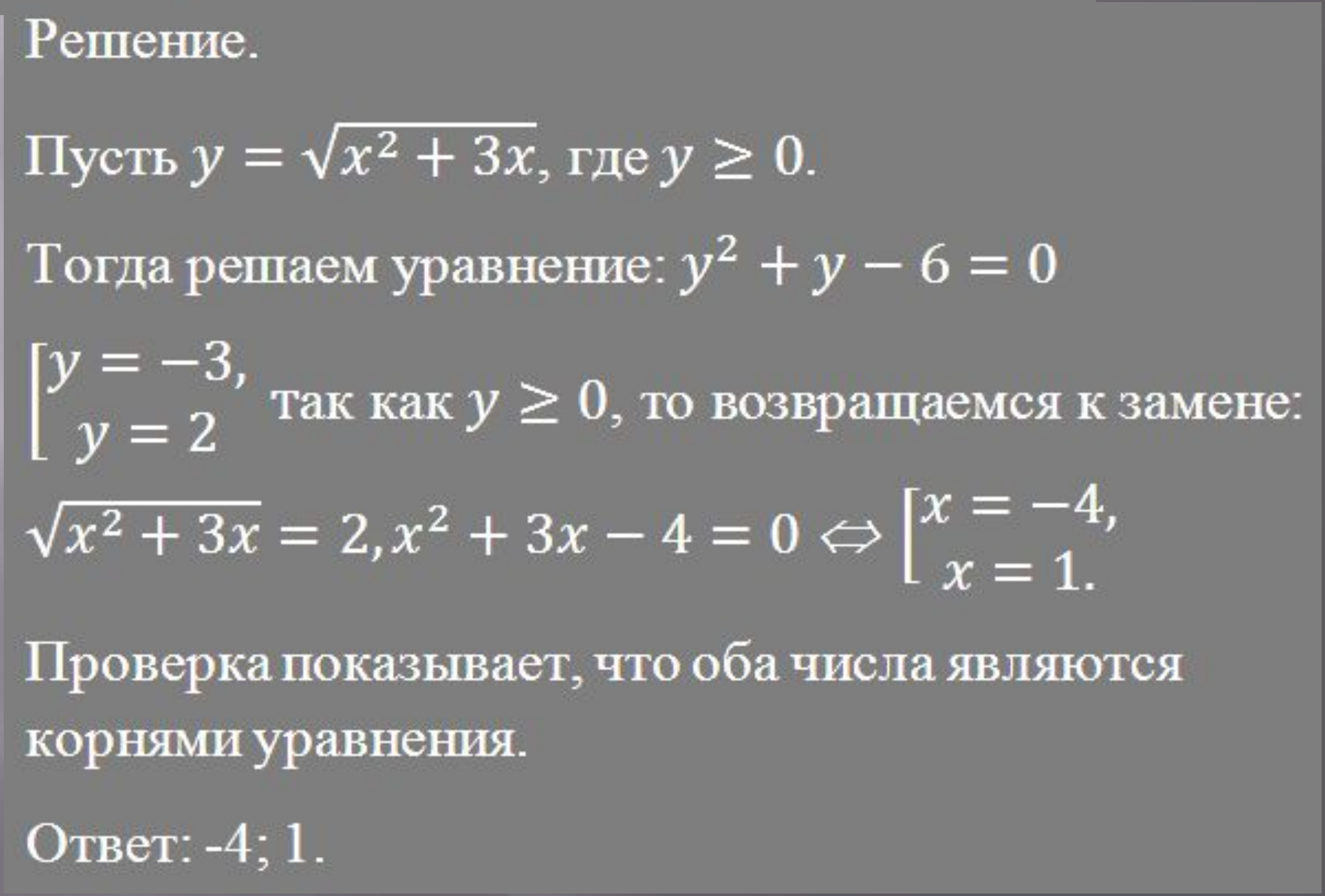
$$\begin{cases}x^2+2x=4-4x+x^2,\\ 0\leq x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x=4,\\ 0\leq x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $x=\dfrac{2}{3}$

Использование замены переменных



Решить уравнение: $x^2 + 3x - 6 + \sqrt{x^2 + 3x} = 0$.



Решение.

Пусть $y = \sqrt{x^2 + 3x}$, где $y \geq 0$.

Тогда решаем уравнение: $y^2 + y - 6 = 0$

$\left[\begin{array}{l} y = -3, \\ y = 2 \end{array}\right.$ так как $y \geq 0$, то возвращаемся к замене:

$\sqrt{x^2 + 3x} = 2, x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 1. \end{array}\right.$

Проверка показывает, что оба числа являются корнями уравнения.

Ответ: -4; 1.

Уравнение вид $f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0.$

Произведение равно 0, если хотя бы один из множителей равен 0, а второй при этом имеет смысл:

$$f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ \sqrt{g(x)}=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

Решить уравнение: $(x^2+3x)\cdot\sqrt{2+x}=0.$

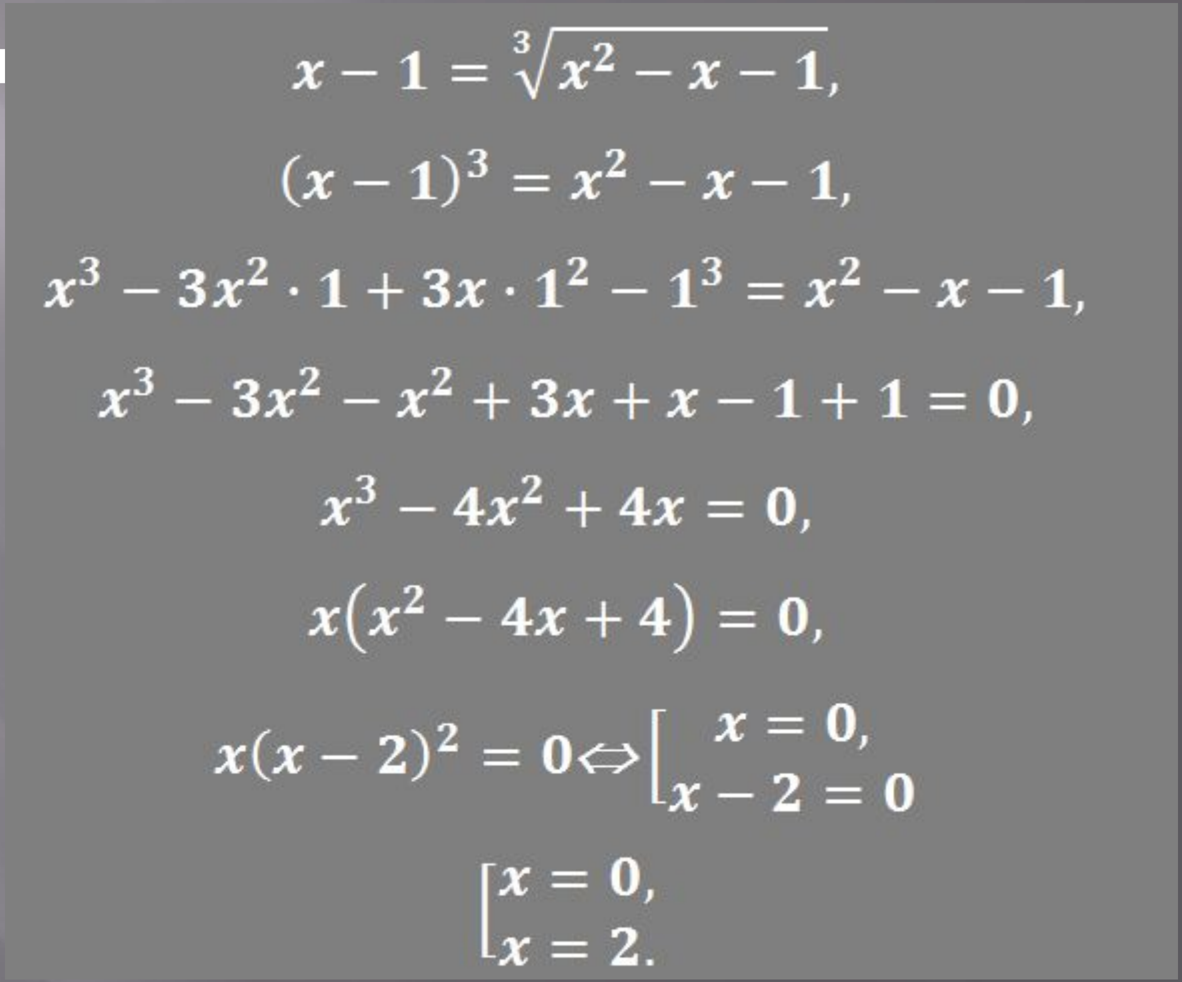
Решение.

$$(x^2+3x)\cdot\sqrt{2+x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2+x\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2+3x=0, \\ \sqrt{2+x}=0; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge -2, \\ \left[\begin{array}{l} x(x+3)=0, \\ 2+x=0; \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} x\ge -2, \\ \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-3, \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Степень нечётная:

Решим уравн



$$x-1=\sqrt[3]{x^2-x-1},$$

$$(x-1)^3=x^2-x-1,$$

$$x^3-3x^2\cdot 1+3x\cdot 1^2-1^3=x^2-x-1,$$

$$x^3-3x^2-x^2+3x+x-1+1=0,$$

$$x^3-4x^2+4x=0,$$

$$x\left(x^2-4x+4\right)=0,$$

$$x(x-2)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x-2=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2.\end{array}\right.$$

Проверка не нужна!

Ответ: 0; 2.

Графический способ решения иррационального уравнения

Графически решить уравнен $\sqrt{x} = 1 - x^2$.

Построим в одной системе координат гр $y = \sqrt{x}$

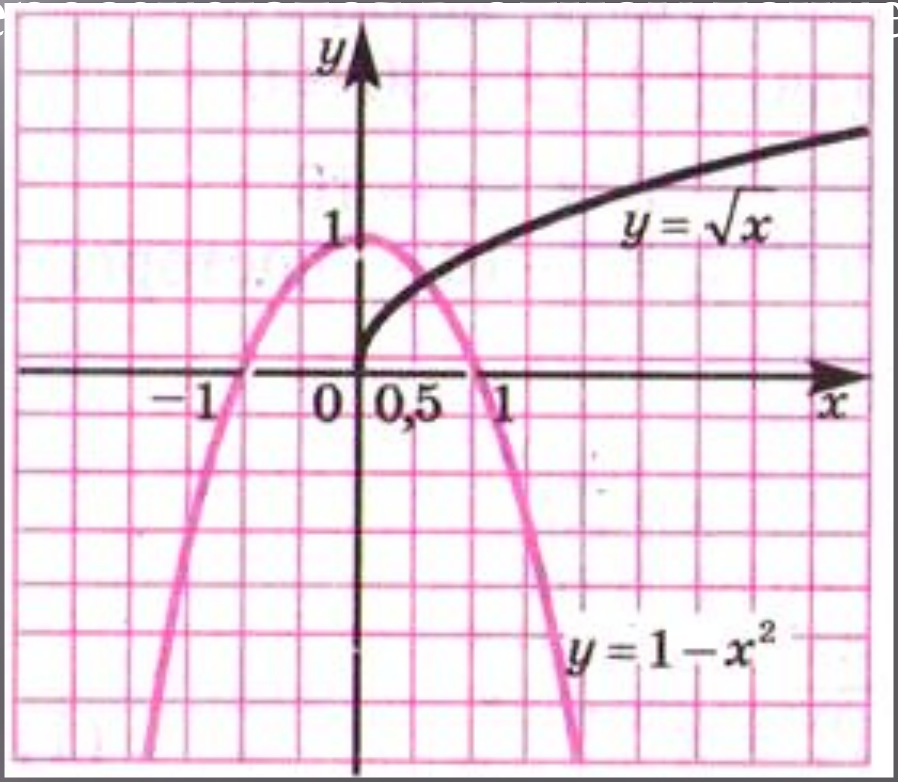
$y = 1 - x^2$ й

и . Графики пе е

при

x ≈ 0,5.

Ответ: 0,5.



Тест

$a)\,б)\sqrt[3]{2\,3x\,x+7\,5} = -2\,2;;$ $\qquad \sqrt{\qquad} = -$

$в)\,x = \sqrt{2}\,3x + 4;$ $\qquad)\ 3x\,x + \sqrt{5 \quad 2;} =$

$д)\,x\,x^2 + 2 = \sqrt{0}\,6;$ $\qquad$ е) $2 \quad 7\sqrt[3]{\,9x -\quad} =$

1) Какие из уравнений не являются иррациональными?

2) Какие иррациональные уравнения не имеют корней?

3) Какие иррациональные уравнения необходимо решить с проверкой?

4) Какие уравнения имеют один корень?

Ключ к тесту

1	2	3	4
в, д	б	г	а, е

Ответы к самостоятельной работе

Вариант 1.

№ задания	1	2	3	4	5	6
ответ	2)	1)	3)	0	10	-8

Вариант 2.

№ задания	1	2	3	4	5	6
ответ	3)	2)	1)	-14	10	-6