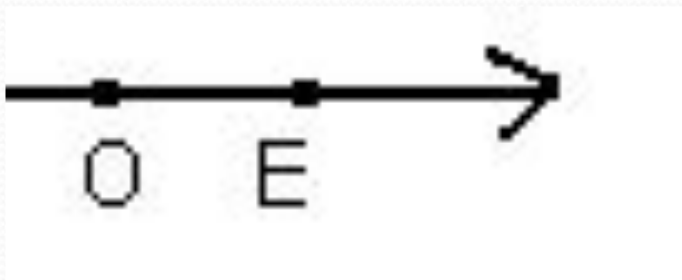
Элементы аналитической геометрии на прямой, плоскости и в трехмерном пространстве.

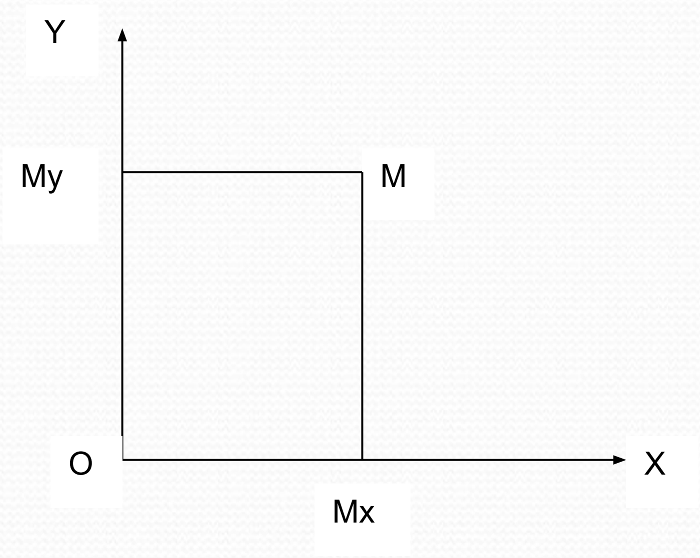
ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Числовой осью называется прямая, на которой:

1. Отмечена точка, называемая началом координат (“О”);
2. Отмечена единичная точка (обычно Е или 1);
3. Зафиксировано направление от начальной точки О к единичной Е (на рис. обозначается →);
4. Введена длина отрезка |ОЕ |=1.



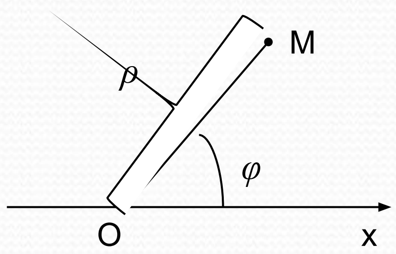
Прямоугольные декартовы координаты на плоскости



Зафиксируем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси с общим началом в точке О (Ох и Оу).

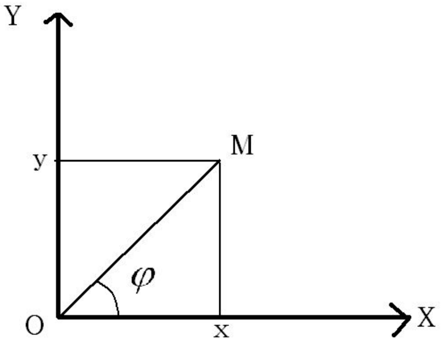
В этом случае говорят, что на плоскости задана (введена) декартова прямоугольная система координат.

Полярная система координат



- **Полярная система координат** — система координат, ставящая в соответствие **каждой точке** на плоскости пару **чисел ρ и φ .** Где
- Координата **ρ** определяет расстояние от точки до полюса,
- координата **φ**— угол между полярной осью и отрезком, соединяющим полюс и рассматриваемую точку.

Связь между декартовыми и полярными координатами



Формулы перехода.

- От полярной системы координат к декартовой:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi; \\ y = \rho \cdot \sin\varphi. \end{cases}$$

Связь между декартовыми и полярными координатами

Формулы перехода.

- От декартовой системы координат к полярной:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

- Уравнение вида $F(x,y)=0$ есть **уравнение линии на плоскости**, если координаты всех точек, лежащих на этой линии удовлетворяют этому уравнению, а координаты точек, не лежащих на этой линии – не удовлетворяют.

- Уравнение вида $F(x,y,z)=0$ есть **уравнение линии или поверхности в пространстве**, если координаты всех точек, лежащих на этой линии (поверхности) удовлетворяют этому уравнению, а координаты точек, не лежащих на этой линии – не удовлетворяют.

Прямая на плоскости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Уравнение прямой, заданное уравнением первой степени общего вида $Ax+By+C=0$, называется **уравнением прямой общего вида.**

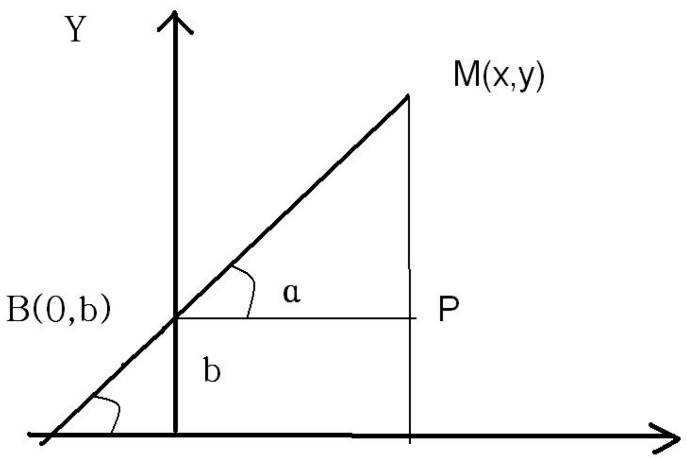
Рассмотрим случаи:

- $B=0 \rightarrow Ax+C=0 \rightarrow$ прямая параллельная оси ОУ.
- $B\neq 0 \rightarrow By=-Ax-C \rightarrow y=kx+b$ **уравнение прямой с угловым коэффициентом**, где $k=-A/B$, $b=-C/B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Угловым коэффициентом прямой называется **тангенс угла**, на который нужно повернуть против часовой стрелки ось Ох вокруг начала координат О, чтобы прямая стала параллельна этой оси.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом



$$\frac{y-b}{x} = tg(\alpha) = k,$$

$$y = kx + b. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом

Исследуем уравнение (1).

- если в=0, →у=кх - уравнение пучка прямых, проходящих через начало координат.
- если к=0, →у=в прямая параллельная оси Ох.
- если к=0, в=0, →у=0 - уравнение оси Ох.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку (уравнение пучка прямых)

Любую прямую не параллельную оси Оу можно записать в виде $y=kx+b$.

Пусть прямая проходит через точку $M(x_0,y_0)$.

тогда справедливо $y_0=kx_0+b$. Вычтем $y-y_0=k(x-x_0)$

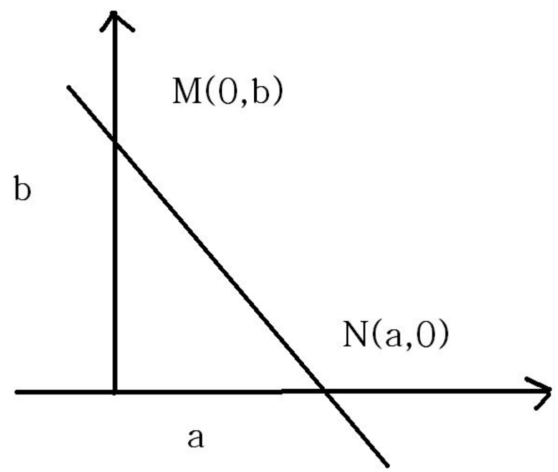
Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

- $M_1(x_1,y_1) \rightarrow y-y_1=к(x-x_1)$
- $M_2(x_2,y_2) \rightarrow y-y_2=к(x-x_2)$

Поделим почленно

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Уравнение прямой в отрезках на осях



- Ax+By+C=0 (2)
- Если N(a,0) принадлежит прямой → Aa+C=0 (*)
- Если M(0,в) принадлежит прямой → Вв+С=0 (**)
- Найдем из (*) и (**) А и В

Подставив в (2) получим

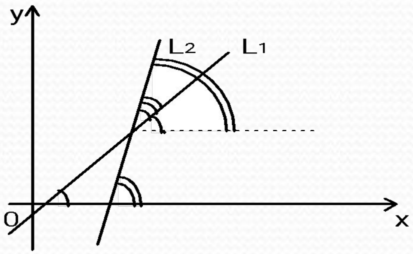
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Расстояние от точки до прямой

- Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой, заданной уравнением общего вида $Ax+By+C=0$ определяется по формуле:

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Угол между двумя прямыми



Здесь α_1 **и** α_2

- углы наклона прямых L_1 и L_2 к оси Ох, а ϕ- один из

углов между этими прямыми. Из рисунка видно, что

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

Угол между двумя прямыми

- Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом

$$y = k_1 x + b_1 \quad \text{и} \quad y = k_2 x + b_2$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

Прямые **параллельны**, если tgϕ=0, т.е. k_1=k2

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 запишем в виде

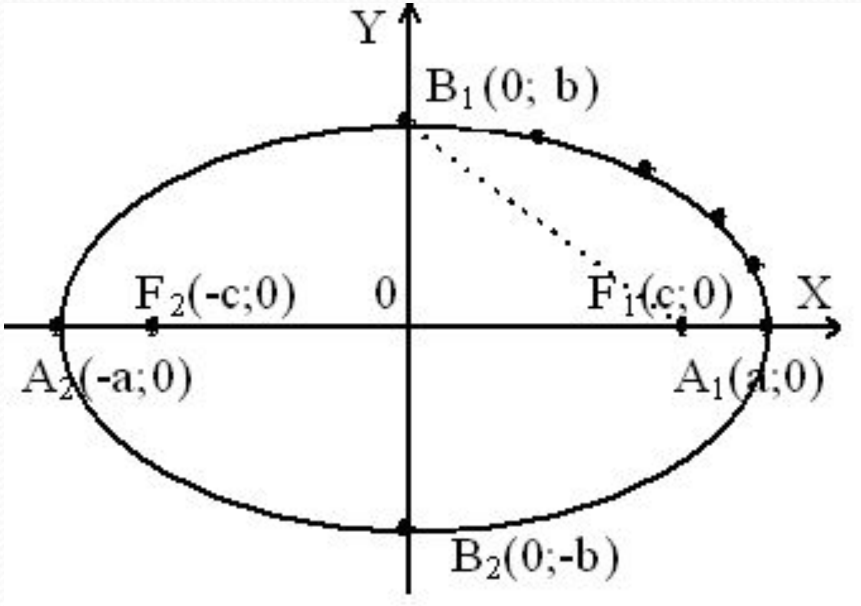
$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

Геометрическое место точек

- Геометрическим местом точек (ГМТ) называется множество точек, обладающих одним и тем же свойством.
- Алгоритм вывода уравнения ГТМ
- Считать точку M(x,y) $\in$ГМТ
- Записать свойство, которым обладает точка M(x,y) как представитель ГМТ
- Записанное свойство представить в координатной форме и упростить .

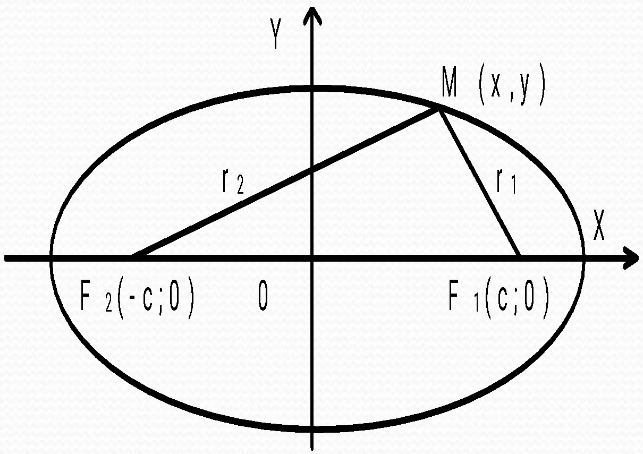
Определение эллипса и вывод его канонического уравнения

- **Эллипсом** называется геометрическое место точек на плоскости, для которых **сумма расстояний** от **двух фиксированных точек плоскости**, называемых фокусами, есть постоянная величина равная **2a.**



- $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ – фокусы эллипса.
- $A_1(a,0)$,$A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ – вершины эллипса.

эллипс



- Обозначим $F_1F_2=2c$. Тогда координаты фокуса F_1 будут (c;0), а координаты фокуса F_2 будут (-c;0).
- Определим r_1 и r_2 по формулам расстояния между двумя точками
- На основании определения эллипса как геометрического места точек должно выполняться равенство:
- $r_1+r_2=2a$

вывод канонического уравнения эллипса

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Преобразовав получим каноническое уравнение эллипса:

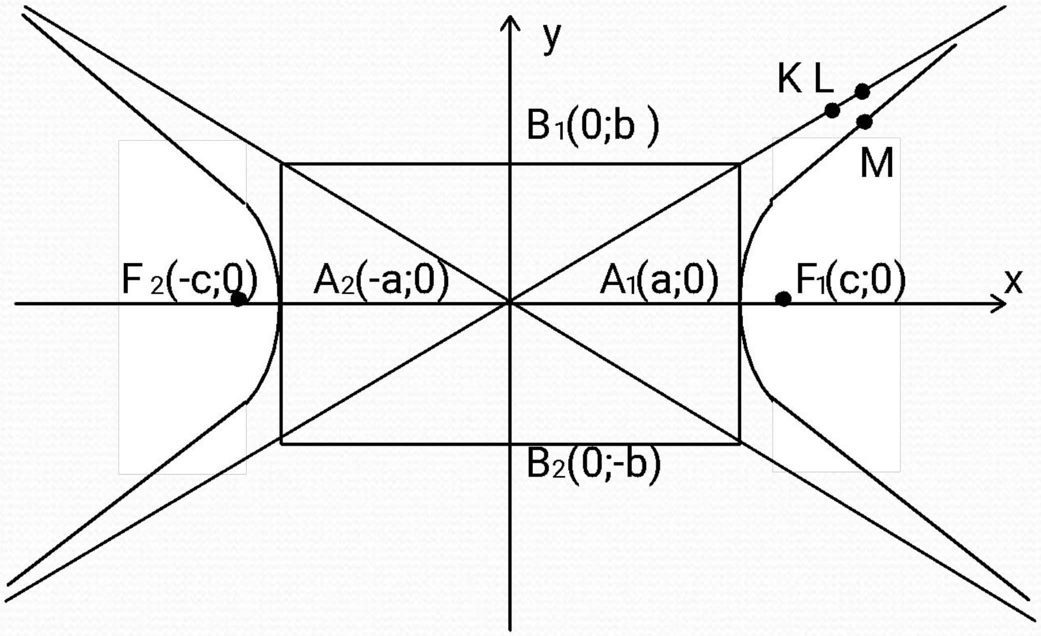
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Определение гиперболы и вывод ее канонического уравнения

- <u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u>
- **Гиперболой** называется геометрическое место точек на плоскости, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная равная $\pm 2a$
- Фокусы гиперболы обозначим через F_1 и F_2, а расстояние между ними - через 2c

Гипербола



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ (каноническое уравнение гиперболы)

$$b^2 = c^2 - a^2$$

- Асимптотами гиперболы называются прямые, имеющие уравнения

$$y = \frac{b}{a}x \qquad y = -\frac{b}{a}x$$

Эксцентриситет эллипса и гиперболы $\frac{c}{a} = e$

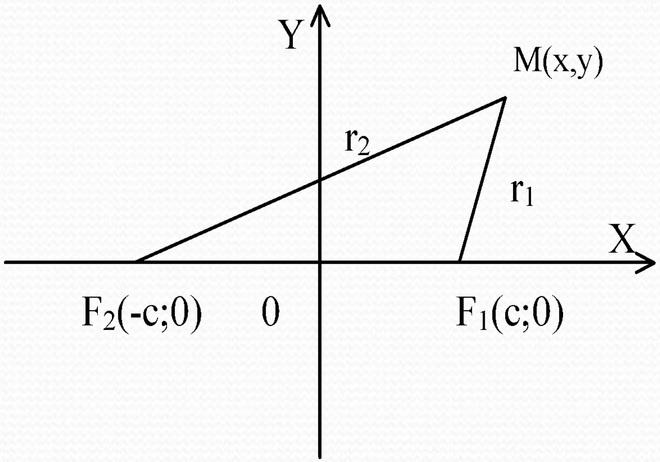
$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \text{ где } b^2 = a^2 - c^2.$$

- Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния к длине большой оси эллипса;

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}, \text{ где } b^2 = c^2 - a^2.$$

- Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния к длине ее действительной оси.

вывод канонического уравнения гиперболы



- На основании определения гиперболы как геометрического места точек на плоскости, можно утверждать, что для всех точек гиперболы и только для них, должно выполняться равенство
- $r_1 - r_2 = \pm 2a$

- По формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$
$$r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Равнобочная гипербола

- Исследуем уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

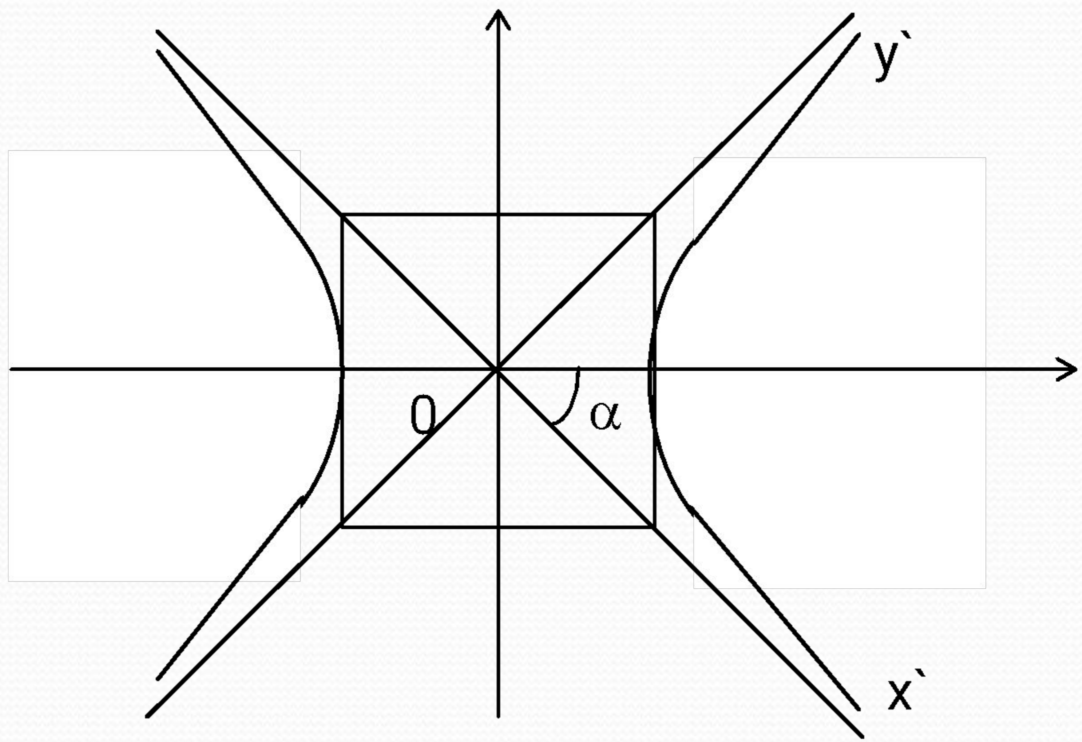
В случае, когда a=b, уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{или} \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

Гипербола, у которой полуоси a и b равны,

называется **равнобочной гиперболой.**

Равнобочная гипербола



Сопряженная гипербола

- Рассмотрим уравнение :

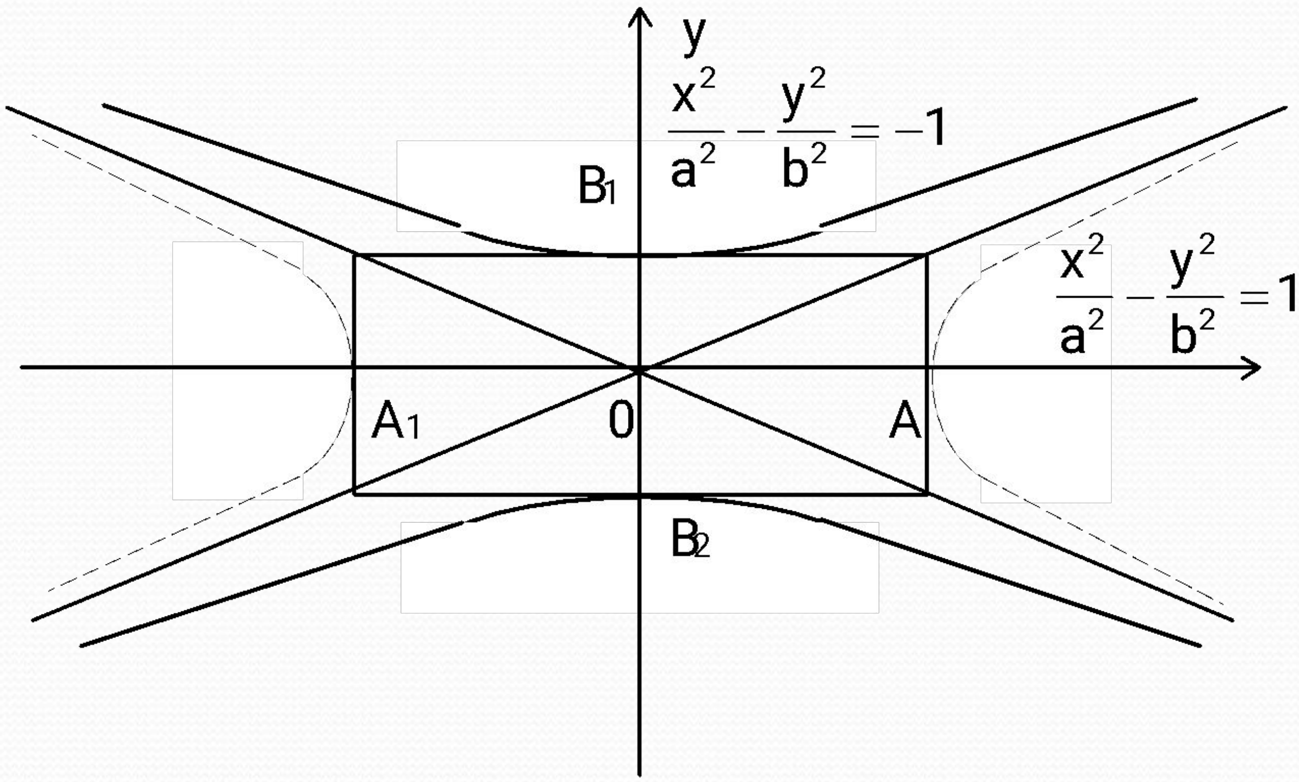
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Представим уравнение в следующем виде:

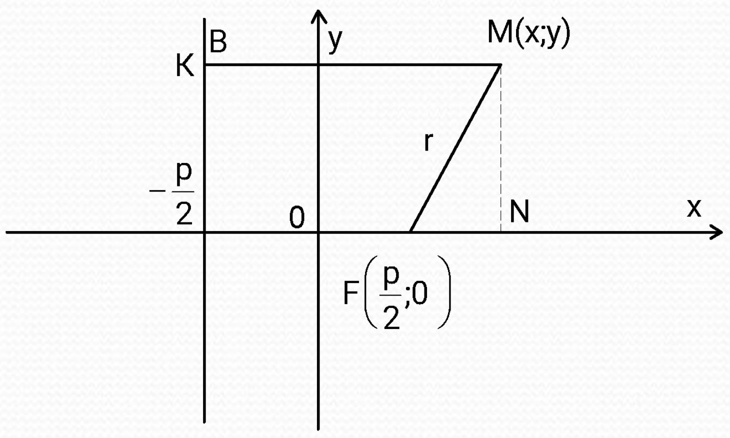
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Очевидно, что уравнение представляет собой
уравнение гиперболы, у которой действительной осью
является ось ординат, а мнимой - ось абсцисс.

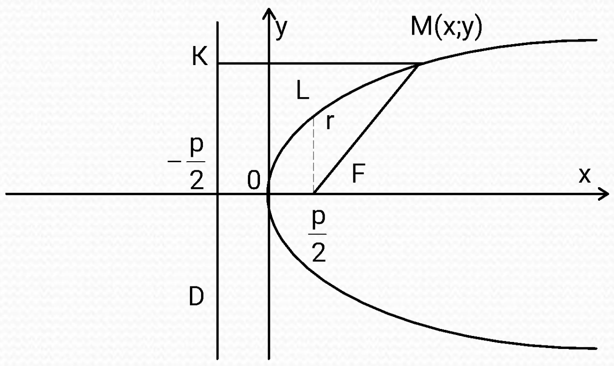
Сопряженная гипербола



Определение параболы



- ОПРЕДЕЛЕНИЕ
- **Параболой** называется геометрическое место точек на плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой** (предполагается, что эта прямая не проходит через фокус).
- $y^2=2px$ - каноническое уравнение параболы



- Для определения вида параболы найдем **y** из канонического уравнения параболы

$$y = \pm\sqrt{2px}$$

- Директрисса параболы имеет уравнение
-

$$x = -\frac{p}{2}$$

Вывод уравнения параболы

- Согласно определению параболы:
- FM = KM
- Определяя FM и KM по формуле расстояния между двумя точками, получим:

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2};$$

$$KM = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2$$