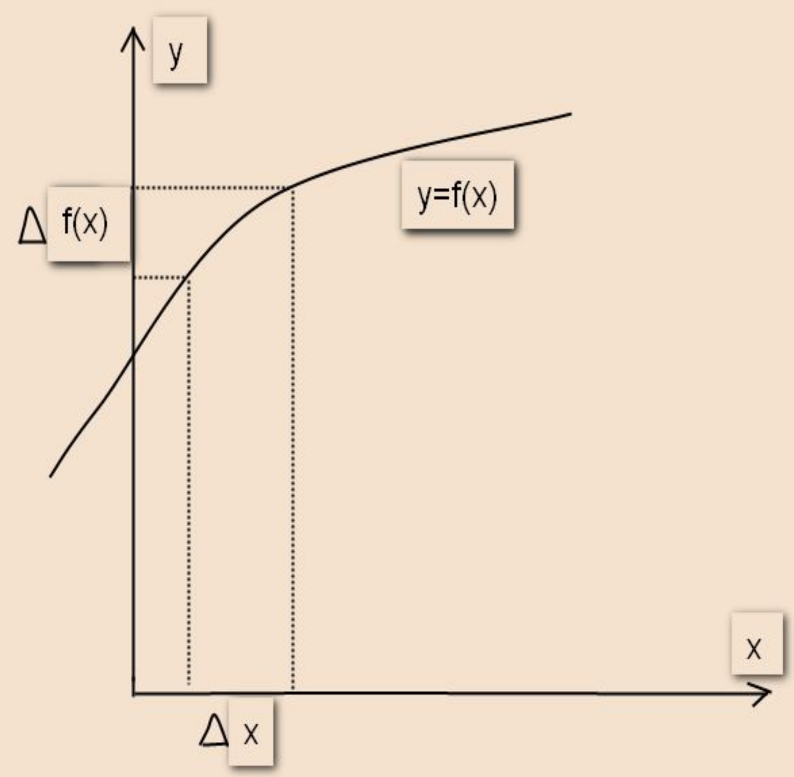
Первообразная и интеграл

Определение производной функции?

Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента , стремиться к нулю.

$$f^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



Устная работа

$(x-1)^{/}=$ 1

$(12\text{-}x^4)^{/}=$ $-4x^3$

$(\sin x-5)^{/}=$ cosx

$(6x-4x^3)^{/}=$ $6-12x^2$

$(\cos x+12x)^{/}=$ sinx+12

$(7x+\sqrt{x})^{/}=$ $7+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Устная работа

$$(x^3)^{/} = 3x^2$$

$$(C)^{/} = 0$$

-0

$$(\cos x)^{/} = -\sin x$$

$$(4x)^{/} = 4$$

$$(x^2 + 6x)^{/} = 2x+6$$

Используя определение производной функции, решают ряд задач в алгебре, физике, химии.

Рассмотрим физический смысл производной.

Если материальная точка движется прямолинейно и её координата изменяется по закону $s(t)$, то скорость её движения $v(t)$ в момент времени t равна производной $s^{/}(t)$:

материальная точка

$$\boldsymbol{v(t) = s^{/}\,(t)}$$

скорость движения v(t)

s(t) закон движения

Задача: Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = t^3 + 2t$ (где $s(t)$ – измеряется в м). Найдите скорость точки в момент времени $t=2$с.

Решение:

$$\mathbf{v(t) = s^{/}(t).}$$

$$v(t) = 3t^2 + 2$$

$$v(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 = 14 \text{ м/с}$$

Ответ: 14 м/с.

Задача: По прямой движется материальная точка, скорость которой в момент времени t задается формулой $v(t) = 3t^2$. Найдите закон движения.

Решение: Пусть $s(t)$ – закон движения

так как $v(t) = s'(t)$

$s'(t) = 3t^2$, $s(t) = t^3$.

надо найти функцию, производная которой равна $3t^2$.

Эта задача решена верно, но не полно.

Эта задача имеет бесконечное множество решений.

$s(t)=t^3$ $\quad s'(t)= 3t^2$

$s(t)=t^3+2$ $\quad s'(t)= 3t^2$

$s(t)=t^3+5$ $\quad s'(t)= 3t^2$

$s(t)=t^3+\frac{1}{2}$ $\quad s'(t) = 3t^2$

можно сделать вывод, что любая функция вида **$s(t)=t^3+C$** является решением данной задачи, где C любое число.

При решении задачи, мы, зная производную функции, восстановили ее первичный образ.

Эта операция восстановления - операция интегрирования.

Востановленная функция – первообразная (первичный образ функции)

Операция дифферен-цирования	$\downarrow$	функция $y = F(x)$ (первообразная) $y = f(x)$ производная	$\uparrow$	Операция интегри-рования

Первообразная

- Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

- Пример:

  Первообразной для функции $f(x)=x$ на всей числовой оси является $F(x)=x^2/2$, поскольку $(x^2/2)'=x$.

Операция дифферен- цирования

функция $y = F(x)$
(первообразная)
$y = f(x)$
производная

Операция интегри- рования

В математике много операций которые являются обратными

$3^2 = 9$? $\sqrt{9} = 3$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$? $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

Сегодня мы познакомились с новой операцией
интегрирование ? дифференцирование

Запомните: Первообразная – это родитель производной: $F^{/}(x)=f(x)$

Задача: Докажите, что функция y = F(x) является первообразной для функции y = f(x), если:

а) $F(x)=x^2+x^3$, $f(x)=2x+3x^2$

б) $F(x)=x^4-x^{11}$, $f(x)=4x^3-11x^{10}$

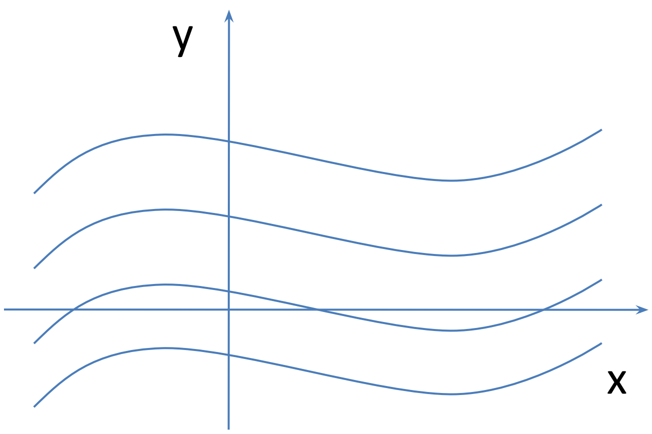
в) $F(x)=-4\cos x$, $f(x)=4\sin x$

г) $F(x)=-9\sin x$, $f(x)=-9\cos x$

Основное свойство первообразных

- Если F(x) – первообразная функции f(x), то и функция F(x)+C, где C – произвольная постоянная, также является первообразной функции f(x).

Геометрическая интерпретация



- Графики всех первообразных данной функции f(x) получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси y.

$f(x)$	$F(x)$
1	

Задача:

Найдите все первообразные для функций:

$f(x)=3$

$f(x)= x^2$

$f(x)=\cos x$

$f(x)=12$

$f(x)=x^5$

Три правила нахождения первообразных

Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют на промежутке первообразные соответственно $y=F(x)$ и $y=G(x)$, то

Функция	Первообразная
$y = f(x) + g(x)$	$y = F(x) + G(x)$
$y = k f(x)$	$y = k F(x)$

Задача.

Для функции y=f(x) найдите хотя бы одну первообразную:

а) $f(x) = 4x^2 + 6x^2$

б) $f(x) = -\sin x + 2\cos x$

в) $f(x) = -13\sin x + \frac{5}{\cos^2 x}$

г) $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$

д) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

г) $f(x) = (4 - 5x)^4$

Самостоятельно

Для функции y=f(x) найдите хотя бы одну первообразную:

а) $f(x) = 3x^4 - 5x^2$

б) $f(x) = 3\cos x - \sin x$

в) $f(x) = \cos x + \frac{1}{sin^2 x}$

г) $f(x) = \frac{1}{x} - 2e^x$

д) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

г) $f(x) = (3x - 12)^4$

Неопределенный интеграл

- Совокупность всех первообразных данной функции f(x) называется ее **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

,

где C – произвольная постоянная.

Правила интегрирования

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, c = const$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, a \neq 0$$

Определенный интеграл

- В декартовой прямоугольной системе координат XOY фигура, ограниченная осью OX, прямыми x=a, x=b (a<b) и графиком непрерывной неотрицательной на отрезке [a;b] функции y=f(x), называется криволинейной трапецией

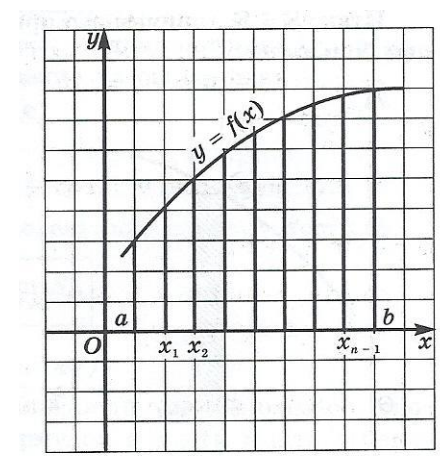
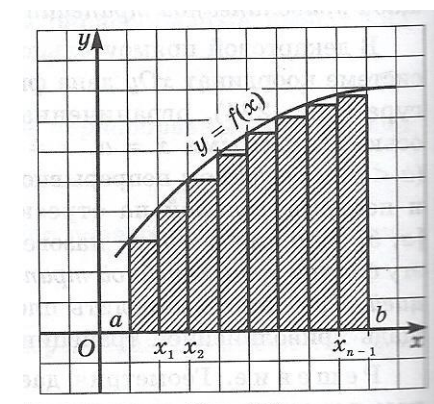


Рис. 224

Определенный интеграл

- Вычислим площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок [a;b] на n равных частей. Проведем через полученные точки прямые, параллельные оси OY. Заданная криволинейная трапеция разобьется на n частей. Площадь всей трапеции приближенно равна сумме площадей столбиков.



$$S_n = f(x_0)\cdot\Delta x_0 + f(x_1)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$$

$$S \approx S_n$$

по определению $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, его называют определенным интегралом от функции y=f(x) по отрезку [a;b] и обозначают так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Связь между определенным интегралом и первообразной (Формула Ньютона - Лейбница)

- Для непрерывной функции

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где F(x) – первообразная функции f(x).

Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b dx = b - a$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Основные свойства определенного интеграла

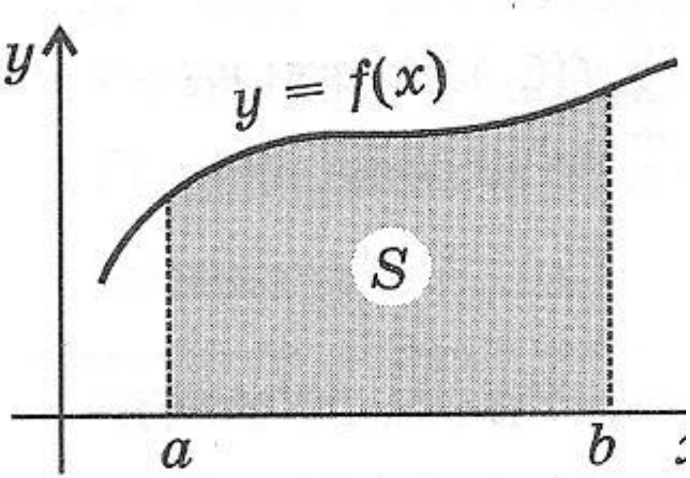
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, c - const$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

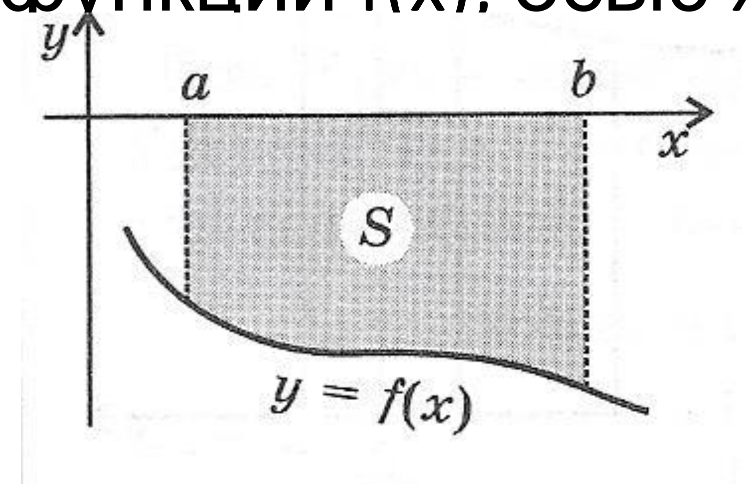
- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a;b] функции f(x), осью x и прямыми x=a и x=b:



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке [a;b] функции f(x), осью x и прямыми x=a и x=b:

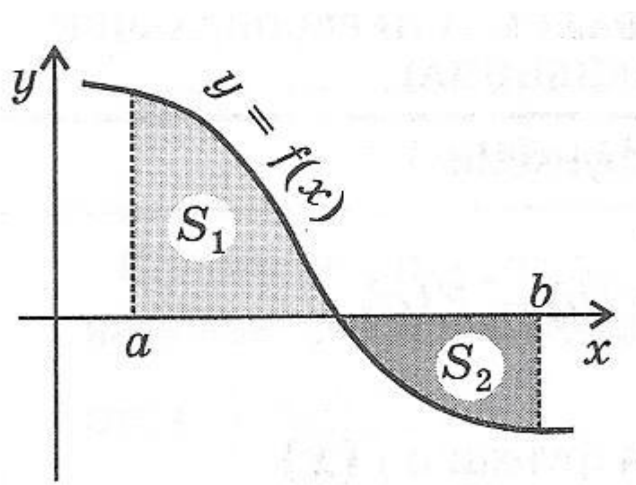


$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

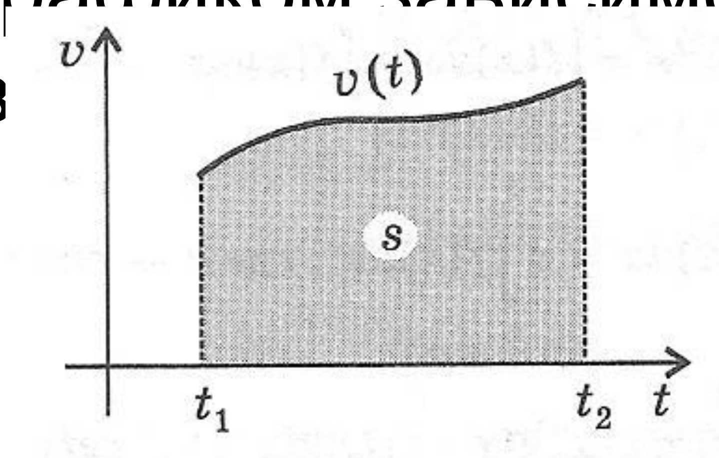
- **Замечание**: Если функция изменяет знак на промежутке [a;b] , то

$$S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)dx$$



Физический смысл определенного интеграла

- При прямолинейном движении перемещение s численно равно площади криволинейной трапеции под графиком зависимости скорости v от в



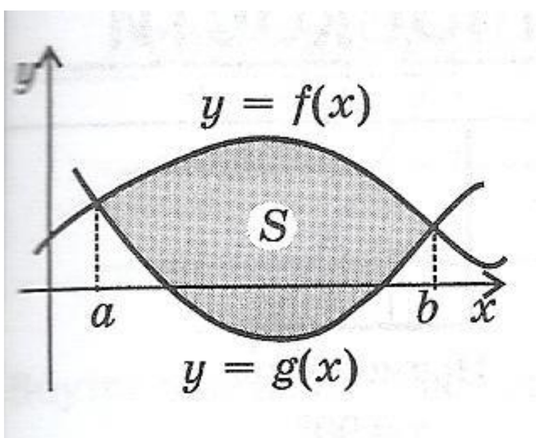
$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Вычисление площадей и объемов

с помощью определенного интеграла

Площадь фигуры,

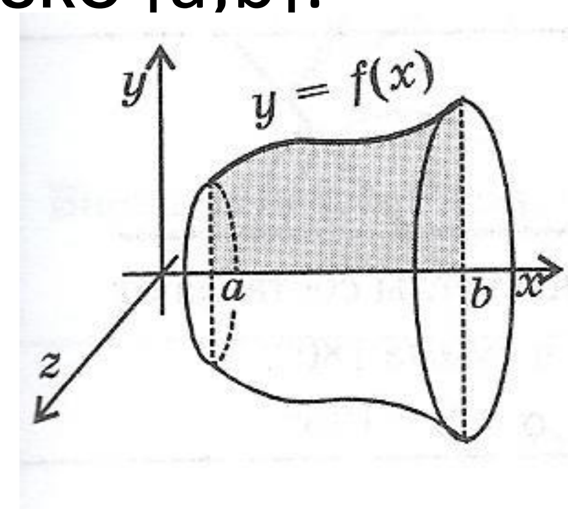
- Ограниченной графиками непрерывных функций y=f(x) и y=g(x) таких, что $f(x) \geq g(x)$
  для любого x из [a;b], где a и b – абсциссы точек пересечения графиков функций:



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Объем тела,

- полученного в результате вращения вокруг оси x криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной функции y=f(x) на отрезке [a;b]:



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$