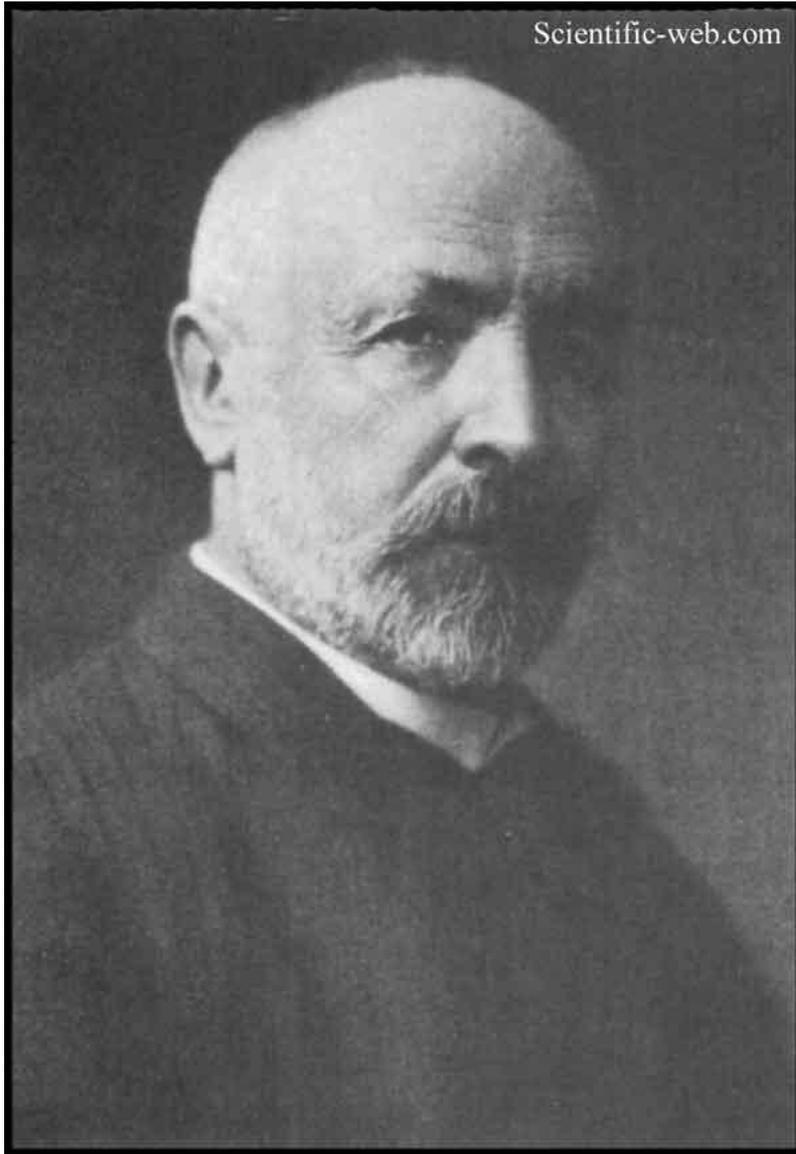


Теория множеств





**«Множество
есть многое,
мыслимое нами
как единое».**

**Основоположник
теории множеств
немецкий
математик**

**Георг Кантор
(1845-1918)**

Основные определения теории множеств. Примеры

- Понятие множества является одним из фундаментальных понятий математики, которому трудно дать определение. Дело в том, что определить понятие – это значит найти такое родовое понятие, в которое это понятие входит в качестве вида, но понятие «множество» - это самое широкое понятие математики и математической логики, т.е. **категория**, а для категории нельзя найти более широкое, т.е. родовое понятие. Ограничимся описательным объяснением этого понятия.

Основные определения теории множеств. Примеры

Множество – это набор, совокупность каких-либо **вполне различаемых** объектов, называемых его элементами, обладающими общими для всех их и только их свойствами, и рассматриваемых как единое целое.

Примеры:

- множество людей, живущих сейчас в России,
- множество точек данной геометрической фигуры,
- множество решений данного уравнения.
- невозможно говорить о множестве капель в стакане воды, так как невозможно четко и ясно указать каждую отдельную каплю.

Структура множества

- Каждое множество состоит из того или иного набора объектов, которые называются **элементами** множества.
- Факт, что элемент a принадлежит множеству X будем обозначать: $a \in X$.
- Порядок элементов в множестве несущественен. Множества $\{a, b, c\}$ и $\{a, c, b\}$ одинаковы.
- При этом, нужно иметь ввиду, что элемент a и множество $\{a\}$ – это не одно и то же. Первое – это объект, обозначенный a , второе – это множество, состоящее из единственного элемента a . Поэтому можно сказать, что « a принадлежит $\{a\}$ » – это истинное суждение. В то время как, « $\{a\}$ принадлежит a » – это ложное суждение.

Способы задания множества

1. Перечисление элементов множества. Обычно перечислением задают конечные множества.
2. Описание свойств, общих для всех элементов этого множества, и только этого множества. Это свойство называется **характеристическим свойством**, а такой способ задания множества **описанием**. Таким образом, можно задавать как конечные, так и бесконечные множества.

Примеры множеств, заданных различными способами

а) $M_1 = \{1; 2; 3; 4\}$

б) $M_2 = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 < x < 9\}$

в) $M_3 = \{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$

Пустое множество \emptyset

- Если характеристическим свойством, задающим множество A не обладает ни один объект, то говорят, что множество A пустое.
- Понятие пустого множества очень важное понятие. Оно позволяет описательно задавать множества, не заботясь, есть ли в этом множестве элементы и совершенно спокойно оперировать с этими множествами. Пустое множество будем считать конечным множеством.
- Например: множество действительных корней уравнения

$$x^2 = -1$$

пустое.

Количество элементов множества

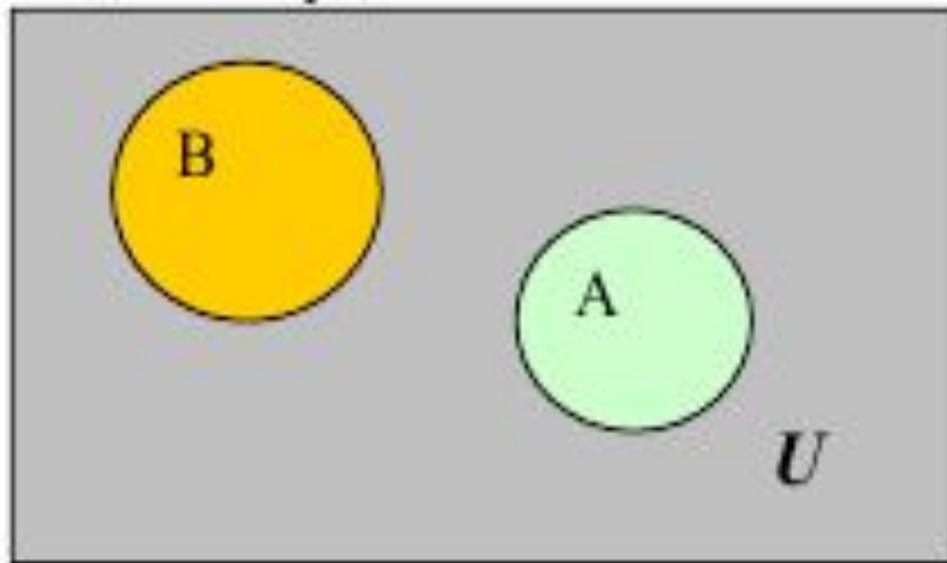
- Множества бывают конечными или бесконечными. Если число элементов множества конечно – множество называется конечным.
- Определение: Количество элементов, составляющих множество, называется **мощностью множества**.
- Определение: Если между элементами бесконечного множества можно установить взаимнооднозначное соответствие с элементами множества положительных целых чисел, то говорят, что множество счетно.
- Например:
- множество действительных чисел - бесконечное множество.
- множество чисел, делящихся без остатка на 3 – счетное множество,
- множество букв русского алфавита, множество отличников вашей группы – конечно.

Равенство множеств

- ▣ Определение: Два множества равны между собой, если они состоят из одних и тех же элементов.
- ▣ Т.е. любой элемент множества X является элементом множества Y , и любой элемент множества Y является элементом множества X .

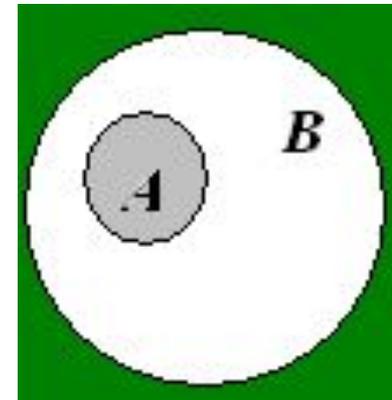
Диаграммы Эйлера-Венна

- Для наглядного представления (графического изображения) множеств и результатов операций над ними удобно пользоваться так называемыми диаграммами Эйлера-Венна (кругами Эйлера).
- При этом множества изображаются на плоскости в виде замкнутых кругов, а универсальное множество в виде прямоугольника. Элементы множества – точки внутри соответствующего круга.



Подмножество. Включение

- ▣ Определение: Множество A является **подмножеством** B , если любой элемент множества A принадлежит множеству B . Это еще называется **нестрогим включением** $A \subseteq B$.
- ▣ Например:
- ▣ Пусть X – множество студентов некоторой группы, E – множество отличников этой же группы.
- ▣ $E \subseteq X$ т.к. группа может состоять только из отличников.
- ▣ Когда хотят подчеркнуть, что в множестве B есть обязательно элементы, отличные от элементов множества A , то пишут $A \subset B$. Это называется **строгим включением**.
- ▣ Например:
- ▣ Пусть X – множество всех студентов ВлГУ, E – множество студентов педагогического института.
- ▣ $E \subset X$ т.к. в множестве всех студентов ВлГУ обязательно есть элементы $\notin E$.



Свойства включения

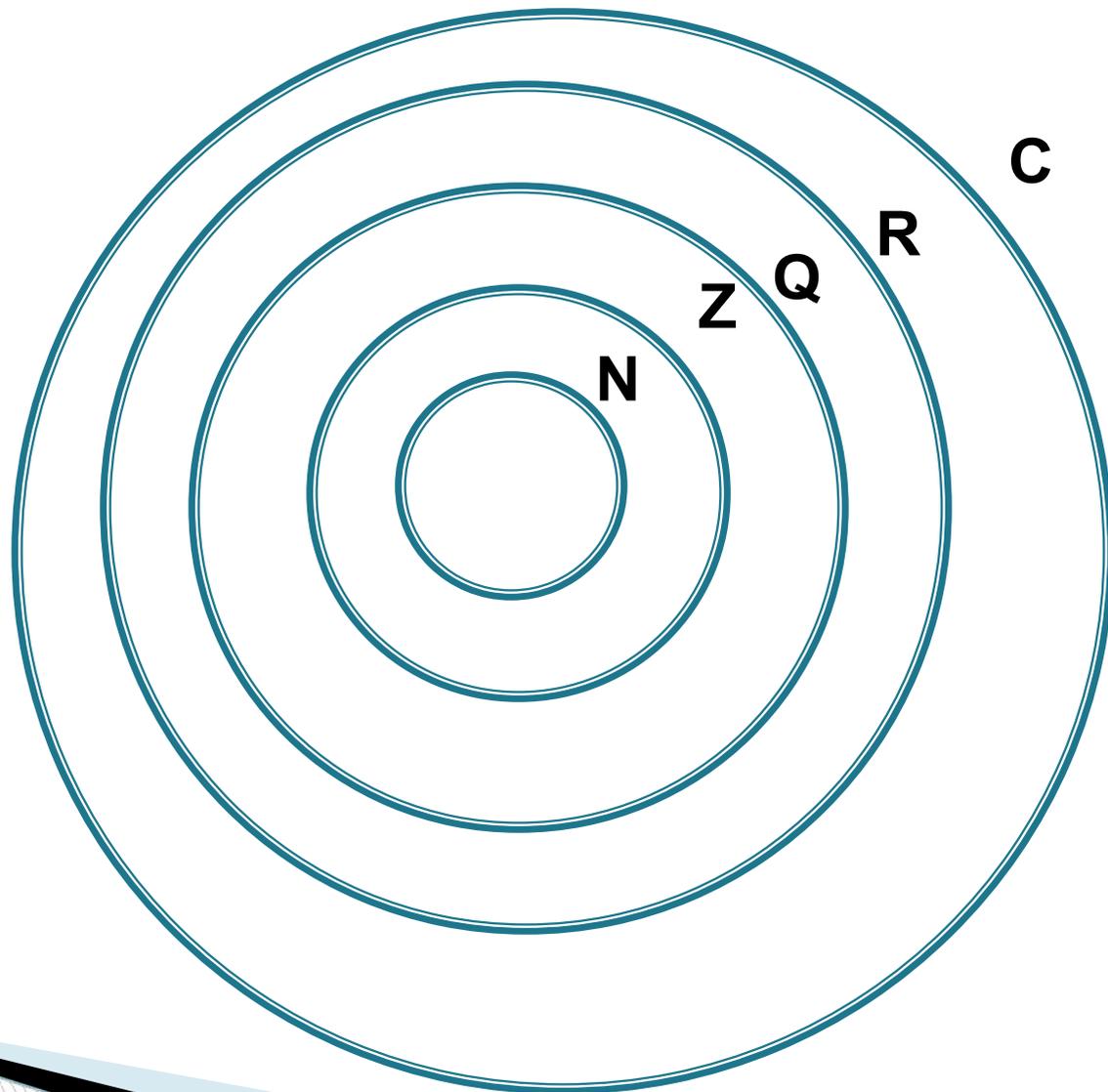
- ▣ 1) $\emptyset \subset A$ для любого множества A ;
- ▣ 2) $A \subset A$ для любого множества A (рефлексивность);
- ▣ 3) из того, что $B \subset A$ не следует $A \subset B$ (не симметричность);
- ▣ 4) если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A=B$ (антисимметричность);
- ▣ 5) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность).

Числовые множества

1. **Множество НАТУРАЛЬНЫХ чисел N , $N=\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$**
2. **Множество ЦЕЛЫХ чисел Z , $Z=\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$**
3. **Множество РАЦИОНАЛЬНЫХ чисел Q , $Q=\{x \mid x=p/q, \text{ где } p \in Z, q \in N\}$**
4. **Множество ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ чисел I - ,бесконечные непериодические дроби, ($\sqrt{2}=1,414213\dots$, $\pi=3,141592\dots$, $e=2,718281, \dots$)**
5. **Множество ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ чисел R получено объединением РАЦИОНАЛЬНЫХ и ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ чисел.**
6. **Множество КОМПЛЕКСНЫХ чисел C , содержащих в себе мнимую единицу i , которая является квадратным корнем из -1 . Построены для извлечения корня из отрицательных чисел.**

Эти виды чисел используются в современной математике. Причем комплексные числа включают в себя все остальные виды чисел. Это множество чисел наиболее широкое, хотя и оно также может расширяться.

Диаграмма Эйлера-Венна для числовых множеств



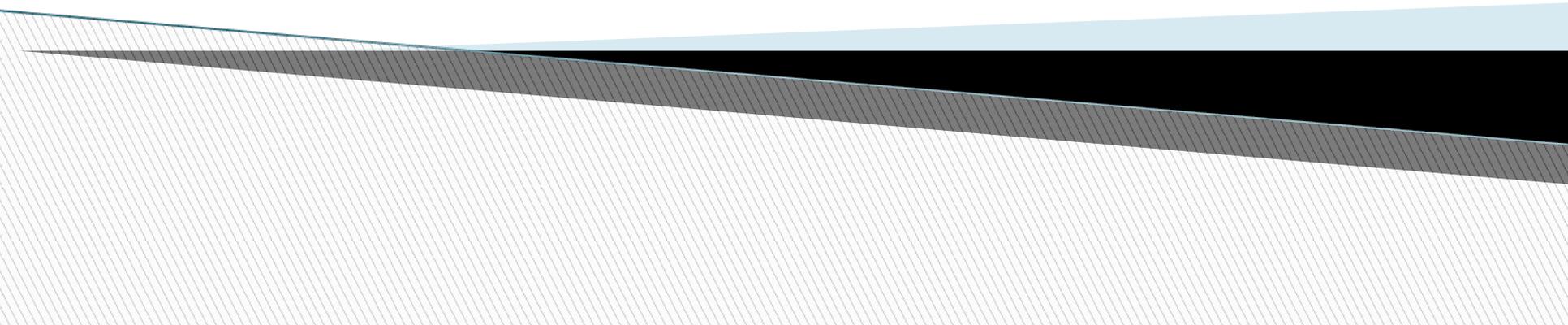
Универсальное множество I

- ▣ Определение: Универсальным множеством I называется множество, подмножества которого (и только они) в данный момент рассматриваются.
- ▣ Если $M \in I$, то $M \subseteq I$
- ▣ Универсальное множество может выбираться самостоятельно, в зависимости от рассматриваемого множества, и решаемых задач.

Примеры универсальных множеств

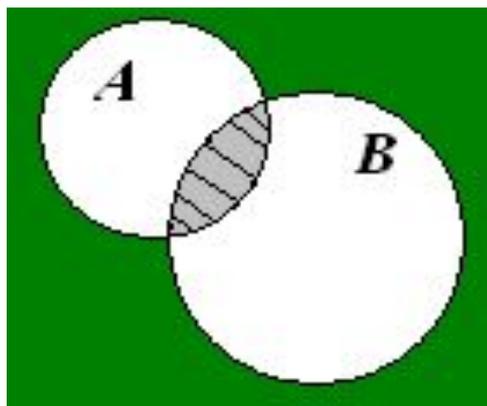
- ▣ Например:
- ▣ Рассматривая множество студентов вашей группы, в качестве универсального множества можно взять и множество студентов ВлГУ и множество всех людей земли, и множество всех живых существ земли.
- ▣ Рассматривая множество целых положительных чисел, в качестве универсального множества можно взять и множество целых чисел, и множество действительных чисел, и множество комплексных чисел, и само множество целых положительных чисел.

Операции над множествами



1. Пересечение множеств $A \cap B$

Пересечением множества A и B называют множество, состоящие из всех общих элементов множеств A и B ($A \cap B$).



Например,

а) $A = \{3; 9; 12\}$ и $B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$, то $A \cap B =$
 $\{3; 9\};$

б) $A = \{10; 20; \dots; 100\}$ и $B = \{6; 12; 18; \dots\}$, то $A \cap B =$
 $\{30; 60; 90\}.$

Непересекающиеся

множества

▣ Определение: Множества называются непересекающимися, если не имеют общих элементов, т.е. их пересечение равно пустому множеству.

▣ Например:

а) непересекающимися множествами являются множества отличников группы и неуспевающих.

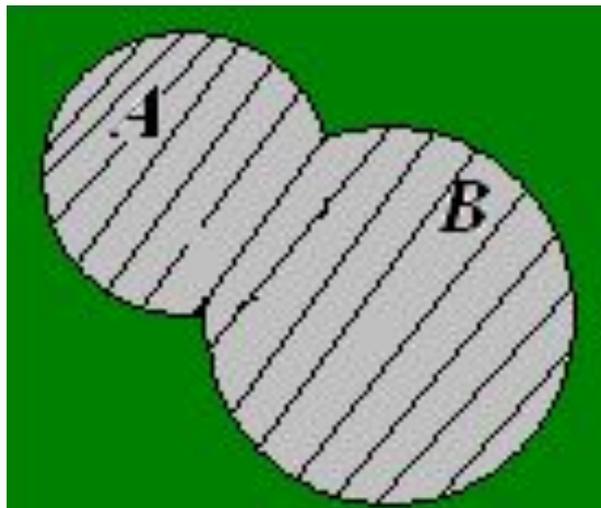
б) непересекающимися множествами являются множества $A = \{3; 9; 12\}$ и $B = \{1; 5; 7; 11\}$.

Свойства пересечения

- ▣ $X \cap Y = Y \cap X$ - коммутативность;
- ▣ $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap Z$ - ассоциативность;
- ▣ $X \cap \emptyset = \emptyset$;
- ▣ $X \cap I = X$;

2. Объединение множеств $A \cup B$

Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.



Например,

$A = \{3; 9; 12\}$ и $B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$, $A \cup B = ?$

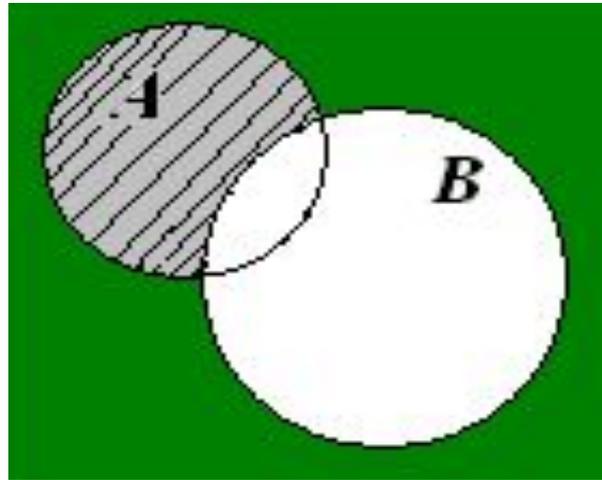
$A \cup B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 12\}$.

Свойства объединения

- ▣ $XUY = YUY$ - коммутативность;
- ▣ $(XUY)UZ = XU(YUZ) = XUYUZ$ - ассоциативность;
- ▣ $XU\emptyset = X$;
- ▣ $XUI = I$.

3. Разность множеств $A \setminus B$

Разность A и B это множество элементов A , не принадлежащих B .



Например,

$A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ и $B = \{5; 10; 15; 20\}$,

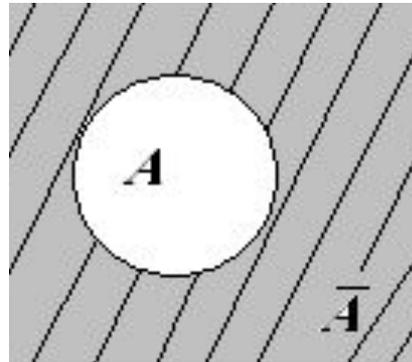
$A \setminus B = \{2; 4; 6; 8\}$.

Свойства операции разности

- $A \setminus B \neq B \setminus A;$
- $A \setminus A = \emptyset;$
- $A \setminus \emptyset = A;$
- $I \setminus A = \bar{A}.$

4. Дополнение множеств \bar{A}

Дополнением множества A называется разность $I \setminus A$. То есть, дополнением множества A называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества, не принадлежащих множеству A .



Например, $A = \{3; 6; 9; 12\}$ и $I = N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$, $\bar{A} = ?$

$$\bar{A} = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; \dots\}.$$

Свойства дополнения

1. Множество X и его дополнение не имеют общих элементов

$$X \cap \bar{X} = \emptyset$$

2. Любой элемент I принадлежит или множеству X или его дополнению.

$$X \cup \bar{X} = I$$

3. Закон двойного отрицания

$$\overline{\bar{X}} = X$$

Декартово произведение множеств

Фабрика верхнего трикотажа изготавливает мужские пуловеры, женские костюмы, кофты и платья следующих расцветок: бордо, синяя, голубая, зеленая, коричневая, серая.

Посмотрим, какие изделия можно получить, учитывая возможные для них расцветки.

Обозначим через A множество видов изделий: $A = \{\text{мужской пуловер, женский костюм, кофта, платье}\}$, через B – множество предлагаемых расцветок: $B = \{\text{бордо, синяя, голубая, зеленая, коричневая, серая}\}$.

Составим список всех пар из элементов множества A и элементов множества B таким образом, что сначала будем записывать элемент множества A , затем элемент множества B . получим множество C упорядоченных пар элементов множеств A и B . Возможные изделия можно перечислить с помощью таблицы.

Декартово произведение множеств

А В	Мужской пуловер	Женский костюм	Кофта	Платье
Бордо	Пуловер- бордо	костюм- бордо	Кофта-бордо	Платье- бордо
Синяя	Пуловер- синий			
Голубая				
Зеленая			Кофта- зеленая	
Коричневая				Платье- коричневое
Серая		Костюм- серый		

Определение декартова произведения

Декартовым (или прямым) произведением $A \times B$ множества A на множество B называется множество всех упорядоченных пар, в которых первая компонента – элемент множества A , а вторая – элемент множества B .

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Количество элементов в декартовом произведении двух множеств:

если $m(A)=n$, $m(B)=k$, то $m(A \times B)=n \cdot k$.

Пример декартова произведения

Вычислить количество двухзначных чисел.

Двухзначное число можно принять за упорядоченную пару, где на первом месте может стоять цифра из множества $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, а на втором – из множества $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, т.е. за элемент прямого произведения этих множеств, тогда получаем: $m(A)=9$, $m(B)=10$, то $m(A \times B)=9 \cdot 10=90$.

Итак, всего имеется 90 различных двухзначных чисел.

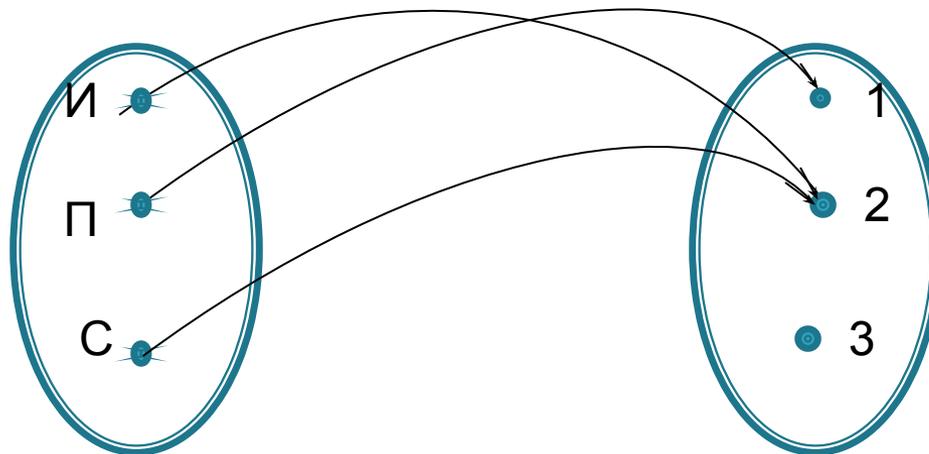
Соответствие множеств

- ▣ **Определение.** Будем говорить, что между элементами двух множеств A и B установлено соответствие ρ , если в их произведении $A \times B$ выделено некоторое подмножество Ω . Если пара $(a, b) \in \Omega \subseteq A \times B$, это означает по определению, что элементы a и b множеств A и B находятся в отношении ρ (пишется $a\rho b$).
- ▣ **Пример соответствия.** Пусть даны множества A – студентов и B – множество групп. Утверждение “студент a учится в группе b ” задает соответствие между множеством студентов и множеством групп. Здесь a пробегает множество значений A , b – множество значений B . Такое соотношение называется бинарным соответствием, т.е. соответствием между двумя множествами A и B .

Пример соответствия множеств

Бинарные соответствия можно задавать таблицами (например, расписание занятий) или ориентированными графами.

Группы Студенты	1	2	3
Иванов			
Петров			
Сидоров			

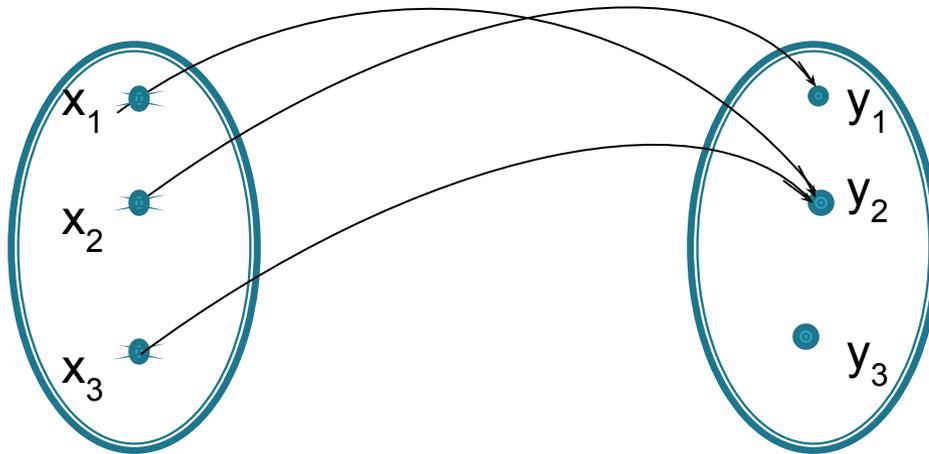


Отображение множеств f :

$X \rightarrow Y$
Определение. Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то такое соответствие называется отображением множества X в множество Y . Т.е., каждому элементу x соответствует только один элемент y .

При таком отображении множества X в множество Y , элемент $y \in Y$ называется **образом** элемента $x \in X$, а элемент $x \in X$ называется **прообразом** элемента $y \in Y$.

Пример. Пусть X – множество студентов в аудитории, Y – множество столов в этой аудитории. Соответствие “студент x сидит за столом y ” задает отображение множества X в множество Y , так как все студенты сидят за столом, иногда по двое, по трое и т.д., но есть и пустые столы.



Сюръективное отображение

Определение. Если при отображении f каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента из X , то f называют отображением X на Y или сюръективным (рис.15).

Пример 3.5 Пусть X – множество студентов, Y – множество книг. Соответствие “студенту x принадлежит книга y ” задает сюръективное отображение множества X на множество Y . Это очевидно, так как каждая книга принадлежит одному или нескольким студентам, а некоторые студенты книг не имеют.

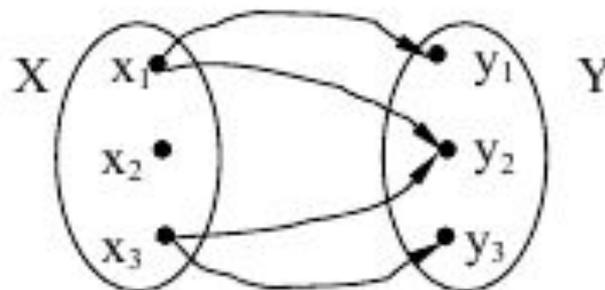


Рис.15

Инъективное отображение

Опр 3.11 Если при отображении f все различные элементы множества X переходят в различные элементы множества Y , то отображение f называется инъективным отображением (рис.16).

Пример 3.6 Пусть X – множество студентов, Y – множество стульев.

Соответствие “студент x сидит на стуле y ” задает инъективное отображение между множествами X и Y . Это очевидно, так как все студенты сидят на стульях, причем каждый на своем, но в аудитории есть и пустые стулья.

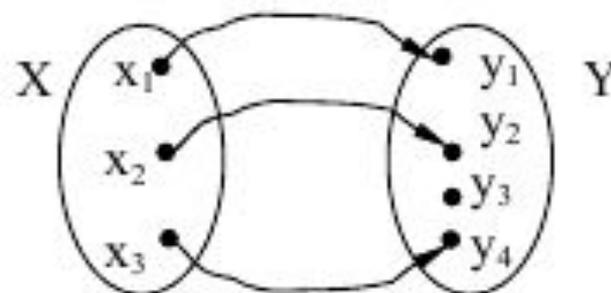


Рис.16

Взаимно-однозначное соответствие

Определение. Если при отображении f каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один элемент $y \in Y$, при этом соответствию каждому элементу $y \in Y$ соответствует единственный элемент $x \in X$, то такое отображение называется взаимно-однозначным (рис.17).

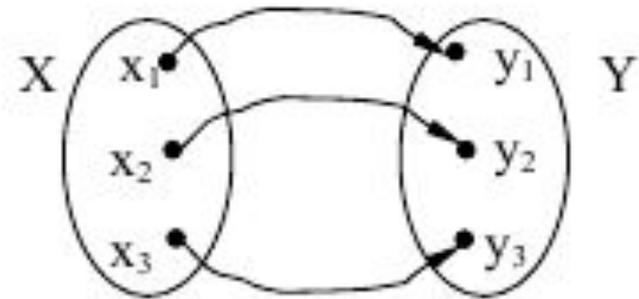
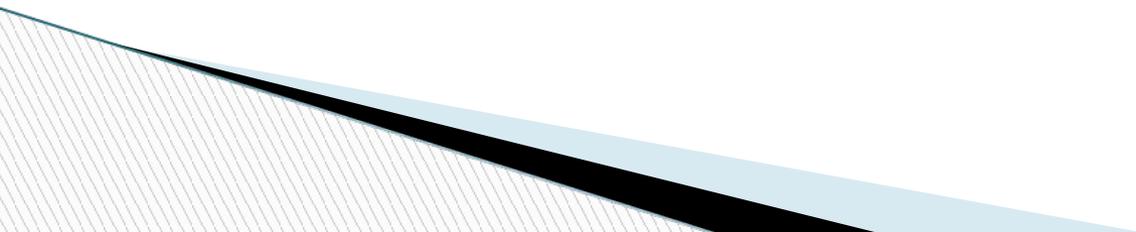


Рис.17

Пример 3.7 Пусть X – множество студентов, Y – множество зачетных книжек. Соответствие “студенту x принадлежит зачетная книжка y ” задает взаимно-однозначное отображение между множествами X и Y . Это очевидно, так как все студенты имеют зачетные книжки, причем каждый только одну и каждая зачетная книжка принадлежит своему студенту.

Задания



Задание 1

1) Задайте множество цифр, с помощью которых записывается число:

а) 3254; б) 8797; в) 11000; г) 555555.

2) Задайте множество A описанием:

а) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; б) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;

в) $A = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$;

г) $A = \{0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \dots\}$;

д) $A = \{1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \dots\}$.

3) Задание с выбором ответа. Даны множества: $M = \{5,4,6\}$, $P = \{4,5,6\}$, $T = \{5,6,7\}$, $S = \{4, 6\}$.

Какое из утверждений неверно?

а) $M = P$. б) $P \neq S$. в) $M \neq T$. г) $P = T$.

Задание 2

1. Запишите на символическом языке следующее утверждение:

- а) число 10 – натуральное;
- б) число – 7 не является натуральным;
- в) число – 100 является целым;
- г) число 2,5 – не целое.

2. Верно ли, что:

- а) $-5 \in \mathbb{N}$;
- б) $-5 \in \mathbb{Z}$;
- в) $2,45 \in \mathbb{Q}$?

3. Верно ли, что:

- а) $0,7 \in \{x \mid x^2 - 1 < 0\}$;
- б) $-7 \in \{x \mid x^2 + 16x \leq -64\}$?

Задание 3

1. Даны множества:

$$A = \{10\}, B = \{10, 15\}, C = \{5, 10, 15\}, D = \{5, 10, 15, 20\}.$$

Поставьте вместо ... знак включения или так,

чтобы получилось верное утверждение:

а) $A \dots D$; б) $A \dots B$; в) $C \dots A$; г) $C \dots B$.

2. Даны три множества $A = \{1, 2, 3, \dots, 37\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$,

$$C = \{4, 8, 12, 16, \dots, 36\}.$$

Верно ли, что:

а) $A \dots B$; б) $B \dots C$; в) $C \dots A$; г) $C \dots B$?

Задание 4

1. Даны множества: $A = \{2; 3; 8\}$, $B = \{2; 3; 8; 11\}$,
 $C = \{5; 11\}$.

Найдите: 1) $A \cap B$; 2) $A \cap C$; 3) $C \cap B$.

2. Даны множества: A – множества всех натуральных чисел, кратных 10, $B = \{1; 2; 3; \dots, 41\}$.

Найдите $A \cap B$.

3. Даны множества: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$,
 $C = \{c, e, g, k\}$. Найдите $(A \cap B) \cap C$.

Задание 5

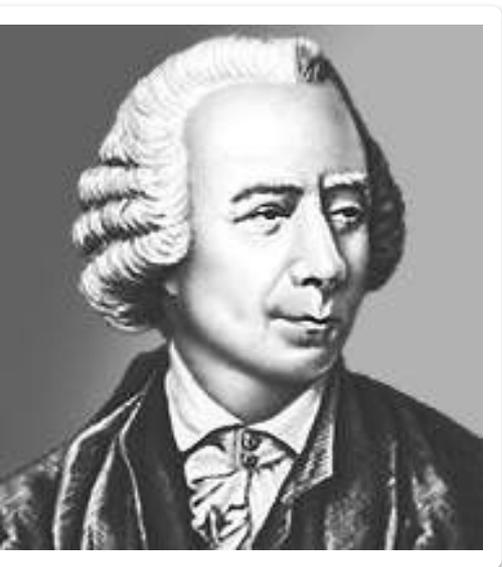
1. Даны множества: $A = \{2; 3; 8\}$, $B = \{2; 3; 8; 11\}$,
 $C = \{5; 11\}$.

Найдите: 1) $A \cup B$; 2) $A \cup C$; 3) $C \cup B$.

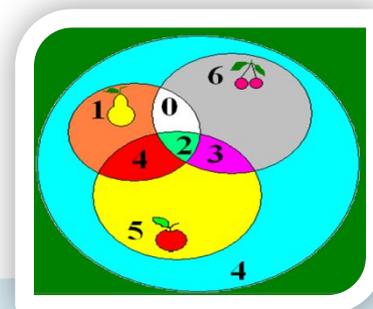
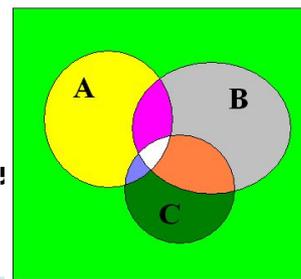
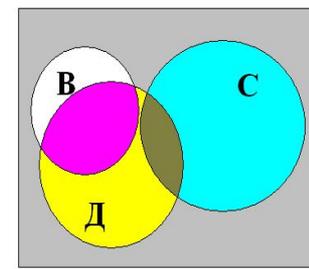
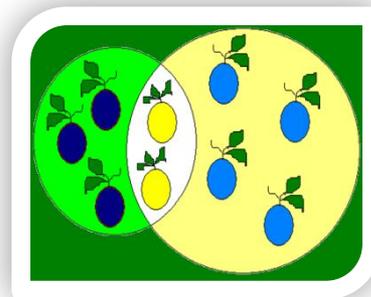
2. Даны множества: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$,
 $C = \{c, e, g, k\}$.

Найдите $(A \cup B) \cup C$.

Решение задач с помощью кругов Эйлера

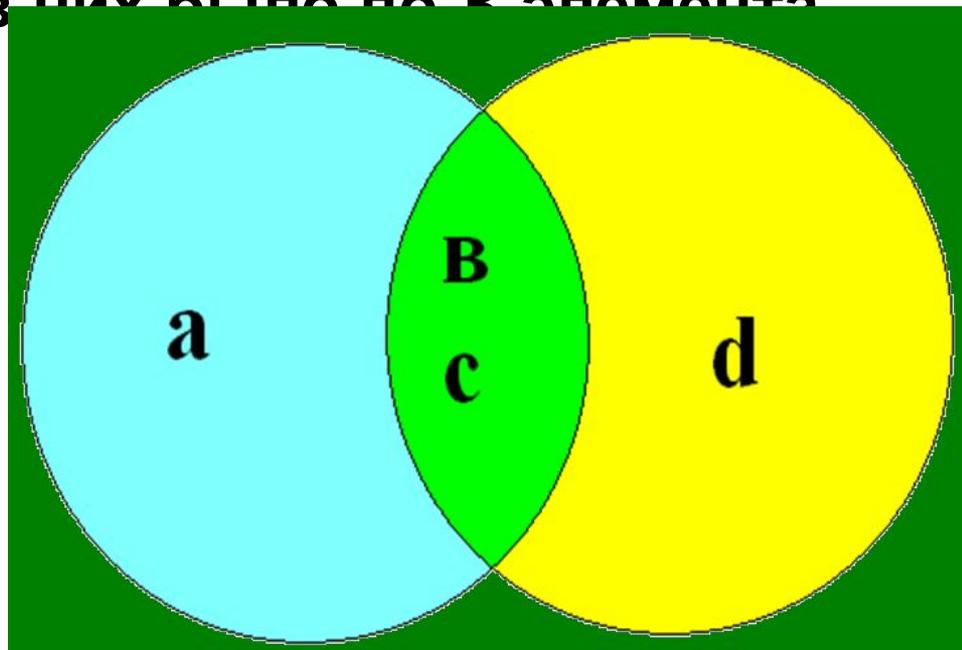


ЭЙЛЕР Леонард (1707-1783),
российский ученый — математик,
механик, физик и астроном.



Задача 1

Расположите 4 элемента в двух множествах так, чтобы в каждом из них было по 3 элемента

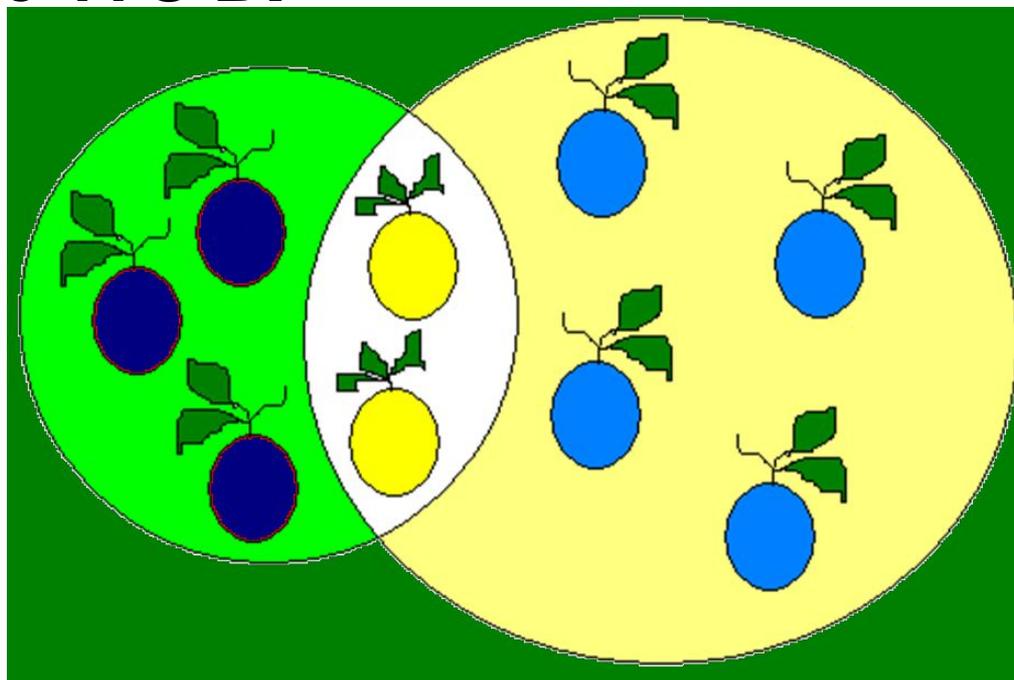


Задача 2

Множества A и B содержат соответственно 5 и 6 элементов,

а множество $A \cap B$ – 2 элемента. Сколько элементов в

множестве $A \cup B$?



Задача 3

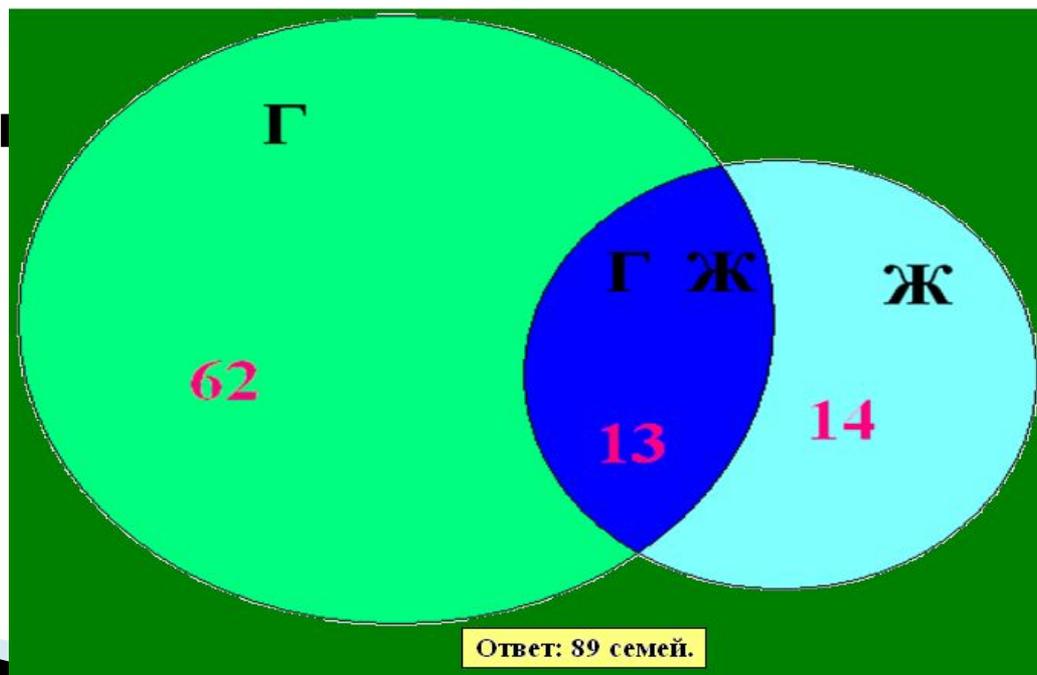
Каждая семья, живущая в нашем доме,
выписывает или

газету, или журнал, или и то и другое вместе. 75
семей

выписывают газету, а 27 семей выписывают
журнал и лишь

13 семей
семей жи

. Сколько



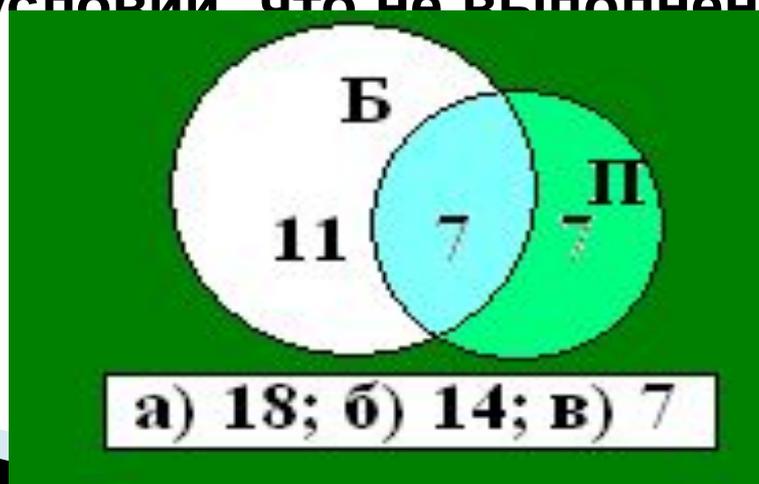
Задача 4

На школьной спартакиаде каждый из 25 учеников 9 –го класса выполнил норматив или по бегу, или по прыжкам в

высоту. Оба норматива выполнили 7 человек, а 11 учеников

выполнили норматив по бегу, но не выполнили норматив

по прыжкам в высоту. Сколько учеников выполнили норматив: а) по бегу; б) по прыжкам в высоту; в) по прыжкам при условии, что не выполнен норматив по бегу?



Задача 5

Из 52 школьников 23 собирают значки, 35 собирают марки, а 16 – и значки, и марки. Остальные не увлекаются коллекционированием. Сколько школьников не увлекаются коллекционированием?

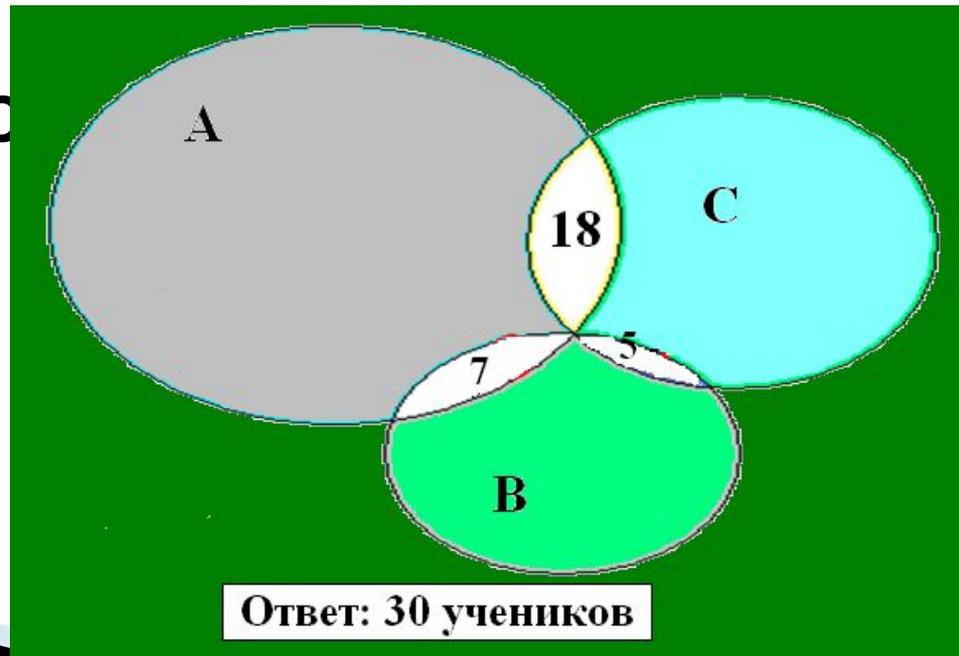


$$52 - (7 + 16 + 19) = 10$$

Ответ: 10 школьников.

Задача 6

Каждый из учеников 9-го класса в зимние каникулы ровно два раза был в театре, посмотрев спектакли А, В или С. При этом спектакли А, В, С видели соответственно 25, 12 и 23 ученика. С



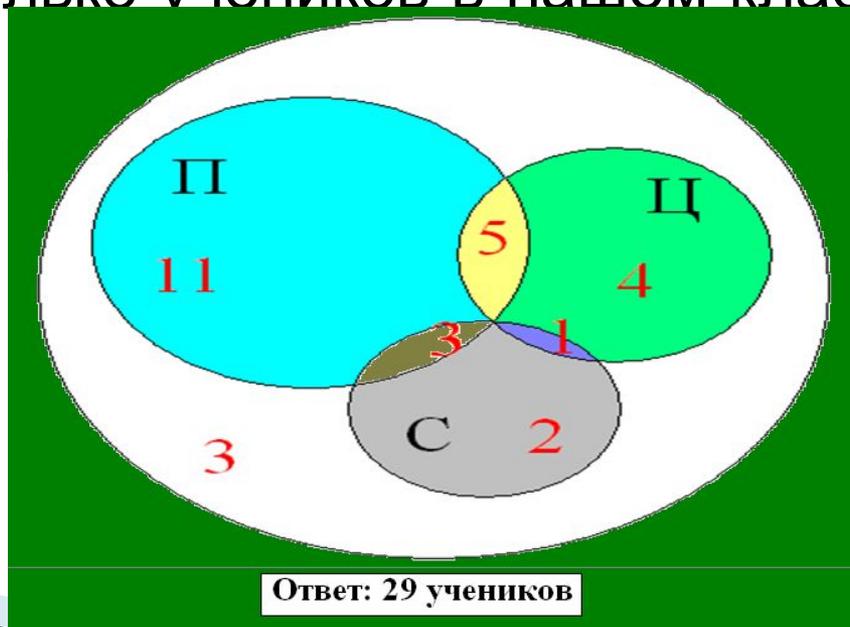
Задача 7

В воскресенье 19 учеников нашего класса побывали в планетарии, 10 – в цирке и 6 – на стадионе.

Планетарий и цирк посетили 5 учеников; планетарий и стадион-3; цирк и стадион -1.

Сколько учеников в нашем классе, если никто не

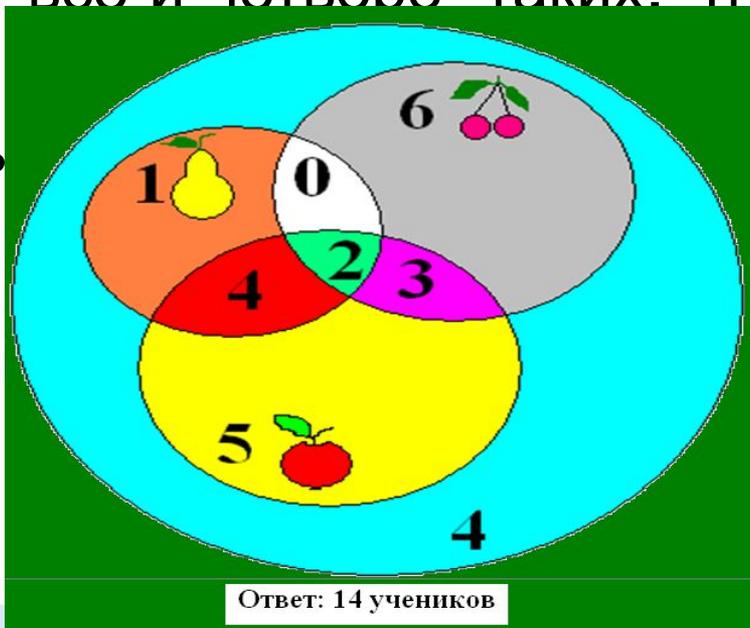
успел посетить посетили ни одного места?



Ответ: 29 учеников

Задача 8

В одном классе 25 учеников. Из них 7 любят груши, 11 – черешню. Двое любят груши и черешню; 6 – груши и яблоки; 5 – яблоки и черешню. Но есть в классе два ученика, которые любят всё и четверо таких, что не любят фруктов вообще. Сколько учеников любят яблоки?



Задача 9

На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников 9-го класса читал книги А, В, С. Результаты опроса выглядели так: книгу А прочитали 25 учеников, книгу В – 22 ученика, книгу С – 22 ученика; одну из книг А

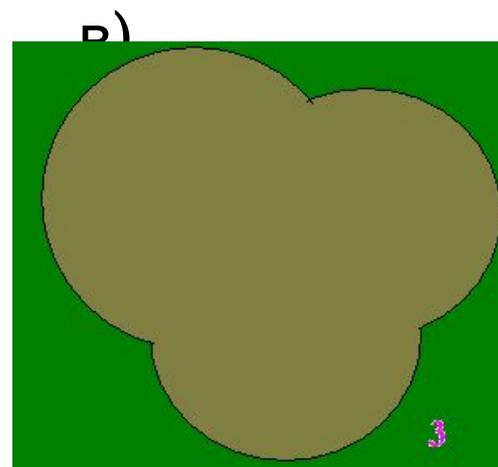
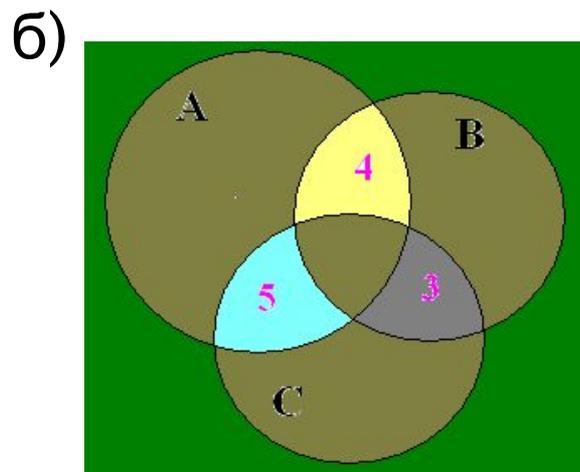
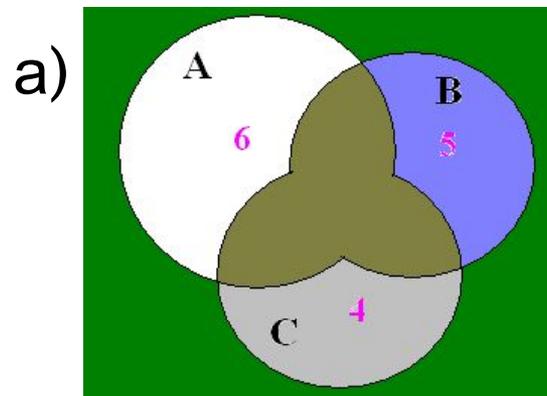
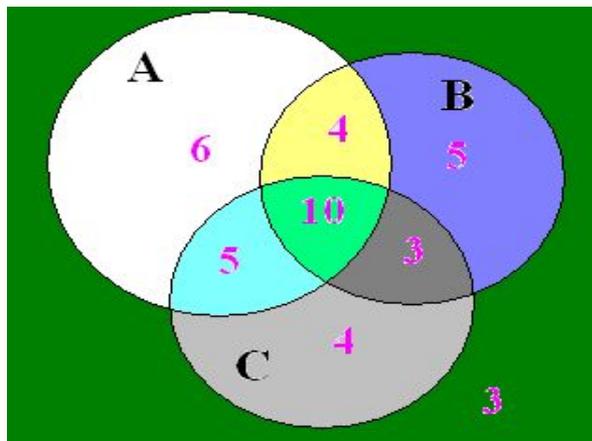
или В прочитали 33 ученика, одну из книг А или С прочитали 32 ученика, одну из книг В или С – 31 ученик.

Все три книги прочитали 10 учеников.

Сколько учеников:

- а) прочитали только по одной книге;
- б) прочитали ровно две книги;
- в) не прочили ни одной из указанных книг?

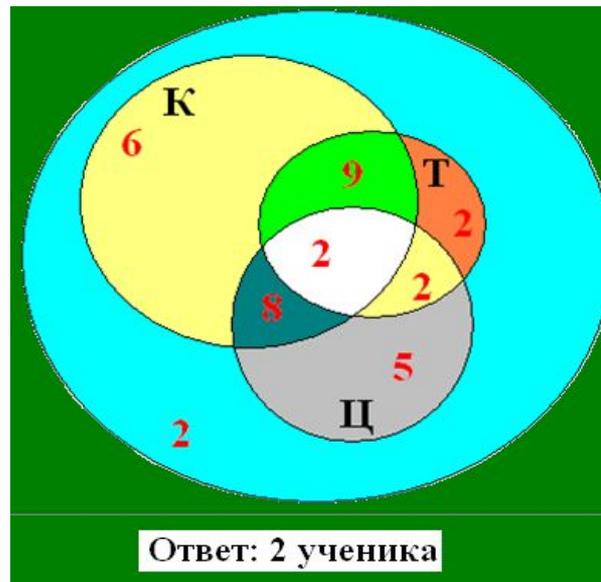
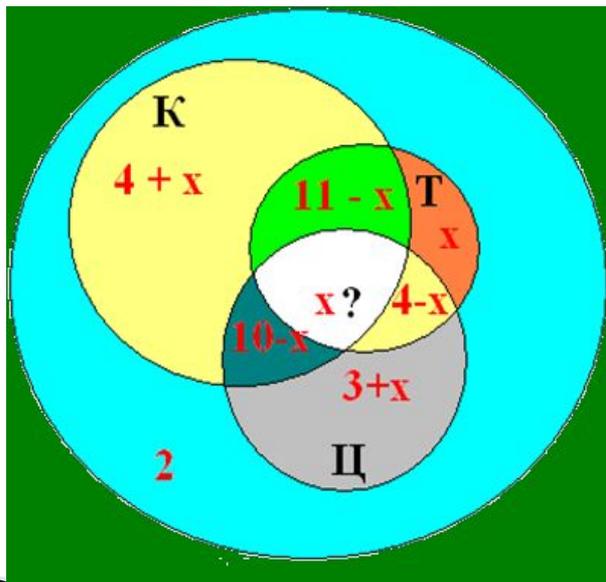
Задача 9. Решение



Задача 10

На зимних каникулах из 36 учащихся класса только двое просидели дома, а 25 ребят ходили в кино, 15 – в театр, 17 – в цирк. Кино и театр посетили 11 человек, кино и цирк – 10, театр и цирк – 4.

Сколько ребят побывало и в кино, и в театре, и в цирке?



Литература

- [1] Алгебра, 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А. Г. Мордкович, Л.А. Александрова и др.] -12-е изд., испр. - М.: Мнемозина, 2010.
- [2] Занимательная математика. 5 – 11 классы. Авт.- сост. Т.Д. Гаврилова. – Волгоград: Учитель, 2005. – 96 с.
- [3] Математика 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б. Суворова и др./; под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». – 11 – е изд. - М.: Просвещение, 2010. – 303 с.: ил.

Связь между алгеброй логики и теорией множеств

- Дело в том, что термин **алгебра** в своем роде имя нарицательное. Под ним понимается раздел математики, изучающий алгебраические операции, а природа объектов, к которым применяются эти операции, не важна. Говоря об алгебре логики или об алгебре множеств, мы более всего уделяли внимание операциям, определенным над допустимыми в данной теории объектами, свойствам этих операций. Еще одним хорошо известным вам примером алгебры, является **алгебра чисел**, к которой все выписанные законы также применимы. Проводя аналогии между этими алгебрами, мы можем сказать

	Алгебра чисел	Алгебра логики	Алгебра множеств
Объекты	Числа	Высказывания	Множества
Операция +	Сложение	Дизъюнкция	Объединения
Операция *	Умножение	Конъюнкция	Пересечение
Нулевой элемент	0	Ложь	Пустое множество
Единичный элемент	1	Истина	Универсальное множество