

**Лектор Буганова С.
Н.**

Прямая в пространстве

**Дисциплина Математика 1
Лекция 6
2016-17 учебный год**

План лекции

- 1. Основные уравнения*
- 2. Взаимное расположение прямых в пространстве*
- 3. Расстояние от точки до прямой в прост*
- 4. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве*

1. Прямая в пространстве. Основные уравнения

1. Уравнение прямой, проходящей через заданную

точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно заданному вектору

$$\vec{s} = \{m; n; p\}$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

- канонические уравнения

$\vec{s} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор

$$\vec{s} = \{m; n; p\}$$



2. Параметрические уравнения

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t,$$

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

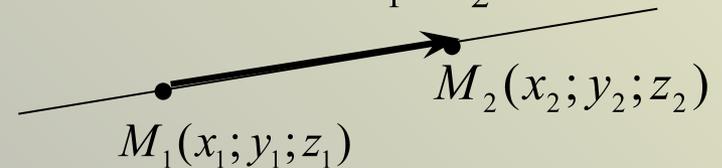
$$M_0(x_0; y_0; z_0)$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные

точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$$

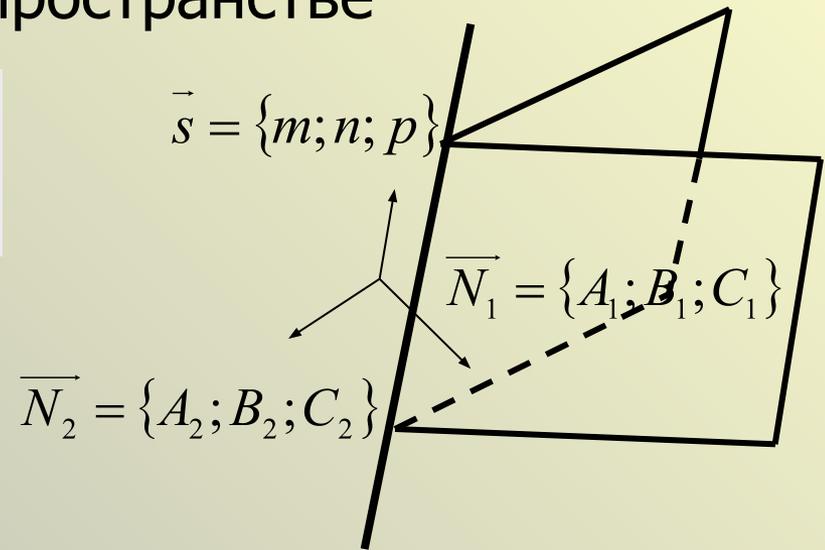
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$



Прямая в пространстве. Основные уравнения

4. Общее уравнение прямой в пространстве

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



а) Направляющий вектор

$$\vec{s} = [\vec{N}_1 \times \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

б) Нахождение точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z_0 - D_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2z_0 - D_2 \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

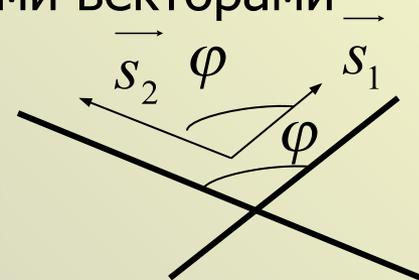
- канонические уравнения прямой

Взаимное расположение прямых в пространстве

1. Нахождение угла между прямыми.

Прямые в пространстве заданы каноническими уравнениями, поэтому угол между прямыми – это угол между направляющими векторами \vec{s}_1 и \vec{s}_2 .

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

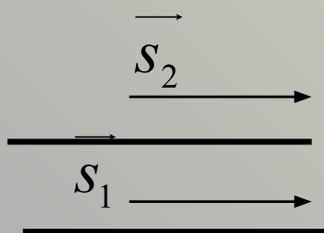


2. Проверка условий параллельности и перпендикулярности прямых

Условие параллельности прямых

$$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

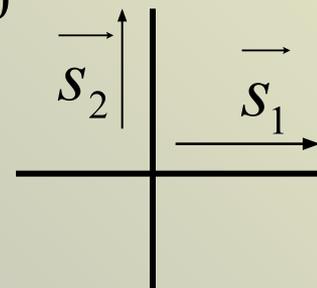


Условие перпендикулярности прямых

$$\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$$

$$(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) = 0$$

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

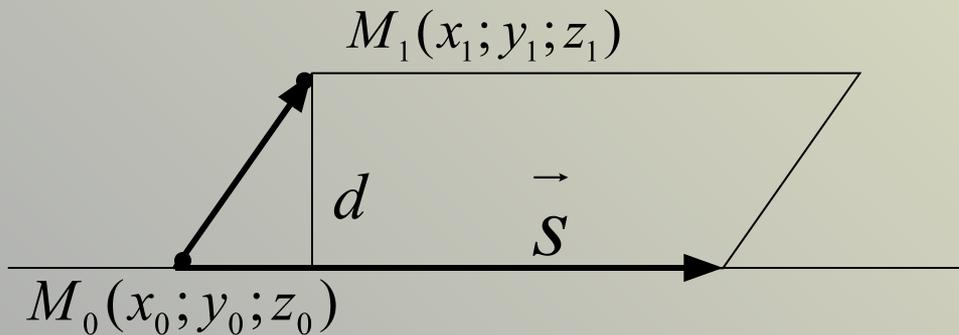


Расстояние от точки до прямой в пространстве

Задача о нахождении расстояния от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$

до прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$

решается так же, как в векторной алгебре находилась высота параллелограмма, построенного на двух известных векторах.



На векторах $\vec{M_0M_1} = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$ и $\vec{s} = \{m; n; p\}$ строим параллелограмм.

Высота этого параллелограмма и есть искомое расстояние.

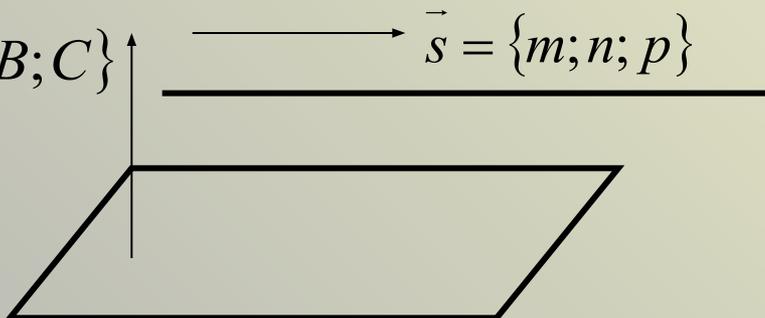
Высоту находим как отношение площади параллелограмма к длине основания. Площадь параллелограмма – это модуль векторного произведения векторов, а длина основания – это длина вектора \vec{s}

$$d = \frac{\left| \left[\vec{M_0M_1} \times \vec{s} \right] \right|}{|\vec{s}|}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

1. Условие параллельности прямой и плоскости

$$\vec{N} = \{A; B; C\}$$

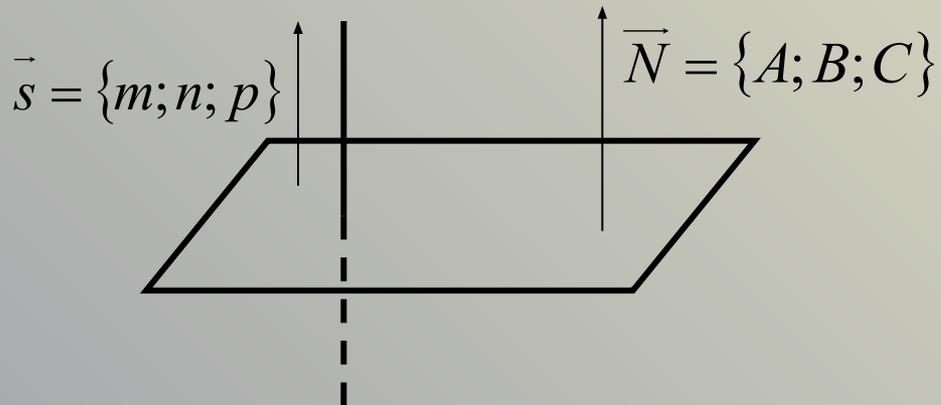


$$\vec{s} \perp \vec{N} \quad (\vec{N} \cdot \vec{s}) = 0$$

$$Am + Bn + Cp = 0$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

2. Условие перпендикулярности прямой и плоскости

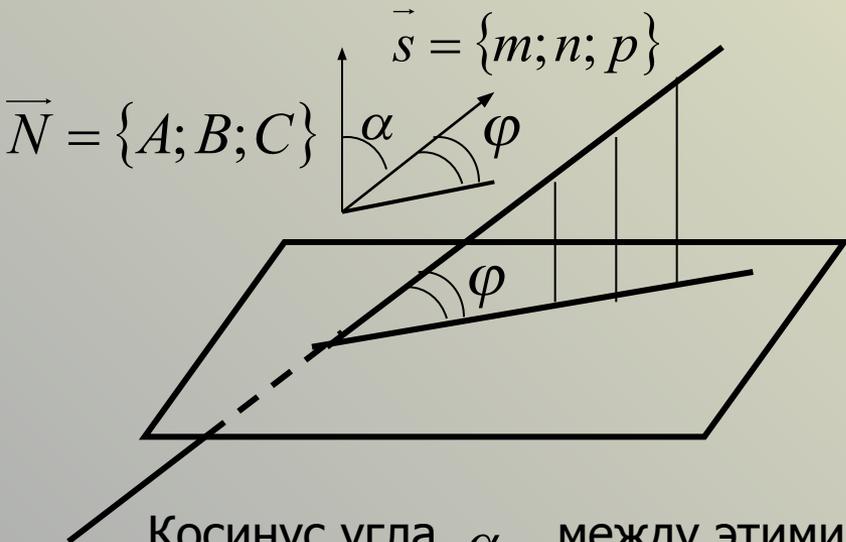


$$\vec{N} \parallel \vec{s}$$

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

3. Нахождение угла между прямой и плоскостью



Углом между прямой и плоскостью считается угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость. На рисунке это угол φ .

Из уравнений прямой и плоскости известны направляющий вектор прямой и вектор нормали плоскости.

Косинус угла α между этими векторами легко можно найти.

Легко заметить, что углы φ и α в сумме дают 90 градусов, а значит $\cos \alpha = \sin \varphi$

Поэтому при нахождении угла между прямой и плоскостью находят не косинус, а синус угла. Кроме того, в формуле стоит модуль, так как синус угла в данной ситуации может быть только положительным

$$\sin \varphi = \frac{|(\vec{N} \cdot \vec{s})|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Нахождение точки пересечения прямой и плоскости

Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости нужно составить систему из уравнений прямой и плоскости

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Для того, чтобы решить систему, переводим уравнение прямой в параметрический вид

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

Подставляем эти уравнения в уравнение плоскости

$$A(mt + x_0) + B(nt + y_0) + C(pt + z_0) + D = 0$$

Из этого уравнения находим параметр t и подставляем его значение в параметрические уравнения, получим координаты точки пересечения

Задание на СРС

1. Линии второго порядка на плоскости. Реферат[1,3]
2. Уравнение линии второго порядка в пространстве.[3,6]

Задание на СРСП

1. ИДЗ-3.1 [1- стр. 97].

Глоссарий

№	Қазақша	Русский	English
1.	Түзу	Прямая	Line
2.	Канондық	Каноническое	Canon
3.	Параметрлік	Параметрическое	Parameter
4.	Өту	Переход	Passage

Литература:

Основная

А.П. Рябушко. Индивидуальные задания по высшей математике, т.1.- Мн.: Выш. Школа, 2011.
Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для втузов.
- М.: Оникс, 2007.

Дополнительная

Буганова С.Н. Математика для технических специальностей с применением прикладных программ.
- Алматы: КазГАСА, 2015, с.108.

Сыдыкова Д.К. «Курс Математики- I», Модуль I, II для дистанционного обучения. Электронный учебник.-Алматы: КазГАСА, 2012.

www.studentlibrary.ru

<http://sferaznaniy.ru/vyshshaya-matematika>.