§ 2. Определители

- Каждой квадратной м. *A* можно поставить в соответствие число, которое называется ее *определителем* и обозначается *det A*, или $|A|$ символом Δ.
- Определитель матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ вычисляется по правилу:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Вычисление определителей третьего порядка (правило треугольников и правило Саррюса)

- Определитель квадратной матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

вычисляется по правилу треугольников:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{11}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Правило Саррюса (модифицированное правило треугольников)

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} =$$

$$\begin{array}{ccccc} - & - & - & & \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + +a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Свойства определителей матриц

1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы.
2. Если в определителе поменять местами две строки (два столбца), то определитель меняет знак.
3. Если все элементы одной строки (столбца) определителя пропорциональны (в частности, равны) соответствующим элементам другой строки (столбца), то он равен нулю.

4. Если в определителе строка (столбец) состоит из нулей, то определитель равен нулю.

5. Общий множитель у элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

6. Определитель не изменится, если ко всем элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

7. Определитель диагональной и треугольной (верхней или нижней) матриц равен произведению диагональных элементов.
8. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
9. Если всякий элемент любой строки (столбца) представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых в соответствующей строке (столбце) оставлены первые слагаемые, а во втором – вторые.

Минор и алгебраическое дополнение

- Опр 1. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-порядка называется определитель (n-1) порядка, полученный вычеркиванием i- строки и j – столбца из исходного определителя.
- Опр. 2. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n – порядка наз. число, вычисляемое по правилу:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Теорема разложения

- *Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов любой его строки (или столбца) и соответствующих им алгебраических дополнений*

$$\left|A\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in} \qquad \boldsymbol{i = \overline{1, n}}$$

(разложение по i-строке)

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj} \qquad j = \overline{1, n}$$

(разложение по j-столбцу)