ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Тема № 11

РАЗДЕЛ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Посвящен всестороннему изучению линий на плоскости, плоскостей и линий в пространстве.

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Задача 1 (общее уравнение прямой на плоскости). Даны: точка $M_0(x_0, y_0)$ и вектор $\overline{N}\{A, B\}$. Требуется найти уравнение прямой α, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной вектору $\overline{N}$.

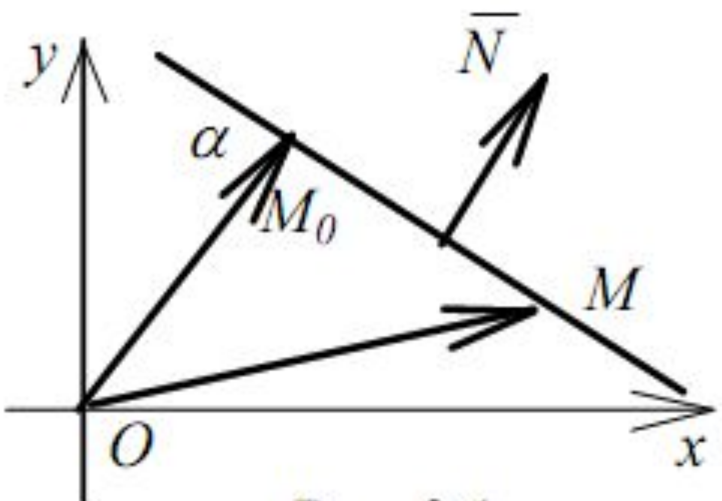


Рис. 3.1

Решение

$$\overline{OM_0} = \bar{r}_0 = \{x_0, y_0\}, \ \overline{OM} = \bar{r} = \{x, y\}$$

$$\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0 = \{x - x_0, y - y_0\}$$

$$\overline{M_0M} \subset \alpha, \ \overline{M_0M} \perp \overline{N}$$

Скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю:

$$\left(\overline{M_0M}, \overline{N}\right) = 0, \text{ или } \left(\bar{r} - \bar{r}_0, \overline{N}\right) = 0.$$

Это равенство является уравнением прямой в векторной форме

Вычисляя скалярное произведение, получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (3.1)$$

Выражение (3.1) – уравнение прямой, содержащей точку (x_0, y_0) и перпендикулярной вектору $\overline{N}\{A, B\}$ (координатная форма).

Раскрывая скобки в (3.1) получим *общее* уравнение на плоскости

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.2)$$

где $C = -Ax_0 - By_0 = -\left(\bar{r}_0, \overline{N}\right) = \text{const}.$

Уравнение прямой в отрезках

Преобразуя уравнение (3.2), можем получить ещё один вид уравнения прямой в E_2. Разделив на $(-C)$, имеем

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1, \text{ или } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (3.3)$$

Выражение (3.3) – уравнение прямой в отрезках,
где $a = -\frac{C}{A}$ – отрезок, отсекаемый прямой по оси Ox (рис. 3.2),
$b = -\frac{C}{B}$ – отрезок, отсекаемый прямой по оси Oy.

Уравнение (3.3) удобно для построения графика прямой линии

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \Leftrightarrow y = kx + b. \qquad (3.4)$$

Выражение (3.4) – *уравнение прямой с угловым коэффициентом*, где $k = -\frac{A}{B} = \operatorname{tg}\phi$ – угловой коэффициент, φ – угол между Ох и прямой, $b = -\frac{C}{B}$ – отрезок, отсекаемый прямой по оси Оу.

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Найти уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно направляющему вектору

Задача 2. Дано: точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $l\,\{m, n, p\}$. Найти уравнение прямой $\alpha \ni M_0$ и $\alpha \parallel \bar{l}$.

Из условия коллинеарности векторов

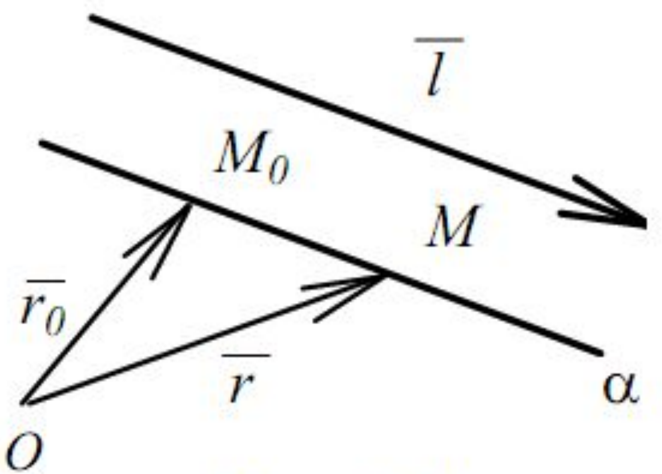


Рис. 3.4

$$\bar{r} = t\bar{l} + \bar{r}_0 \Rightarrow \begin{cases} x = tm + x_0, \\ y = tn + y_0, \\ z = tp + z_0. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Параметрическое уравнение

КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

$$\bar{r} = t\bar{l} + \bar{r}_0 \Rightarrow \begin{cases} x = tm + x_0, \\ y = tn + y_0, \\ z = tp + z_0. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Исключив параметр t из уравнений (3.5), получим канонические уравнения прямой

$$t = \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (3.6)$$

Здесь m, n, p – координаты направляющего вектора прямой, x0, y0, z0 – координаты фиксированной точки M0, принадлежащей прямой α.

Если одна из координат вектора равна нулю, то прямая (как и вектор) перпендикулярна соответствующей оси.

КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Замечание. В двухмерном пространстве E_2 задача 2 имеет решением прямую

$$\begin{cases} x = tm + x_0, \\ y = tn + y_0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Выражение (3.7) – *параметрическое уравнение прямой в двухмерном пространстве* (т.е. на плоскости);

$$t = \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{3.8}$$

Выражение (3.8) – *каноническое уравнение прямой в двухмерном пространстве.*

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ТОЧКИ

Задача 3. Найти уравнение прямой α, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

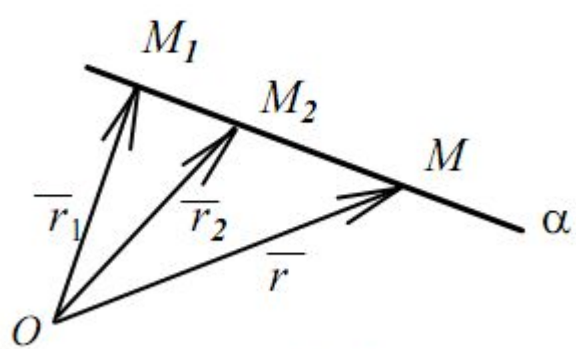


Рис. 3.5

$$\bar{l} = \overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$$

$$\bar{r} - \bar{r}_1 = \overline{M_1M} \parallel \overline{M_1M_2} \Rightarrow \bar{r} - \bar{r}_1 = t\bar{l}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \tag{3.9}$$

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ

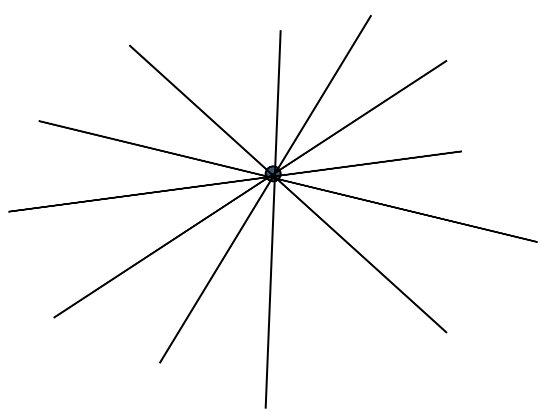
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (3.10)$$

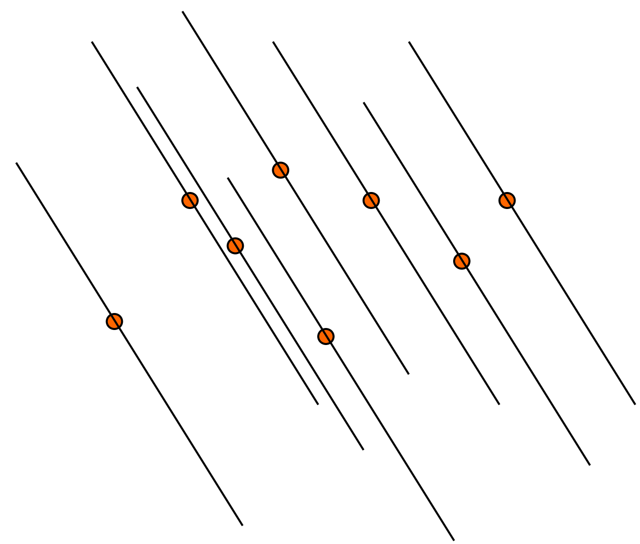
УРАВНЕНИЕ ПУЧКА ПРЯМЫХ

Из формулы (3.10) можно получить ещё один вид уравнения прямой на плоскости – *уравнение пучка*

$$y - y_1 = k(x - x_1), \qquad (3.11)$$

где $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ – угловой коэффициент прямой.





НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Рассмотрим векторную запись уравнения прямой на плоскости

$$\left(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{N}\right) = 0, \text{ или } \left(\bar{r}, \bar{N}\right) - \left(\bar{r}_0, \bar{N}\right) = 0.$$

$$\frac{\left(\bar{r}, \bar{N}\right)}{\left|\bar{N}\right|} - \frac{\left(\bar{r}_0, \bar{N}\right)}{\left|\bar{N}\right|} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{Ax + By}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \qquad (3.12)$$

где $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\alpha$, $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\bar{N}\{A, B\}$, $C = -\left(\bar{r}_0, \bar{N}\right)$.

Выражение (3.12) и есть *нормальное уравнение прямой*.

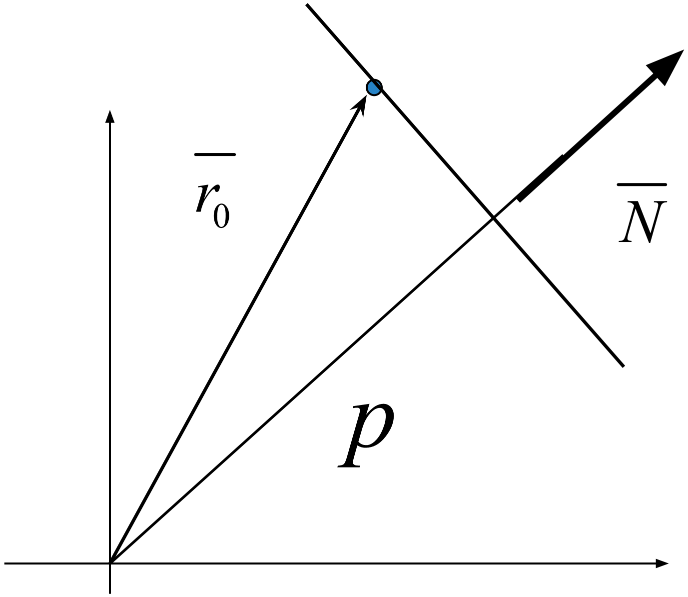
ВВЕДЁМ ОБОЗНАЧЕНИЕ

$$\frac{\bar{r}_0 \cdot \overline{N}}{\left|\overline{N}\right|} = \frac{x_0 A + y_0 B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = p, \qquad (3.13)$$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0. \qquad (3.14)$$

p>0

$$\text{пр}_{\overline{N}}\,\bar{r}_0 = \frac{\bar{r}_0 \cdot \overline{N}}{\left|\overline{N}\right|} = p,$$



РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Теорема 3.1. *Расстояние от точки K(x1, y1) до прямой* α *с уравнением* $Ax + By + C = 0$ *равно*

$$\rho(K, \alpha) = d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.15)$$

К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ

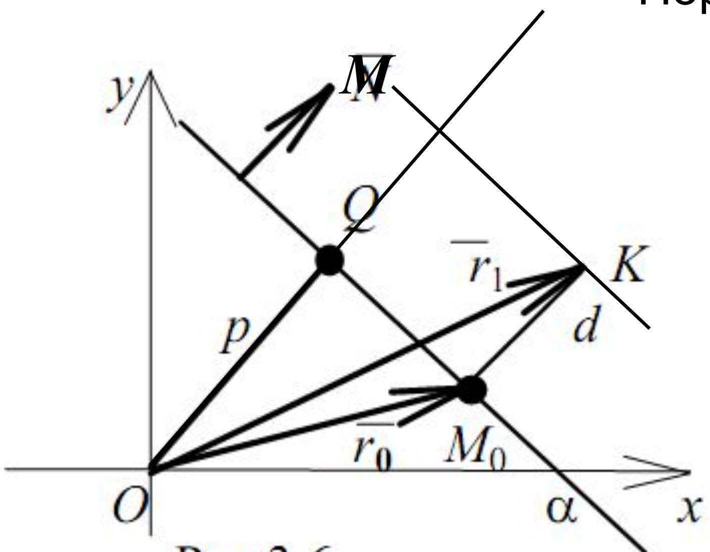


Рис.3.6

Нормальное уравнение прямой α:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

Нормальное уравнение прямой $M\|\alpha$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C_1}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

Обозначим

$$p=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}};\quad p_1=\frac{|C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Тогда $d=|p_1-p|$ или $d=\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x_1+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y_1+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|;$

так как $$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x_1+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y_1=-\frac{C_1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ПРАВИЛО

Чтобы найти расстояние от точки $K(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$,

надо нормировать уравнение, разделив его на

$-\sqrt{A^2 + B^2}$, с соответствующим знаком

и подставить в полученное уравнение координаты x_1, y_1.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

Иодко Евгений
3941-10/1-1