

*Особые приёмы решения
логарифмических
неравенств с переменной
в основании*

Занятие №1

*Методическая разработка
учителя Поляковой Е. А.*

**Неравенство, содержащее переменную под
знаком логарифма, называется
логарифмическим.**

Например, неравенства вида:

$$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x) \quad \log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$$

При $a > 0$, $a \neq 1$ являются логарифмическим

Решение простейших логарифмических неравенств:

$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \\ 0 < a < 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases}$$

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \\ 0 < a < 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases}$$

Решите неравенство: $\log_{2x-3} x > 1$

Решение традиционным способом

$$\log_{2x-3} x > 1 \Leftrightarrow \log_{2x-3} x > \log_{2x-3} (2x-3)$$

$$1) \quad \begin{cases} 2x-3 > 1 \\ x > 2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{2 < x < 3}$$

$$2) \quad \begin{cases} 2x-3 < 1 \\ 2x-3 > 0 \\ x < 2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 1,5 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \text{решений нет}$$

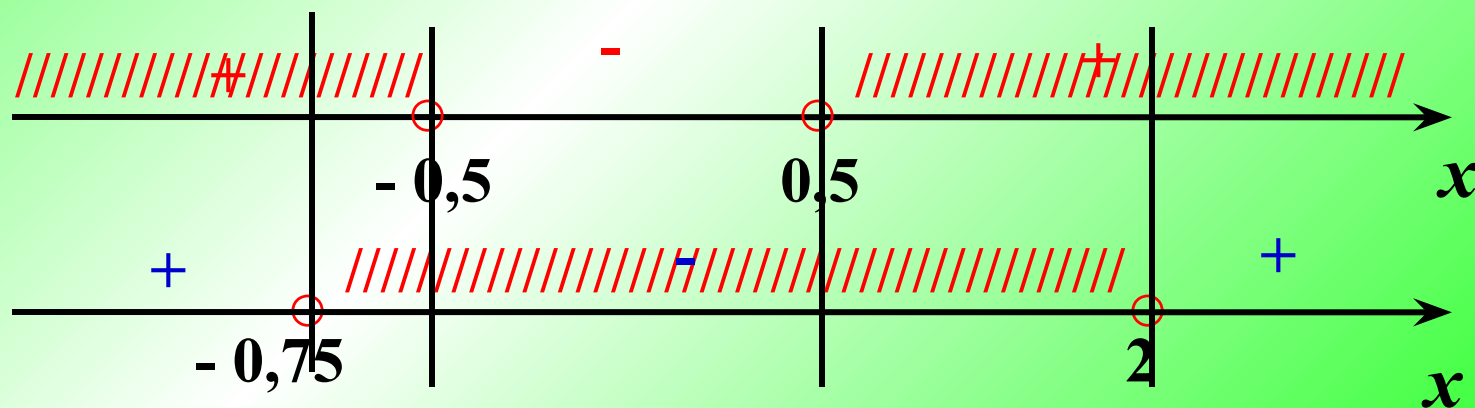
Ответ: (2; 3)

Решите неравенство: $\log_{4x^2} (5x + 6) > 1$

Решение традиционным способом

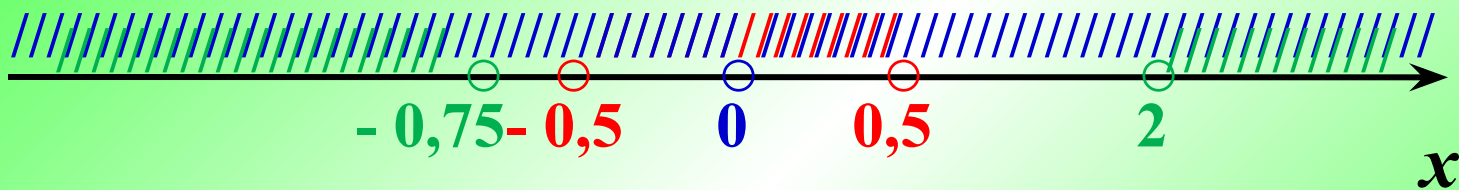
$$\log_{4x^2} (5x + 6) > 1 \Leftrightarrow \log_{4x^2} (5x + 6) > \log_{4x^2} 4x^2$$

1)
$$\begin{cases} 4x^2 > 1 \\ 5x + 6 > 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 1 > 0 \\ 4x^2 - 5x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - 1)(2x + 1) > 0 \\ 4(x + 0,75)(x - 2) < 0 \end{cases}$$



Решение системы: $-0,75 < x < -0,5$; $0,5 < x < 2$

$$2) \begin{cases} 4x^2 < 1 \\ 4x^2 > 0 \\ 5x - 6 < 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(2x+1) < 0 \\ x^2 > 0 \\ 4(x+0,75)(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,5 < x < 0,5 \\ x \neq 0 \\ x < -0,75; x > 2 \end{cases}$$



Очевидно, что у системы решений нет

Ответ: $-0,75 < x < -0,5; \quad 0,5 < x < 2.$

*Интересное заключение
о знаках
двух выражений*

Доказать, что выражения $\log_a b$ и $(b-1)(a-1)$ **одинаковых знаков.**

Доказательство. Докажем, например, что $\log_a b > 0$

и $(b-1)(a-1) > 0$ 1) Перейдём к основанию, например, 2

$$\log_a b = \frac{\log_2 b}{\log_2 a}; \quad 2) \text{ Неравенство } \log_a b > 0 \text{ перепишем в виде}$$

$\frac{\log_2 b}{\log_2 a} > 0.$ 3) Дробь положительна, если числитель и знаменатель **одинаковых знаков**, тогда

$$a) \begin{cases} \log_2 b > 0 \\ \log_2 a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 b > \log_2 1 \\ \log_2 a > \log_2 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 1 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-1 > 0 \\ a-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Логарифмическая функция с основанием 2 возрастающая, тогда $(b-1)(a-1) > 0$

$$\begin{aligned}
 \text{б)} \quad & \begin{cases} \log_2 b < 0 \\ \log_2 a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 b < \log_2 1 \\ \log_2 a < \log_2 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 1 \\ a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} b - 1 < 0 \\ a - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow (b - 1)(a - 1) > 0.
 \end{aligned}$$

Доказано, что выражения $\log_a b$ и $(b - 1)(a - 1)$
одинаковых знаков.

Это свойство используется при решении логарифмических неравенств, где выражение $\log_a b$ можно заменить выражением $(b - 1)(a - 1)$ того же знака

Чтобы не возникало проблем, **необходимо находить ОДЗ переменной**, так как формальная замена приводит к расширению области определения неравенства

Доказать, что при всех допустимых значениях переменной x

неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно
неравенству $(f - g)(h - 1) > 0$.

Доказательство. 1) Перейдём к основанию, например, 2

$$\log_h f = \frac{\log_2 f}{\log_2 h};$$

$$\log_h g = \frac{\log_2 g}{\log_2 h};$$

2) Неравенство $\log_h f(x) > \log_h g(x)$ перепишем в виде

$$\frac{\log_2 f}{\log_2 h} > \frac{\log_2 g}{\log_2 h} \Leftrightarrow \frac{\log_2 f - \log_2 g}{\log_2 h} > 0.$$

3) Дробь положительна, если числитель и знаменатель
одинаковых знаков, тогда

$$\text{а) } \begin{cases} \log_2 f - \log_2 g > 0 \\ \log_2 h > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 f > \log_2 g \\ \log_2 h > \log_2 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f > g \\ h > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Логарифмическая функция с основанием 2 возрастающая, тогда

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f - g > 0 \\ h - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow (f - g)(h - 1) > 0$$

$$\text{б) } \begin{cases} \log_2 f - \log_2 g < 0 \\ \log_2 h < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 f < \log_2 g \\ \log_2 h < \log_2 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f < g \\ h < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f - g < 0 \\ h - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow (f - g)(h - 1) > 0$$

Доказано - неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$
 равносильно неравенству $(f - g)(h - 1) > 0$ на ОДЗ

Решение логарифмических неравенств с применением доказанного свойства

Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно
неравенству $(f - g)(h - 1) > 0$ на ОДЗ

Аналогично неравенство $\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$
равносильно неравенству $(f - g)(h - 1) < 0$ на ОДЗ

Алгоритм решения неравенства $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$

1) Находим область допустимых значений переменной (ОДЗ):

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

(Условимся далее две последние строки системы писать одной так: $0 < h(x) \neq 0$)

2) Решаем неравенство $(f(x) - g(x))(h(x) - 1) > 0$.

3) Для найденного решения учитываем ОДЗ.

4) Записываем ответ.

Решите неравенство: $\log_{2x-3} x > 1$

1) ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ 0 < 2x - 3 \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ 3 < 2x \neq 4; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ 1,5 < x \neq 2; \end{cases} \underline{1,5 < x \neq 2.}$

2) Переписываем неравенство в виде

$$\log_{2x-3} x > \log_{2x-3} (2x-3)$$

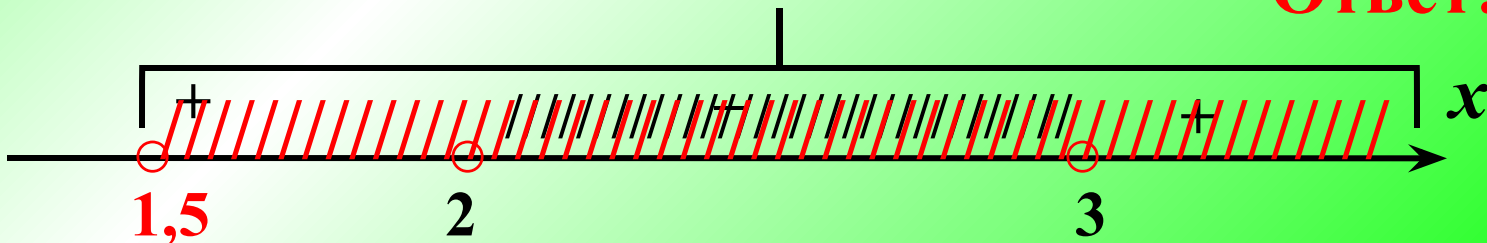
Решаем неравенство $(x - (2x - 3))(2x - 3 - 1) > 0;$

$$(x - 2x + 3)(2x - 4) > 0; \quad (-x + 3)2(x - 2) > 0;$$

$$-2(x - 3)(x - 2) > 0 \quad | : (-2); \quad (x - 3)(x - 2) < 0,$$

ОДЗ

Ответ: (2; 3)



Решите неравенство: $\log_{4x^2} (5x + 6) > 1$

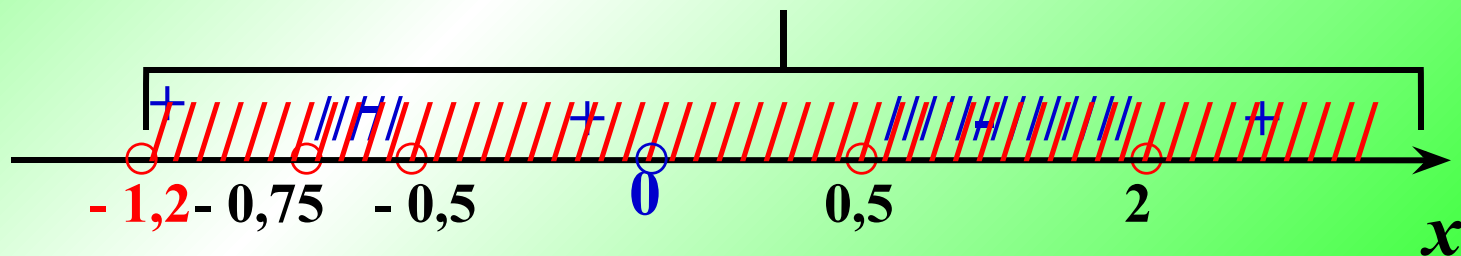
1) ОДЗ:
$$\begin{cases} 5x + 6 > 0, \\ 0 < 4x^2 \neq 1; \\ x > -1,2, \\ x \neq \pm 0,5, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

2) $\log_{4x^2} (5x + 6) > 1 \Leftrightarrow \log_{4x^2} (5x + 6) > \log_{4x^2} 4x^2$

$$(5x + 6 - 4x^2)(4x^2 - 1) > 0; \quad (4x^2 - 5 - x6)(2 - x1)(2 + 1) < 0;$$

$$4(x + 0,75)(x - 2)2(x - 0,5)2(x + 0,5) < 0; \quad (x + 0,75)(x - 2)(x - 0,5)(x + 0,5) < 0;$$

ОДЗ



Ответ: $-0,75 < x < -0,5; \quad 0,5 < x < 2$

Решите рассмотренным способом неравенства

$$1) \log_{x-3} (x-1) < 2;$$

Ответ: $3 < x < 4; \quad x > 5.$

$$2) \log_{x^2} (3-2x) > 1$$

Ответ: $(-3; -1)$

$$3) \log_{x^2+3} (x+3) < 1$$

Решения – в материалах следующего занятия

**Продолжение следует,
до новых встреч**