Решение систем логических уравнений, ЕГЭ 2014

Вишневская М.П.
МАОУ «Гимназия №3» Фрунзенского района г. Саратова

Демо-версия ЕГЭ 2014

B15 Сколько существует различных наборов значений логических переменных x_1, x_2, … x_{10}, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge ((x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_3)) = 0$

$\neg(x_2 \equiv x_3) \wedge ((x_2 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_2 \wedge x_4)) = 0$

…

$\neg(x_8 \equiv x_9) \wedge ((x_8 \wedge \neg x_{10}) \vee (\neg x_8 \wedge x_{10})) = 0$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных x_1, x_2, … x_{10} при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Ответ: ___________________________.

Решение _1в

Перепишем данную систему :

$\neg(x_1 \equiv x_2) \bullet \neg(x_1 \equiv x_3) = 0$

$\neg(x_2 \equiv x_3) \bullet \neg(x_2 \equiv x_4) = 0$

…………………………

$\neg(x_8 \equiv x_9) \bullet \neg(x_8 \equiv x_{10}) = 0$

Используем закон де Моргана:

$(x_1 \equiv x_2) + (x_1 \equiv x_3) = 1$

$(x_2 \equiv x_3) + (x_2 \equiv x_4) = 1$

………………………

$(x_8 \equiv x_9) + (x_8 \equiv x_{10}) = 1$

Рассмотрим уравнение:

$(x_1 \equiv x_2) + (x_1 \equiv x_3) = 1$

Найдем, когда оно = 0. Это – дизъюнкция, поэтому оно = 0 при $(x_1 \equiv x_2) = 0$ и $(x_1 \equiv x_3) = 0$, а это возможно в двух случаях:

x_1	x_2	x_3
0	1	1
1	0	0

Решение _1в

Исключим эти наборы из решения. Останутся следующие наборы значений (битовые цепочки):

x_1	x_2	x_3
0	0	0
0	0	1
1	1	0
1	1	1
0	1	0
1	0	1

если $x_i = x_{i+1}$, $x_{i+2} = 0$ или 1
если $x_i = 1$, $x_{i+1} = 0$, то $x_{i+2} = 1$
если $x_i = 0$, $x_{i+1} = 1$, то $x_{i+2} = 0$

Заметим, что при присоединении каждого следующего х будет добавляться два набора:

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0

8 наборов, добавляем x_5 – 10 наборов, x_6 – 12 наборов, x_7 - 14
x_8 – 16, x_9 – 18, x_{10} – 20 наборов .
Ответ: **20** наборов .

Решение_2в

1. **Используем методы, описанные выше, и придем к системе уравнений:**

$(x_1 \equiv x_2) + (x_1 \equiv x_3) = 1$

$(x_2 \equiv x_3) + (x_2 \equiv x_4) = 1$

………………………

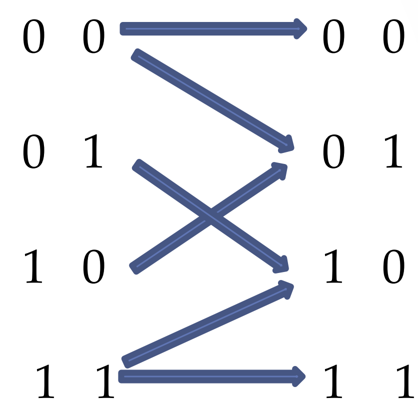
$(x_8 \equiv x_9) + (x_8 \equiv x_{10}) = 1$

2. **Исключим, как и в 1-м варианте решения, те наборы значений, при которых уравнения = 0. Останется:**

x_1	x_2	x_3
0	0	0
0	0	1
1	1	0
1	1	1
0	1	0
1	0	1

3. **Построим отображение пары x_1,x_2 на пару x_2,x_3:**

x_1,x_2 x_2,x_3



4. **Т.к. все уравнения системы однородны, то можно распространить это отображение на оставшиеся пары.**

Решение_2в

	x_1,x_2	x_2,x_3	x_3,x_4	x_4,x_5	x_5,x_6	x_6,x_7	x_7,x_8	x_8,x_9	x_9,x_{10}
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**
0 1	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**
1 0	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**
1 1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**

1+9+9+1=20

Ответ: **20** наборов

Задание 1, ЕГЭ 2014

Сколько существует различных наборов логических переменных x1, x2, x3, x4, x5, x6, y1, y2, y3, y4, y5, y6, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(y1 + y2)(y1 \cdot y2 \to y3)(\overline{y1} + x1) = 1$$
$$(y2 + y3)(y2 \cdot y3 \to y4)(\overline{y2} + x2) = 1$$
$$(y3 + y4)(y3 \cdot y4 \to y5)(\overline{y3} + x3) = 1$$
$$(y4 + y5)(y4 \cdot y5 \to y6)(\overline{y4} + x4) = 1$$
$$(y5 + y6)(\overline{y6} + x6) = 1$$
$$(\overline{y5} + x5) = 1$$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы наборов переменных x1, x2, …x6, y1, y2, ...y6, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение

Данная система равносильна системе:

$$(y1 + y2)(y2 + y3)(y3 + y4)(y4 + y5)(y5 + y6) = 1$$
$$(y1 \cdot y2 \to y3)(y2 \cdot y3 \to y4)(y3 \cdot y4 \to y5)(y4 \cdot y5 \to y6) = 1$$
$$(\overline{y1} + x1)(\overline{y2} + x2)(\overline{y3} + x3)(\overline{y4} + x4)(\overline{y5} + x5)(\overline{y6} + x6) = 1$$

$$(y1 + y2)(y2 + y3)(y3 + y4)(y4 + y5)(y5 + y6) = 1$$
$$(\overline{y1} + \overline{y2} + y3)(\overline{y2} + \overline{y3} + y4)(\overline{y3} + \overline{y4} + y5)(\overline{y4} + \overline{y5} + y6) = 1$$
$$(\overline{y1} + x1)(\overline{y2} + x2)(\overline{y3} + x3)(\overline{y4} + x4)(\overline{y5} + x5)(\overline{y6} + x6) = 1$$

Решение

Рассмотрим первое уравнение:

$$(y1 + y2)(y2 + y3)(y3 + y4)(y4 + y5)(y5 + y6) = 1$$

Из этого уравнения следует, что $Y_i + Y_{i+1} \neq 0$, т.е. Y_i , $Y_{i+1} \neq 0$

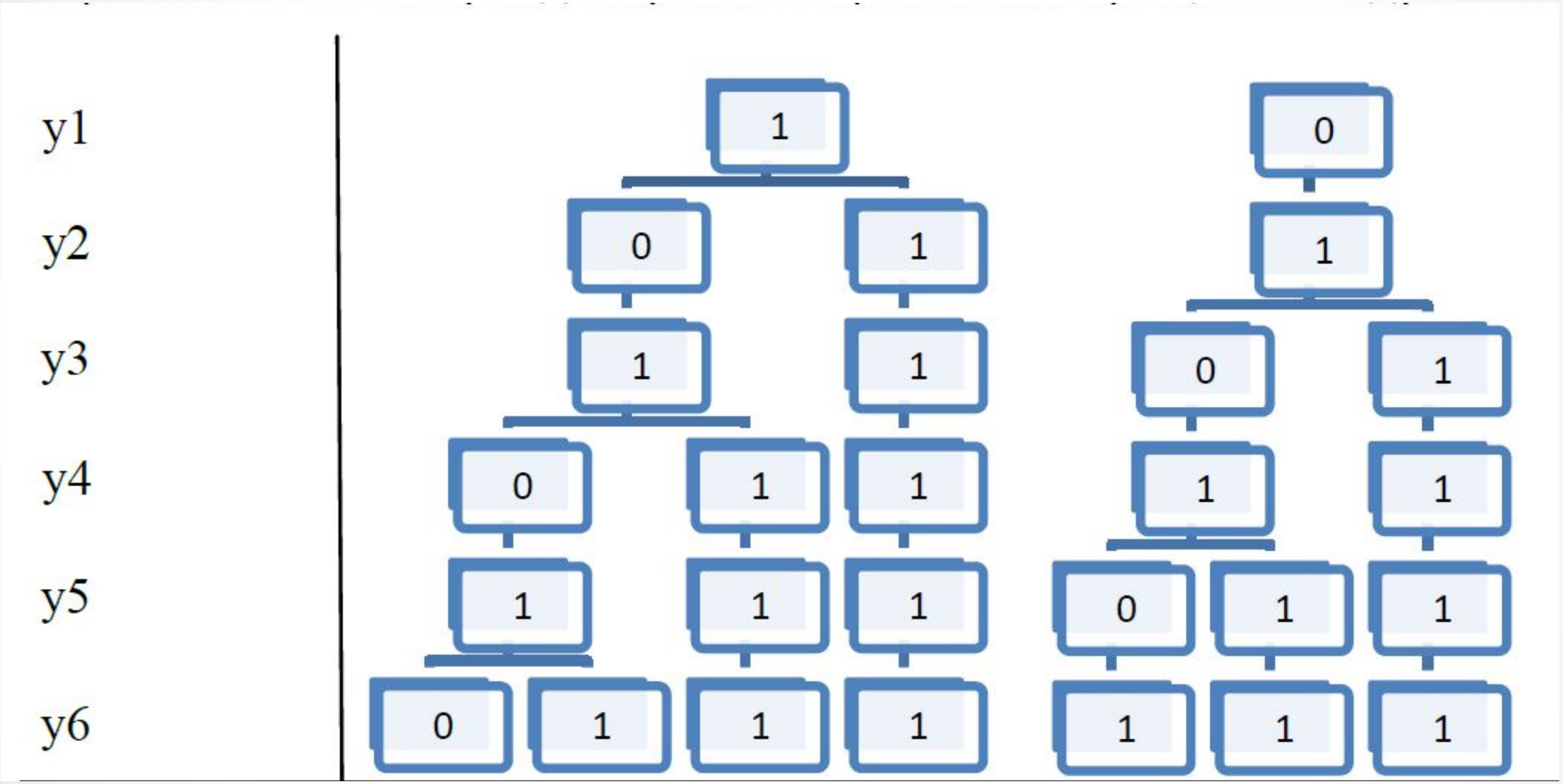
Рассмотрим второе уравнение:

$$(\overline{y1} + \overline{y2} + y3)(\overline{y2} + \overline{y3} + y4)(\overline{y3} + \overline{y4} + y5)(\overline{y4} + \overline{y5} + y6) = 1$$

Из этого уравнения следует, что $\neg Y_i + \neg Y_{i+1} + Y_{i+2} \neq 0$, т.е. Y_i , $Y_{i+1} \neq 1$ и $Y_{i+2} \neq 0$

Решение

Построим деревья решений для первых двух уравнений, учитывая условия, указанные выше.



Решение

Рассмотрим первое уравнение:

$$(\overline{y1}+x1)(\overline{y2}+x2)(\overline{y3}+x3)(\overline{y4}+x4)(\overline{y5}+x5)(\overline{y6}+x6)=1$$

Запрещены пары $x_i = 0$,$y_i = 1$ (I = 1…6). Т. о. если $y_i = 1$, то x_i может принимать одно значение – 1, если $y_i = 0$, то $x_i = 1$ или $x_i = 0$.

Как проще записать? Перепишем полученное дерево в виде битовых цепочек:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
1	0	1	0	1	0	эта цепочка даст **2^3** наборов
1	0	1	0	1	1	эта цепочка даст **2^2** наборов
1	0	1	1	1	1	эта цепочка даст **2^1** наборов
1	1	1	1	1	1	эта цепочка даст **2^0** наборов
0	1	0	1	0	1	эта цепочка даст **2^3** наборов
0	1	0	1	1	1	эта цепочка даст **2^2** наборов
0	1	1	1	1	1	эта цепочка даст **2^1** наборов

Ответ: **29** наборов логических переменных

Задание 2, ЕГЭ 2014

Сколько существует различных наборов логических переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) \wedge (x_1 \wedge x_2 \to x_3) \wedge (x_1 + y_1) = 1 \\ (x_2 + x_3) \wedge (x_2 \wedge x_3 \to x_4) \wedge (x_2 + y_2) = 1 \\ \dots \\ (x_5 + x_6) \wedge (x_5 \wedge x_6 \to x_7) \wedge (x_5 + y_5) = 1 \\ (x_6 + x_7) \wedge (x_6 + y_6) = 1 \\ x_7 + y_7 = 1 \end{cases}$$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы наборов переменных x_1, x_2, …x_7, y_1, y_2, ...y_7, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать **количество** таких наборов.

Решение

Перепишем систему в равносильном виде:

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) \wedge (x_1 \wedge x_2 \to x_3) = 1 \\ (x_2 + x_3) \wedge (x_2 \wedge x_3 \to x_4) = 1 \\ \ldots \\ (x_5 + x_6) \wedge (x_5 \wedge x_6 \to x_7) = 1 \\ (x_6 + x_7) = 1 \\ x_i + y_i = 1, i = \overline{1,7} \end{cases}$$

Рассмотрим систему уравнений без y в виде:

$(x_1 + x_2)\ (x_2 + x_3)\ (x_3 + x_4)\ (x_4 + x_5)\ (x_5 + x_6)\ (x_6 + x_7) = 1$

$(\neg x_1 + \neg x_1 + x_3)(\neg x_2 + \neg x_3 + x_4)(\neg x_3 + \neg x_4 + x_5)\ (\neg x_4 + \neg x_5 + x_6)\ (\neg x_5 + \neg x_6 + x_7) = 1$

Очевидно, что $x_i + x_{i+1} \neq 0$, **т.е.** $x_i\ , x_{i+1} \neq 0$ **и**

$\neg x_i + \neg x_{i+1} + x_{i+2} \neq 0$, **т.е.** $x_i\ , x_{i+1} \neq 1$ **и** $x_{i+2} \neq 0$

Решение

Следуя логике решения предыдущего задания, получаем набор битовых цепочек:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1

Рассмотрим последние 7 уравнений:

$$x_i + y_i = 1, i = 1 \ldots 7$$

Решение

Заметим, что из последних 7 уравнений следует, что если $x_i = 1$, то y_i может принимать два значения: 0 и 1. Если $x_i = 0$, $y_i = 1$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	0	1	0	1	0	1	эта цепочка даст 2^4 набора значений
1	0	1	0	1	1	1	эта цепочка даст 2^5 набора значений
1	0	1	1	1	1	1	эта цепочка даст 2^6 набора значений
1	1	1	1	1	1	1	эта цепочка даст 2^7 набора значений
0	1	0	1	0	1	0	эта цепочка даст 2^3 набора значений
0	1	0	1	0	1	1	эта цепочка даст 2^4 набора значений
0	1	0	1	1	1	1	эта цепочка даст 2^5 набора значений
0	1	1	1	1	1	1	эта цепочка даст 2^6 набора значений

Ответ: **360** наборов логических переменных

Задание 3, ЕГЭ 2015

Сколько существует различных наборов логических переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(x_1 \lor y_1) \land ((\neg x_1 \lor \neg y_1) \rightarrow (\neg x_2 \lor \neg y_2)) = 1$$
$$(x_2 \lor y_2) \land ((\neg x_2 \lor \neg y_2) \rightarrow (\neg x_3 \lor \neg y_3)) = 1$$
$$(x_3 \lor y_3) \land ((\neg x_3 \lor \neg y_3) \rightarrow (\neg x_4 \lor \neg y_4)) = 1$$
$$(x_4 \lor y_4) \land ((\neg x_4 \lor \neg y_4) \rightarrow (\neg x_5 \lor \neg y_5)) = 1$$
$$(x_5 \lor y_5) \land ((\neg x_5 \lor \neg y_5) \rightarrow (\neg x_6 \lor \neg y_6)) = 1$$
$$x_6 \lor y_6 = 1$$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы наборов переменных x_1, x_2, …x_6, y_1, y_2, ...y_6, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать **количество** таких наборов.

Решение (метод отображений)

Перепишем систему:

$(x_1 + y_1) \bullet ((\neg x_1 + \neg y_1) \rightarrow (\neg x_2 + \neg y_2)) = 1$

$(x_2 + y_2) \bullet ((\neg x_2 + \neg y_2) \rightarrow (\neg x_3 + \neg y_3)) = 1$

$(x_3 + y_3) \bullet ((\neg x_3 + \neg y_3) \rightarrow (\neg x_4 + \neg y_4)) = 1$

$(x_4 + y_4) \bullet ((\neg x_4 + \neg y_4) \rightarrow (\neg x_5 + \neg y_5)) = 1$

$(x_5 + y_5) \bullet ((\neg x_5 + \neg y_5) \rightarrow (\neg x_6 + \neg y_6)) = 1$

$x_6 + y_6 = 1$

Рассмотрим первое уравнение системы:

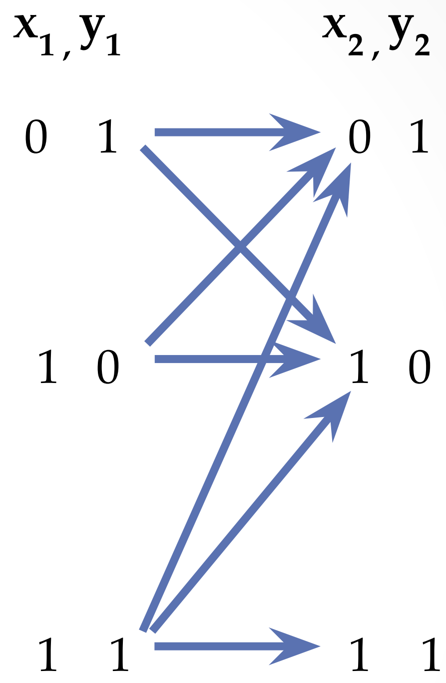
$(x_1 + y_1) \bullet ((\neg x_1 + \neg y_1) \rightarrow (\neg x_2 + \neg y_2)) = 1$

Построим для него таблицу истинности, заметив, что $\mathbf{x_i = y_i \neq 0}$

$\mathbf{x_1, y_1}$	$\mathbf{x_2, y_2}$	значение
0 1	0 1	1
0 1	1 0	1
0 1	1 1	**0**
1 0	0 1	1
1 0	1 0	1
1 0	1 1	**0**
1 1	0 1	1
1 1	1 0	1
1 1	1 1	1

Решение (метод отображений)

x_1, y_1	x_2, y_2	значение
0 1	0 1	1
0 1	1 0	1
0 1	1 1	**0**
1 0	0 1	1
1 0	1 0	1
1 0	1 1	**0**
1 1	0 1	1
1 1	1 0	1
1 1	1 1	1



Учитывая, что все уравнения системы однородны, можно распространить это отображение на оставшиеся пары.

Решение (метод отображений)

	x_1, y_1	x_2, y_2	x_3, y_3	x_4, y_4	x_5, y_5	x_6, y_6
0 1	1	3	7	15	31	63
1 0	1	3	7 3	15	31	63
1 1	1	1	1	1	1	1

Осталось проанализировать последнее уравнение: $x_6 + y_6 = 1$
Очевидно, что ни один из полученных ответов не обнуляет это уравнение.

Ответ: **127** наборов значений

Источники информации

1. К.Ю. Поляков, М.А. Ройтберг. Системы логических уравнений: решение с помощью битовых цепочек // Информатика, № 12, 2014, с. 4-12.
2. http://kpolyakov.narod.ru/school/ege.htm