Лекция 4
Геометрические характеристики плоских сечений

Рассмотренные в предыдущих главах расчеты на растяжение (сжатие) и кручение позволяют сделать вывод, что площадь поперечного сечения бруса является геометрической характеристикой его прочности и жесткости лишь при равномерном распределении напряжений по поперечному сечению.

При неравномерном распределении напряжений, имеющем место при работе бруса на кручение, его прочность и жесткость зависят от геометрической характеристики — полярного момента инерции (для бруса круглого сечения).

Нетрудно убедиться, что и в случае изгиба бруса площадь сечения не может служить характеристикой его жесткости. Действительно, из двух брусьев (рис.1) с равновеликими площадями поперечных сечений первый при данной нагрузке деформируется значительно сильнее второго (например, при *h:b =* 2 прогибы первого бруса в 4 раза больше, чем второго).

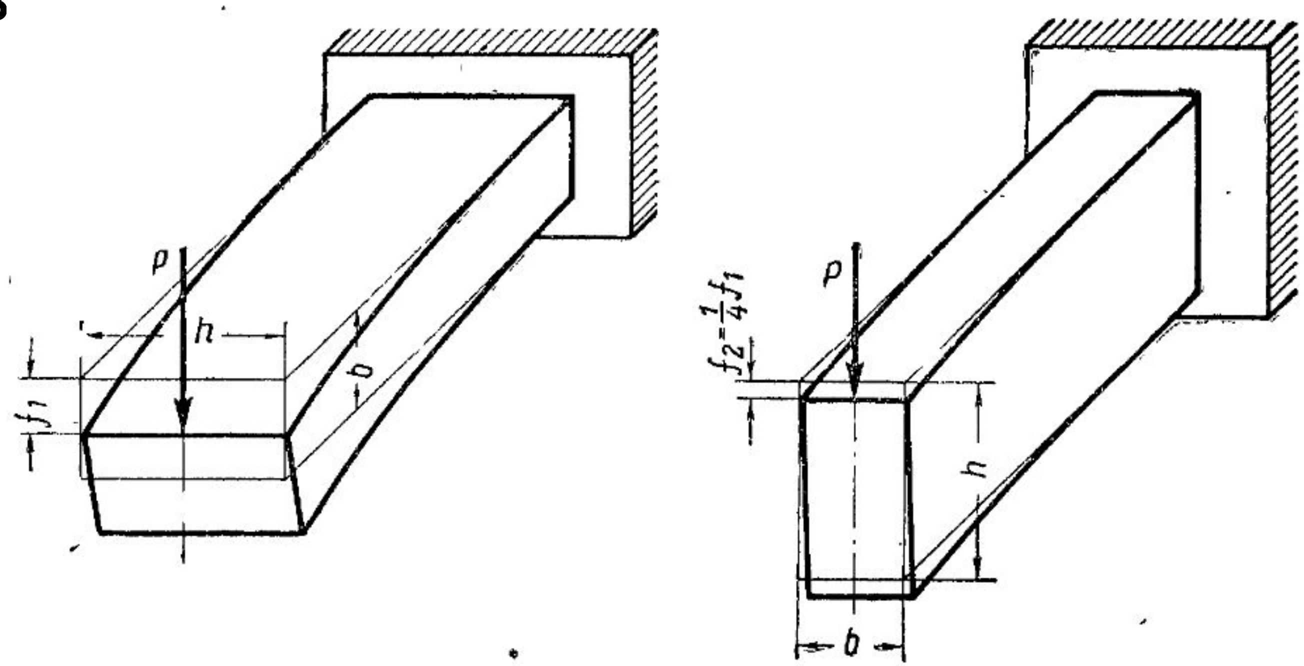


Рис. 1

Эта лекция посвящена ознакомлению со свойствами и методами вычисления **специальных геометрических характеристик** плоских сечений, используемых при расчетах на изгиб, на изгиб с растяжением и в ряде других случаев.

Вычисление этих характеристик связано с необходимостью **определения координат центра тяжести сечения**; при этом в расчетные зависимости входят геометрические характеристики, называемые **статическими моментами сечения**.

Статическим моментом плоского сечения (рис. 2) *относительно оси Ou называется взятая по всей площади сечения сумма произведений площадей элементарных площадок на их расстояния до этой оси, т. е.*

$$S_u = \int_F v dF$$

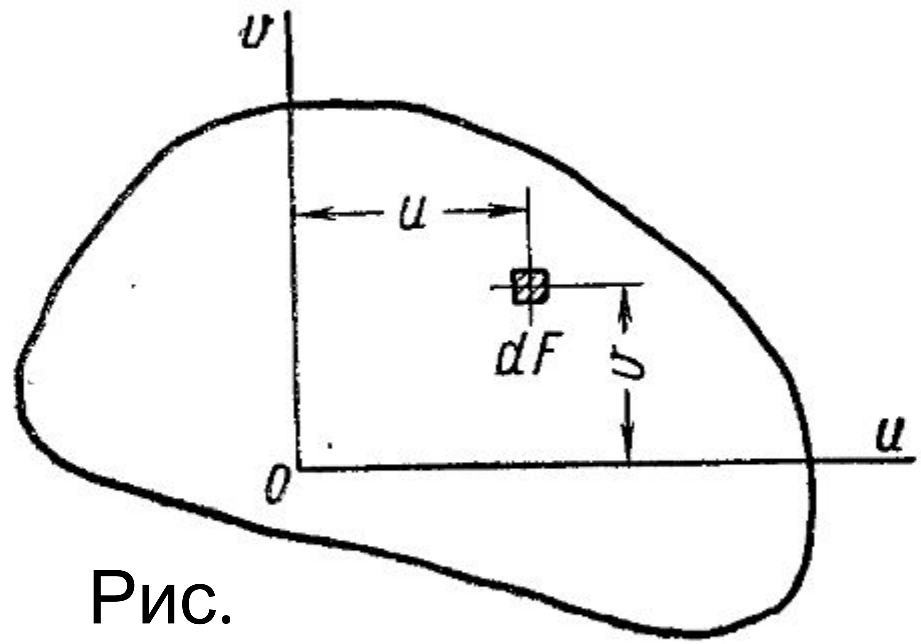


Рис. 2

Аналогично, статический момент сечения относительно оси *Ov*

$$S_v = \int_F u dF$$

Очевидно, статический момент имеет размерность длины в третьей степени *(м³, см³, мм³)*.

В зависимости от **положения оси**, относительно которой вычисляется статический момент, он может быть **положительным**, **отрицательным** или **равным нулю**. При известных статических моментах и площади сечения координаты его центра тяжести определяют по формулам

$$u_c = \frac{S_v}{F} \qquad v_c = \frac{S_u}{F}$$

В случае известных координат центра тяжести статические моменты определяют из выражений

$$S_u = Fv_c \qquad S_v = Fu_c \qquad (1)$$

Из формул (1) вытекает весьма важное для дальнейшего следствие: *относительно любой центральной,* т. е. проходящей через центр тяжести*, оси сечения его статический момент равен нулю.*

В тех случаях, когда сечение может быть разбито на простейшие составные части, площади и координаты центров тяжести которых известны, положение центра тяжести всего сечения определяют по формулам

$$u_c = \frac{\sum F_i u_{ci}}{\sum F_i} \qquad v_c = \frac{\sum F_i v_{ci}}{\sum F_i}$$

F_i – площадь *i*-й части сечения,

u_{ci} и v_{ci} – координаты центров тяжести *i* – й части сечения

ОСЕВЫЕ И ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Осевым моментом инерции плоского сечения относительно данной оси называется взятая по всей площади сечения сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до этой оси (рис. 3).

Из этого определения следует, что момент инерции относительно оси *Ox* представляет собой определенный интеграл:

$$I_x = \int_F y^2 dF$$

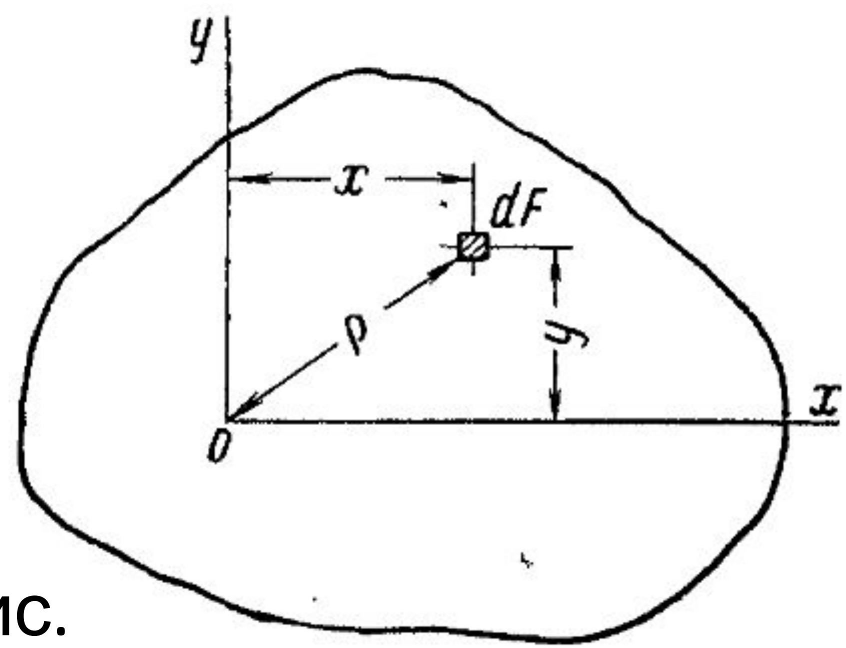


Рис. 3

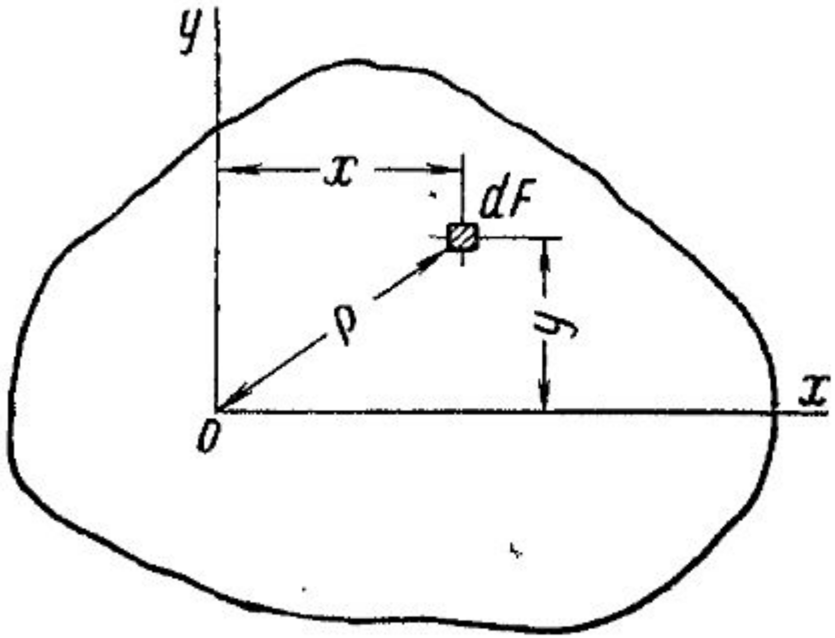
Аналогично, момент инерции относительно оси *Oy*

$$I_y = \int_F x^2 dF$$

Осевой момент инерции является величиной *существенно положительной,* так как независимо от знака координаты произвольной площадки соответствующее слагаемое положительно, ибо в него входит квадрат этой координаты.
Размерность осевого момента инерции: длина в четвертой степени *(м*^{4}*, см*^{4}*, мм*^{4}*).*

Пользуясь рис. 3, установим связь между полярным и осевыми моментами инерции сечения. По определению

$$I_p = \int_F \rho^2 dF$$



но $\rho^2 = x^2 + y^2$

следовательно

$$I_p = \int_F \rho^2 dF = \int_F \left(x^2 + y^2\right) dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF$$

Окончательно $I_p = I_x + I_y$

Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей (начала координат).

При определении осевых моментов инерции в некоторых случаях приходится встречаться с еще одной новой геометрической характеристикой — ***центробежным моментом инерции****. Эта геометрическая характеристика представляет собой взятую по всей площади сечения сумму произведений площадей элементарных площадок на произведение их расстояний до двух данных взаимно перпендикулярных осей,* т. е.

$$I_{xy} = \int_F xydF$$

Центробежный момент инерции имеет размерность длины в четвертой степени. В зависимости от расположения осей он может быть как положительным, так и отрицательным и в частных случаях равным нулю.

$$I_{xy} = \int_F xydF$$

ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются ***главными осями*** (иногда их называют главными осями инерции). Через любую точку, взятую в плоскости сечения, можно провести в общем случае пару главных осей (в некоторых частных случаях их может быть бесчисленное множество). Для того чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, рассмотрим, как изменяется центробежный момент инерции при повороте осей на 90° (рис. 4)

Для произвольной площадки *dF*, взятой в первом квадранте системы осей *xOy*, обе координаты, а следовательно, и их произведение, положительны.

В новой системе, координат x_1Oy_1 повернутой относительно первоначальной на 90°, произведение координат рассматриваемой площадки отрицательно.

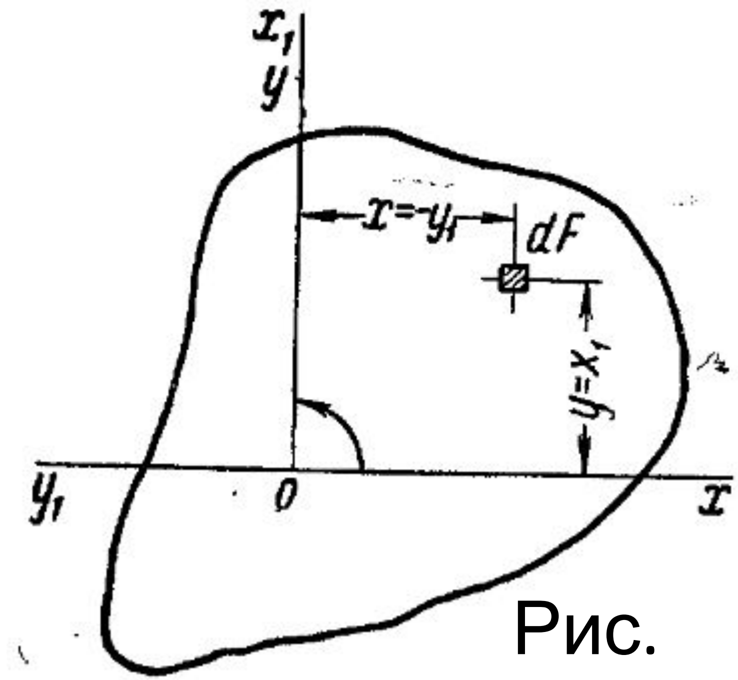


Рис. 4

Абсолютная величина этого произведения не изменяется, т. е. $xy = -x_1y_1$. Очевидно, то же имеет место и для любой другой элементарной площадки.

Значит и знак суммы *xydF*, представляющей собой центробежный момент инерции сечения, при повороте осей на 90° меняется на противоположный, т. е.

$$I_{xy} = -I_{x_1 y_1}$$

В процессе поворота осей, очевидно, центробежный момент инерции изменяется непрерывно, и, следовательно, при некотором положении осей он становится **равным нулю**. **Эти оси** и являются **главными**.

Рассмотрим сечение, имеющее по меньшей мере одну ось симметрии (рис.5).

Проведем через центр тяжести сечения ось *Ox*, перпендикулярную оси симметрии *Oy*, и определим центробежный момент инерции I_{xy}. Воспользуемся известным из курса математики свойством определенного интеграла (интеграл суммы равен сумме интегралов) и представим I_{xy} в виде двух слагаемых

$$I_{xy} = \int_F xydF = \int_{F_1} xydF + \int_{F_2} xydF$$

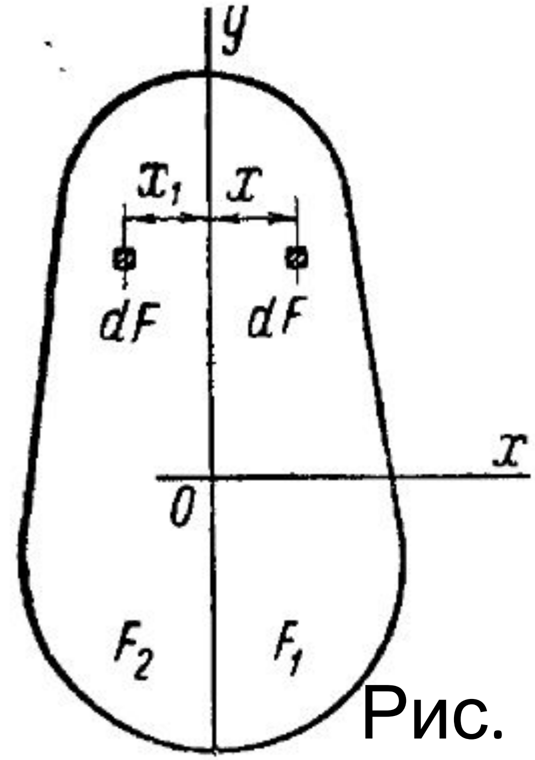


Рис. 5

Очевидно $$\int_{F_1} xydF = -\int_{F_2} xydF$$

так как для любой элементарной площадки, расположенной справа от оси симметрии, есть соответствующая — слева, для которой произведение координат отличается лишь знаком.

Таким образом, центробежный момент инерции относительно осей *Ox* и *Oy* оказался равным нулю, т. е. это ***главные оси***. *Итак, для нахождения главных осей* ***симметричного сечения*** *достаточно найти положение его* ***центра тяжести***. *Одной из главных центральных осей является ось симметрии, вторая — ей перпендикулярна.*

Осевые **моменты инерции** относительно **главных центральных осей** называются ***главными центральными*** (или сокращенно *главными) моментами инерции.* Относительно одной из главных осей момент инерции максимален, относительно другой — минимален.

Например, для сечения, изображенного на рис. 5, максимальным является момент инерции I_x (относительно оси *Ох).* Конечно, говоря об экстремальности главных моментов инерции, имеется в виду лишь их сравнение с другими моментами инерции, вычисленными относительно осей, проходящих через ту же точку сечения.

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

Установим зависимость между осевыми моментами инерции относительно двух параллельных осей, из которых одна является центральной (рис.6)

Пусть момент инерции I_{Xo} относительно центральной оси, площадь сечения *F* и расстояние ***a*** между осями x_0 и x_1 известны.

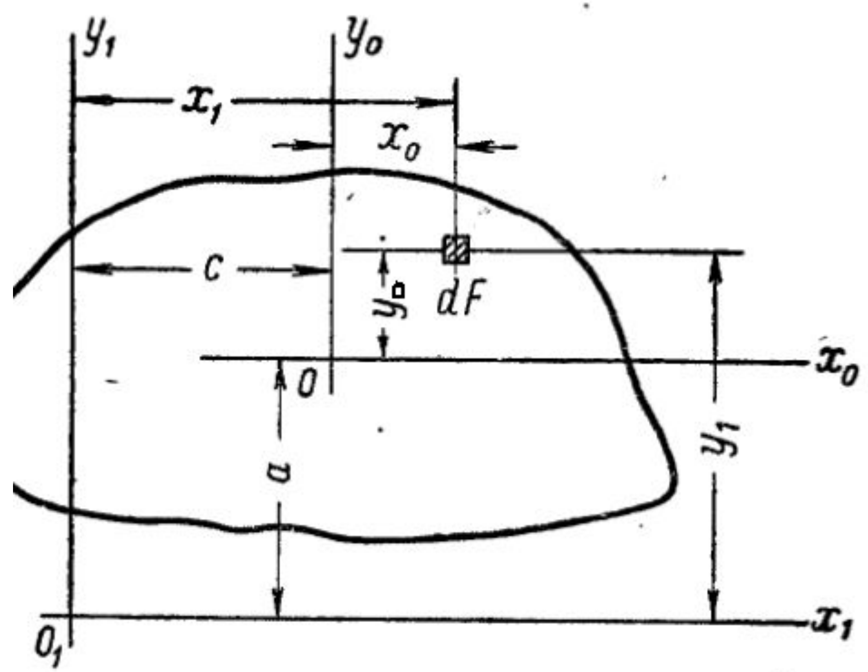


Рис. 6

Определим момент инерции I_{x1}. Расстояние от произвольной площадки dF до оси x_0 обозначим y_0, а до оси x_1 обозначим y_1. По определению,

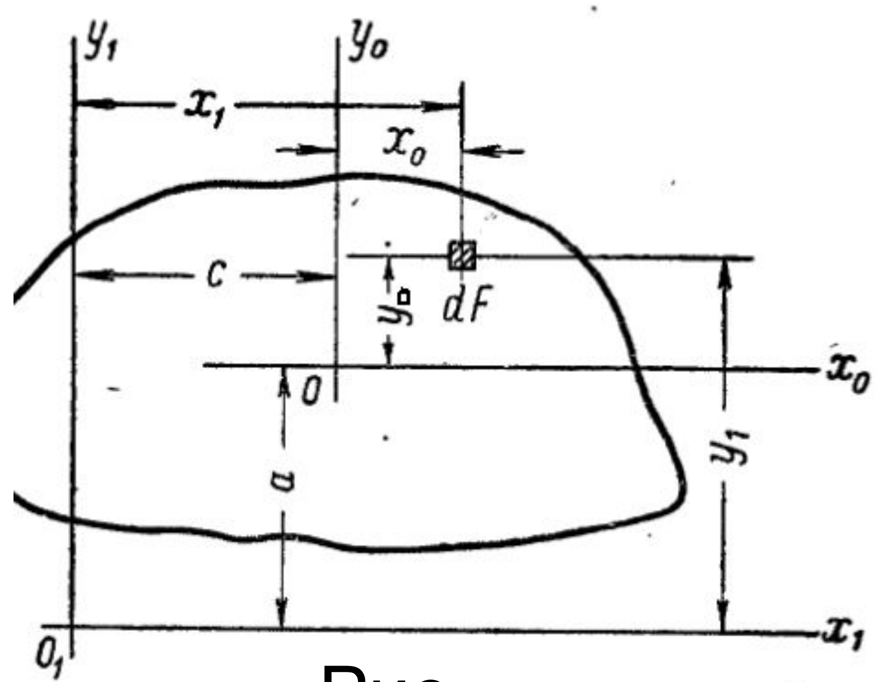


Рис. 6

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 dF$$

Из рисунка 6 $\quad y_1 = y_0 + a$

Подставляя значение y_1 в выражение для I_{x1}, имеем

$$I_{x_1} = \int_F (y_0 + a)^2 dF = \int_F y_0^2 dF + 2a\int_F y_0 dF + a^2 \int_F dF$$

Учитывая, что, по определению

$$\int\limits_F y_0 dF = I_{x_0} \quad \text{и} \quad \int\limits_F y_0 dF = S_{x_0}$$

получае
м

$$I_{x_1} = I_{x_0} + 2aS_{x_0} + a^2F$$

Ось x_0 по условию является центральной,
следовательно,

$$S_{x_0} = 0$$

Тогд
а

$$I_{x_1} = I_{x_0} + a^2F$$

Аналогичн
о

$$I_{y_1} = I_{y_0} + c^2F$$

Выведем зависимость между центробежными моментами инерции относительно центральных осей x_0Oy_0 и параллельных им нецентральных осей $x_1O_1y_1$. По определению, $$I_{x_1y_1} = \int\limits_F x_1y_1dF$$

По рис. 6 имеем $y_1 = y_0 + a \quad x_1 = x_0 + c$

После подстановки величин x_1 и y_1 в подынтегральное выражение получаем

$$I_{x_1y_1} = \int\limits_F (x_0 + c)(y_0 + a)dF = \int\limits_F x_0y_0dF + c\int\limits_F y_0dF +$$

$$+a\int\limits_F x_0dF + ac\int\limits_F dF = I_{x_0y_0} + cS_{x_0} + aS_{y_0} + acF$$

Учитывая, что S_{x0}=0 и $S_{y0} = 0$, окончательно имеем

$$I_{x_1 y_1} = I_{x_0 y_0} + acF$$

При применении этой формулы величины *а и с* надо подставлять с их знаками, устанавливаемыми на основании очевидного положения, что *а* и с представляют собой координаты начала одной из систем координат в другой системе. Так, при расположении осей по рис.6 величины *а* и с положительны, если рассматривать их как координаты точки О в системе координат $x_1 \mathrm{O}_1 y_1$. Обе эти величины отрицательны, если считать их координатами точки O_1 в системе x_0Oy_0.

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ СЕЧЕНИЙ

Круг и кольцо (рис. 7). Воспользуемся зависимостью между полярным и осевыми моментами инерции:

$$I_p = I_x + I_y$$

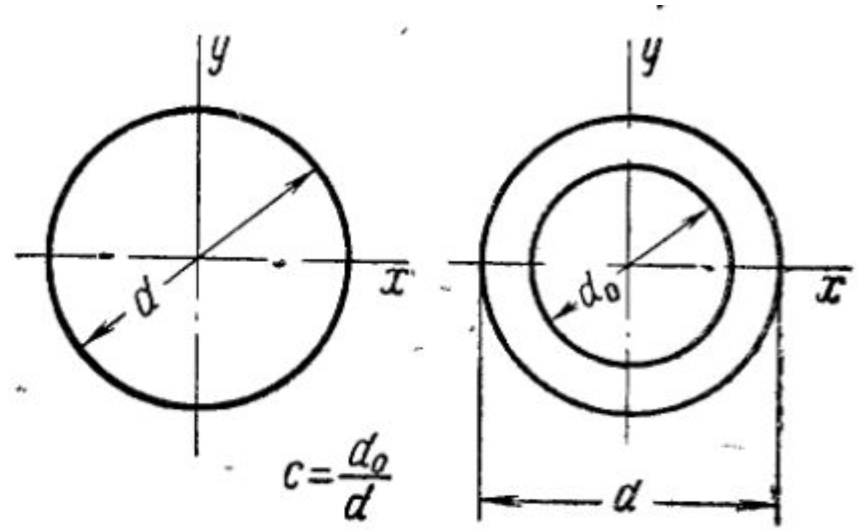


Рис. 7

В данном случае в силу симметрии, очевидно, $I_x = I_y$ следовательно,

$$I_p = 2I_x = 2I_y$$

или

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2}$$

Как известно, для круга и кольца

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \qquad I_p = \frac{\pi d^4}{32}\left(1- \ ^4\right) \qquad c = \frac{d_0}{d}$$

Таким образом, главные моменты инерции в рассматриваемом случае имеют следующие значения: для круга

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64}$$

Для кольца

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64}\left(1- \ ^4\right)$$

Прямоугольник (рис. 8).

Определим сначала момент инерции I_{X1} относительно оси x_1 совпадающей с основанием. По определению,

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 dF$$

Разобьем сечение на элементарные прямоугольники (полоски) шириной b и толщиной (высотой) dy_1, тогда $dF = bdy_1$. Подставляя значение dF в выражение для I_{X1} и интегрируя, получаем

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 b dy_1 = b\frac{y_1^3}{3}\Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

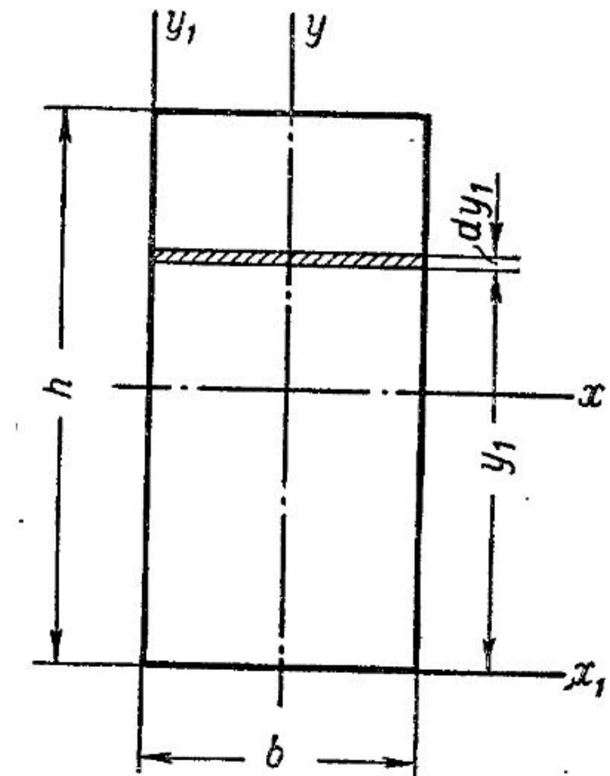


Рис. 8

Главный центральный момент инерции- I_x найдем, применив формулу для определения момента инерции при параллельном переносе осей

$$I_x = I_{x_1} - a^2 F$$

В данном случае расстояние между осями $a = \frac{h}{2}$ и $F = bh$

$$I_x = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}$$

Аналогично, относительно оси y

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

Вообще следует запомнить, что в выражение для момента инерции прямоугольника размер стороны, перпендикулярной рассматриваемой оси, входит в третьей степени.

Для квадрата со стороной *b* имеем

$$I_y = \frac{b^4}{12}$$

Треугольник (рис. 9).

Вычислим сначала момент инерции I_{X1} относительно оси x_1, совпадающей с основанием. Разбивая сечение на элементарные полоски, как показано на рис. 9, имеем

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 dF$$

$$dF = b_x dy_1$$

$$I_{x_1} = \int_0^h y_1^2 b_x dy_1$$

Из подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$

$$\frac{b_x}{h - y_1} = \frac{b}{h}$$ или $$b_x = \frac{b}{h}\left(h - y_1\right)$$

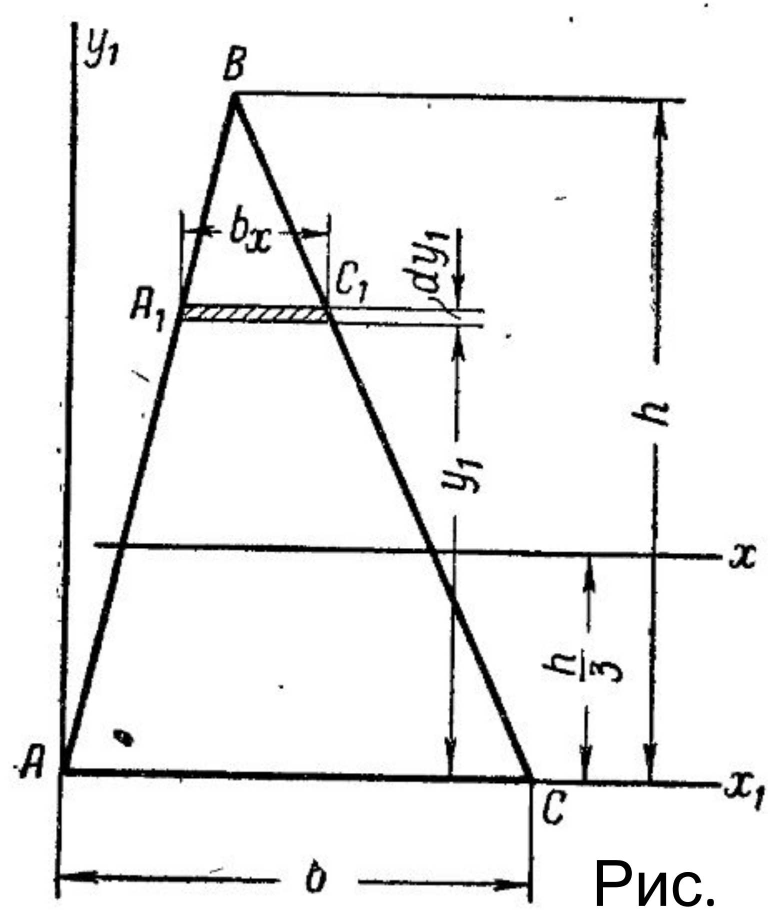


Рис. 9

Подставляя в выражение для I_{x1} и интегрируя, находим

$$I_{x_1} = \int_0^h y_1^2 \frac{b}{h}(h - y_1)dy_1 = b\int_0^h y_1^2 dy_1 - \frac{b}{h}\int_0^h y_1^2 dy_1 =$$

$$= b\frac{y_1^3}{3}\Big|_0^h - \frac{b}{h}\frac{y_1^4}{4}\Big|_0^h = \frac{bh^3}{12}$$

Момент инерции относительно центральной оси x найдем, применив формулу для определения момента инерции при параллельном переносе осей

$$I_x = I_{x_1} - a^2 F$$

В данном случае $a = \dfrac{h}{3}$ и $F = \dfrac{1}{2} bh$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{1}{2} bh = \frac{bh^3}{36}$$

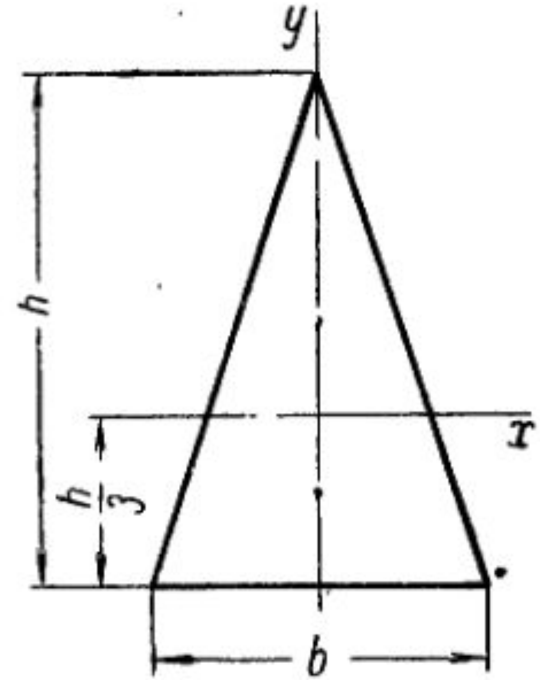


Рис. 10

Обратим внимание, что для произвольного треугольника ось x не является главной.
Для равнобедренного треугольника (рис. 10) оси *x* и *y* главные, так как ось *y* является осью симметрии.

$$I_y = \frac{hb^3}{48} \qquad I_x = \frac{bh^3}{36}$$

ГЛАВНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Установим, как изменяются величины осевых и центробежного момента инерции при повороте осей координат на произвольный угол *α* (рис. 11).

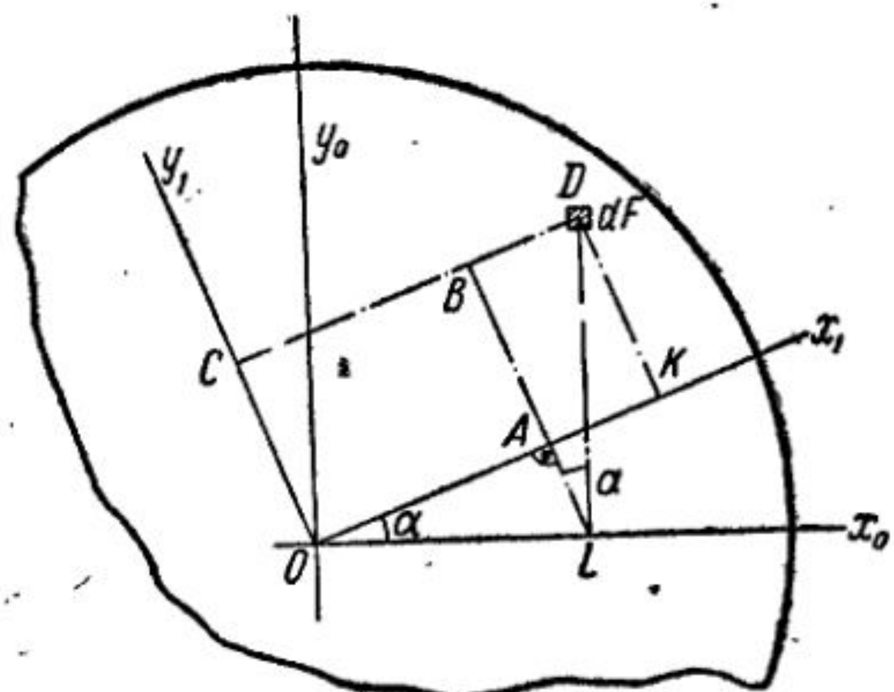
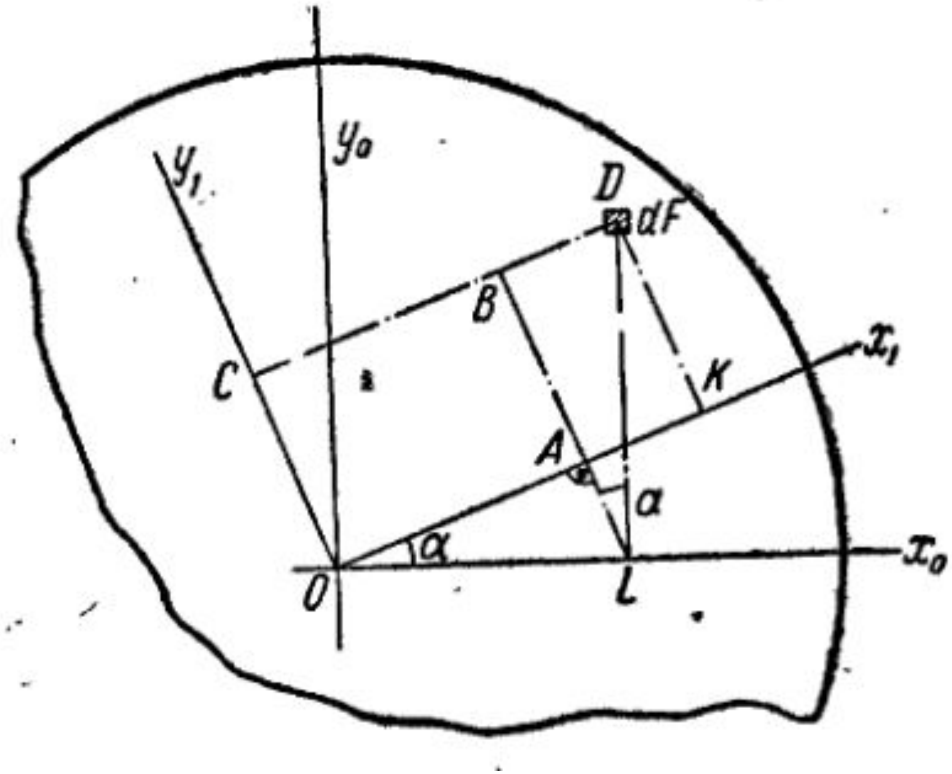


рис. 11

Будем считать моменты инерции I_{x0}, I_{y0} и I_{x0y0} известными и определим значения I_{x1}, I_{y1} и I_{x1y1}

Для этого в первую очередь установим связь между координатами x_1, y_1 и x_0, y_0 произвольной элементарной площадки. Отрезок *OK*= x_1 представим как сумму отрезков *OA* и *AK*=*BD* (см. рис. 11).



Из прямоугольных треугольников *OAL* и *BDL* имеем

$$OA = OL\cos\alpha = x_0\cos\alpha \quad \text{и} \quad BD = DL\sin\alpha = y_0\sin\alpha$$

Следовательно

$$x_1 = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha \qquad (1)$$

Аналогично найдем

$$y_1 = DK = AB = BL - AL = DL\cos\alpha - OL\sin\alpha$$

или окончательно

$$y_1 = y_0\cos\alpha - x_0\sin\alpha \qquad (2)$$

По определению

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 dF$$

подставив значение y_1 по выражению (2), получим

$$I_{x_1} = \int_F {y_1}^2 dF = \int_F \left(y_0\cos\alpha - x_0\sin\alpha\right)^2 dF =$$

$$= \cos^2\alpha \int_F y_0^2 dF + \sin^2\alpha \int_F x_0^2 dF - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_F x_0 y_0 dF$$

Учитывая, что

$$\int_F y_0^2 dF = I_{x_0} \qquad \int_F x_0^2 dF = I_{y_0} \qquad \int_F y_0 x_0 dF = I_{x_0 y_0}$$

$$I_{x_1} = I_{x_0} \cos^2 \alpha + I_{y_0} \sin^2 \alpha - 2 I_{x_0 y_0} \sin\alpha \cos\alpha$$

Учитывая известные тригонометрические тождества:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}; \qquad \sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

$$2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha,$$

переходим к функциям угла 2α.

$$I_{x_1} = \frac{I_{x_0} + I_{y_0}}{2} + \frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2}\cos 2\alpha - I_{x_0 y_0}\sin 2\alpha \quad (3)$$

Если проделать эту процедуру и для I_{y1} и I_{x1y1}, то получим следующие формулы преобразования моментов инерции при повороте координатных осей

$$I_{y_1} = \frac{I_{x_0} + I_{y_0}}{2} - \frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2}\cos 2\alpha + I_{x_0 y_0}\sin 2\alpha \quad (4)$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_{x_0} - I_{y}}{2}\sin 2\alpha + I_{x_0 y_0}\cos 2\alpha \quad (5)$$

Складываем (3) и (4) уравнения, получаем

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_{x_0} + I_{y_0} = I_p (6)$$

Выражение (6) показывает, что сумма осевых моментов инерции при повороте осей не меняется. Следовательно путем поворота осей можно получить оси относительно которых осевые моменты принимают **экстремальные значения**.

Найдем положение этих осей. Для этого возьмем выражений (3) и исследуем его на экстремум

$$\frac{d}{d\alpha} I_{x_1} = -\left(I_{x_0} - I_{y_0}\right)\sin 2\alpha - 2I_{x_0 y_0} \cos\alpha = -2I_{x_1 y_1}$$

Если продифференцировать (4) выражение, то получим

$$\frac{d}{d\alpha} I_{y_1} = 2I_{x_1 y_1}.$$

Следовательно, условием существования экстремума будет $I_{x_1 y_1} = 0$

Это будет иметь место при

$$\frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2} \sin 2\alpha + I_{x_0 y_0} \cos 2\alpha = 0$$

откуда

$$tg\,2\alpha = \frac{2 I_{x_0 y_0}}{I_{y_0} - I_{x_0}} \quad (7)$$

Оси, относительно которых **центробежный момент** инерции равен **нулю**, а моменты инерции принимают **экстремальные значения** называются **главными осями**.
Моменты инерции относительно главных осей называются **главными моментами инерции**.
Если главные оси проходят через центр тяжести сечения они называются главными центральными осями, а моменты инерции относительно этих осей называют главными центральными моментами.
Положение главных осей задается выражением (7)

Если использовать выражение (7) и

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 2\alpha}} \qquad \sin 2\alpha = \frac{tg\,2\alpha}{\sqrt{1 + tg^2 2\alpha}}$$

для исключения из уравнений (3) и (4) функций угла 2α, то получим формулу для определения главных моментов инерции

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_{x_0} + I_{y_0}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2}\right)^2 + I_{x_0 y_0}^2}$$