



РАНХиГС

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Начисление процентов по сложным ставкам

Князева М.А.,
доцент, канд. техн.
наук

Происхождение сложного процента и срочного вклада

- **Сложный процент** восстанавливает справедливость, он уравнивает «ленивого» и «активного» клиентов. Переоформление вклада ничего не приносит банкиру, кроме хлопот, поэтому он сам должен начислять сложный процент.
- Во избежание процедуры изъятия и повторного вклада обе стороны кредитной или депозитной сделки заранее договариваются об использовании **сложных процентов и срочных вкладов «в одном флаконе»**.
- В стабильных экономических условиях при многолетнем сроке кредита применение сложного процента является неписаным стандартом. Но год –это большой срок. Поэтому многие российские и иностранные банки начисление сложных процентов по кварталам, а в условиях высокой инфляции и по месяцам.

В кредитных договорах и банковских правилах это звучит примерно так: *«Ежеквартально сумма вклада увеличивается на ... процентов»* или *«Проценты по вкладу капитализируются каждые три месяца»* или *«Сумма процентов по вкладу прибавляется к основному вкладу раз в три месяца»*.

НАЧИСЛЕНИЕ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ

- В отличие от схемы простых процентов, где процент начисляется на одну и ту же величину долга или депозита (базу), в схеме сложных процентов начисленные проценты присоединяются к первоначальной сумме.
- Присоединение начисленных процентов к сумме, которая послужила базой для их начисления называют *капитализацией*.

Период (12% годовых – 1% в месяц)	Сумма на депозите	Начисленный процент
Начало 1 месяца	100тыс	
Конец первого месяца	100тыс 1000	100тыс X 1% = 1000
Конец второго месяца	100тыс 1000 1010	100тыс 1000 X 1% = 1010
Конец третьего месяца	100тыс 1000 1010 1020,1	100тыс 1000 1010 X 1% = 1020,1

Наращение по сложным процентам

Наращение по сложным процентам представляет собой процесс, соответствующий геометрической прогрессии, первый член которой равен PV , а знаменатель - $(1 + r)$. Последний член прогрессии равен наращенной сумме в конце срока ссуды.

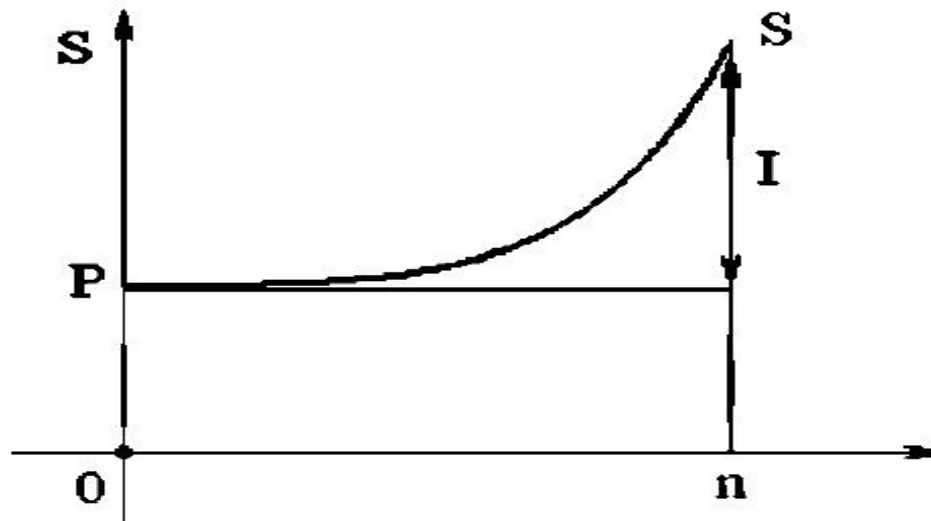
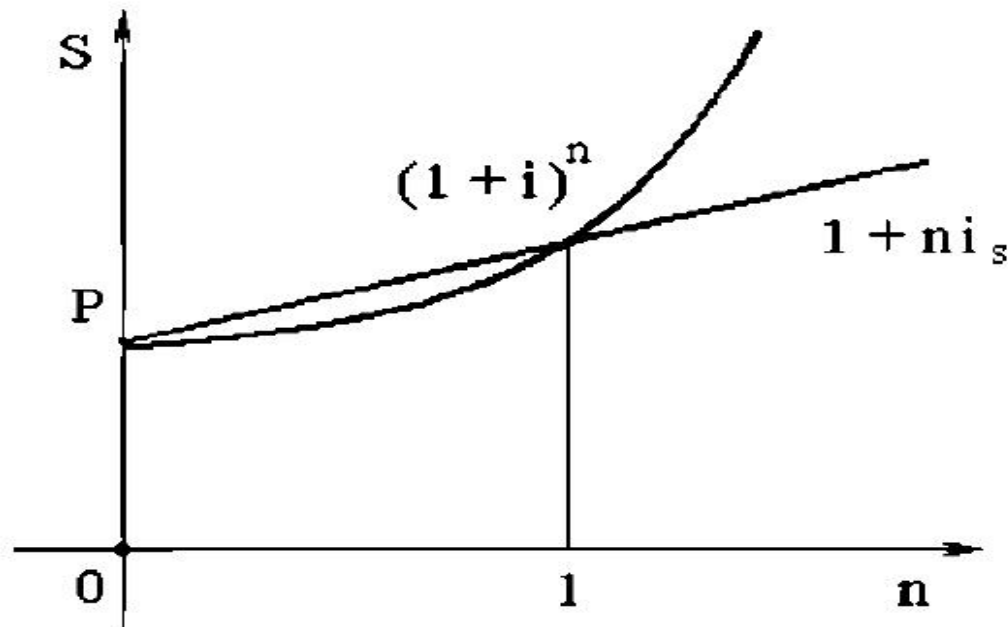


Иллюстрация мощи сложного процента

- Сложный процент дает приращение вклада в геометрической прогрессии, а простой процент - в арифметической. При больших сроках разница может быть впечатляющей.
- Классический пример с «покупкой» острова Манхэттен, где сейчас расположен центр Нью-Йорка, у индейского вождя за 24 доллара в 1624 году. Если бы эти деньги удалось положить в банк всего под 6,3% годовых (средний процент по долгосрочным займам в XX веке в США), то спустя 390 лет, в 2014 году, была бы накоплена сумма примерно 534 791 388 000 долл.
- При простом проценте накопленная сумма была бы ничтожной: $24 \cdot (1 + 0,063 \cdot 390) = 613,68$ долл.

Соотношение множителей наращения



- для срока меньше года простые проценты больше сложных;
- для срока больше года сложные проценты больше простых;
- для срока равного году множители наращения равны друг другу.

Декурсивный метод начисления сложных процентов. Модель наращивания

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Итоговая сумма	$S_{in} = P(1 + i)^n$	P — текущая стоимость; i — процентная ставка наращивания за период начисления процентов; n — число периодов начисления процентов
Процент	$I_{in} = S_{in} - P$	
Множитель наращивания	$B_{in} = (1 + i)^n$	

Формулу вычисления S называют **основной моделью сложного процента**.

Значения множителя наращивания табулированы для наиболее часто встречающихся значений I и n (слайд)

Множители наражения (сложный процент)

$$B_{in} = (1+i)^n$$

Число перио- дов n	Ставка процента, %											
	2	5	7	9	10	11	13	15	18	20	22	25
1	1,020000	1,050000	1,070000	1,090000	1,100000	1,110000	1,130000	1,150000	1,180000	1,200000	1,220000	1,250000
2	1,040400	1,102500	1,144900	1,188100	1,210000	1,232100	1,276900	1,322500	1,392400	1,440000	1,488400	1,562500
3	1,061208	1,157625	1,225043	1,295029	1,331000	1,367631	1,442897	1,520875	1,643032	1,728000	1,815848	1,953125
4	1,082432	1,215506	1,310796	1,411582	1,464100	1,518070	1,630474	1,749006	1,938778	2,073600	2,215335	2,441406
5	1,104081	1,276282	1,402552	1,538624	1,610510	1,685058	1,842435	2,011357	2,287758	2,488320	2,702708	3,051758
6	1,126162	1,340096	1,500730	1,677100	1,771561	1,870415	2,081952	2,313061	2,699554	2,985984	3,297304	3,814697
7	1,148686	1,407100	1,605781	1,828039	1,948717	2,076160	2,352605	2,660020	3,185474	3,583181	4,022711	4,768372
8	1,171659	1,477455	1,718186	1,992563	2,143589	2,304538	2,658444	3,059023	3,758859	4,299817	4,907707	5,960464
9	1,195093	1,551328	1,838459	2,171893	2,357948	2,558037	3,004042	3,517876	4,435454	5,159780	5,987403	7,450581
10	1,218994	1,628895	1,967151	2,367364	2,593742	2,839421	3,394567	4,045558	5,233836	6,191736	7,304631	9,313226
11	1,243374	1,710339	2,104852	2,580426	2,853117	3,151757	3,835861	4,652391	6,175926	7,430084	8,911650	11,641532
12	1,268242	1,795856	2,252192	2,812665	3,138428	3,498451	4,334523	5,350250	7,287593	8,916100	10,872213	14,551915
13	1,293607	1,885649	2,409845	3,065805	3,452271	3,883280	4,898011	6,152788	8,599359	10,699321	13,264100	18,189894
14	1,319479	1,979932	2,578534	3,341727	3,797498	4,310441	5,534753	7,075706	10,147244	12,839185	16,182202	22,737368
15	1,345868	2,078928	2,759032	3,642482	4,177248	4,784589	6,254270	8,137062	11,973748	15,407022	19,742287	28,421709
16	1,372786	2,182875	2,952164	3,970306	4,594973	5,310894	7,067326	9,357621	14,129023	18,488426	24,085590	35,527137
17	1,400241	2,292018	3,158815	4,327633	5,054470	5,895093	7,986078	10,761264	16,672247	22,186111	29,384420	44,408921
18	1,428246	2,406619	3,379932	4,717120	5,559917	6,543553	9,024268	12,375454	19,673251	26,623333	35,848992	55,511151

ПРИМЕР 1

Какой величины достигнет сумма 100 тыс. руб. через пять лет при начислении процентов ежегодно по сложной ставке 15,5%? Чему равен сложный процент?

Дано: $P = 100$; $i = 0,155$; $n = 5$.

Найти: S .

Решение

$$S = 100(1 + 0,155)^5 = 200,555 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$I = 200,555 - 100 = 100,555 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Декурсивный способ начисления сложных процентов. Модель дисконтирования

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Текущая стоимость	$P_{in} = \frac{S}{(1+i)^n}$	S — итоговая сумма; i — процентная ставка наращивания за период начисления процентов; n — число периодов начисления процентов
Дисконт	$D_{in} = S - P_{in}$	
Множитель дисконтирования	$v_{in} = \frac{1}{(1+i)^n}$	

Антисипативный метод начисления сложных процентов. Модель дисконтирования

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Текущая стоимость	$P = S(1 - d)^n$	S — итоговая сумма; d — процентная ставка наращивания за период начисления процентов; n — число периодов начисления процентов
Дисконт	$D_{dn} = S - P_{in}$	
Множитель дисконтирования	$v_{dn} = (1 - d)^n$	

Формулу вычисления P называют **основной моделью сложного дисконта**

Пример 2

Долговое обязательство на сумму 500 тыс. руб., срок оплаты которого наступает через пять лет, продается с дисконтом по сложной учетной ставке 15% годовых. Каковы размер полученной за долг суммы и величина дисконта?

Дано: $S = 500$; $d = 0,15$; $n = 5$.

Найти: P , D .

Решение

$$P = 500(1 - 0,15)^5 = 221,85 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$D = 500 - 221,85 = 278,15 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Антисипативный метод начисления сложных процентов. Модель наращивания

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Итоговая сумма	$S_{dn} = \frac{P}{(1-d)^n}$	P — текущая стоимость; d — сложная учетная ставка за период начисления процентов; n — число периодов начисления процентов
Процент	$I_{dn} = S_{dn} - P$	
Множитель наращивания	$B_{dn} = \frac{1}{(1-d)^n}$	

Пример 3

Ссуда в размере 100 тыс. руб. была получена в банке на условиях начисления процентов авансом по годовой сложной ставке 20% и возмещения долга через три года. Определим размер суммы погашения и прибыль банка.

Дано: $P = 100$; $d = 0,2$; $n = 3$.

Найти: S , I .

Решение

$$S = \frac{100}{(1 - 0,2)^3} = 195,313 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$I = 195,313 - 100 = 95,313 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Начисление процентов по сложной переменной ставке. Модель наращивания при декурсии

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Итоговая сумма	$S_{\Pi} = P \prod_{l=1}^k (1 + i_l)^{n_l}$	P — текущая стоимость; $i_1, i_2, \dots, i_k$ — последовательность применяемых ставок соответственно при начислении процентов за $n_1,$ $n_2, \dots, n_k$ периодов
Процент	$I_{\Pi} = S_{\Pi} - P$	
Множитель наращивания	$B_{\Pi} = \prod_{l=1}^k (1 + i_l)^{n_l}$	

Пример 4

Получена ссуда в размере 100 тыс. руб. Заданы договорная базовая процентная ставка 12% годовых плюс маржа 0,5% в первые два года и 0,75% в оставшиеся годы. Определим сумму к возвращению через пять лет.

Дано: $P = 100$; $i_0 = 0,12$; $\Delta i_1 = 0,005$; $\Delta i_2 = 0,0075$; $t_1 = 2$; $t_2 = 3$.

Найти: S .

Решение

$$i_1 = 0,125; i_2 = 0,1275; n_1 = 2; n_2 = 3;$$

$$S = 100(1 + 0,125)^2(1 + 0,1275)^3 = 181,407 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Годовая номинальная процентная ставка

Годовая номинальная ставка, конвертируемая t раз в год
— процентная ставка, определяемая с учетом процентной ставки за один период начисления процентов и числа периодов начисления процентов в t раз

Годовая номинальная ставка *наращения*:

$$j_m = it,$$

где i — ставка наращенения за период начисления процентов.

Годовая номинальная *дисконтная* ставка:

$$d_m = dm,$$

где d — дисконтная ставка за период начисления процентов.

Начисление процентов по годовой номинальной ставке

Наращение

Дисконтирование

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Итоговая сумма	$S = P \left(1 + \frac{j_m}{m} \right)^{mt}$	P – текущая стоимость; j_m – годовая номинальная ставка нара- щения;
Текущая стоимость	$P = S \left(1 - \frac{d_m}{m} \right)^{mt}$	S – итоговая сумма; d_m – годовая номинальная учетная ставка; t – время (в годах); m – число начислений процентов в год

Пример 5

Какой величины достигнет сумма 100 тыс. руб. через пять лет при начислении процентов по сложной ставке 15,5% годовых: а) ежегодно, б) ежеквартально, в) ежемесячно? Какова величина начисленного при этом процента?

Дано: $P = 100$; $j_m = 0,155$; $t = 5$; а) $m = 1$; б) $m = 4$; в) $m = 12$.

Найти: S , I .

Решение

а) $S = 100(1 + 0,155)^5 = 200,56$; $I = 200,56 - 100 = 100,56$ (тыс. руб.);

б) $S = 100 \left(1 + \frac{0,155}{4} \right)^{5 \cdot 4} = 213,91$ (тыс. руб.); $I = 213,91 - 100 = 113,91$ (тыс. руб.);

в) $S = 100 \left(1 + \frac{0,155}{12} \right)^{5 \cdot 12} = 215,99$ (тыс. руб.); $I = 215,99 - 100 = 115,99$ (тыс. руб.).

Таким образом, операция наращения выгоднее при более частом начислении процентов.

Пример 6

Из какого капитала можно получить 45 тыс. руб. через шесть лет наращением сложными процентами по процентной ставке 13%, если проценты начисляются:

а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно?

Дано: $S = 45$; $j_m = 0,13$; $t = 6$; а) $m = 1$; б) $m = 4$; в) $m = 12$.

Найти: P .

Решение

$$\text{а) } P = \frac{45}{\left(1 + \frac{0,13}{1}\right)^{1 \cdot 6}} = 21,614 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$\text{б) } P = \frac{45}{\left(1 + \frac{0,13}{4}\right)^{4 \cdot 6}} = 20,886 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$\text{в) } P = \frac{45}{\left(1 + \frac{0,13}{12}\right)^{12 \cdot 6}} = 20,715 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Таким образом, более выгодным является вариант более частого начисления процентов, поскольку для получения одной и той же итоговой суммы при этом требуется меньшая текущая стоимость.

Пример 7

Долговое обязательство на сумму 500 тыс. руб., срок оплаты которого наступает через пять лет, продается с дисконтом по сложной учетной ставке 15% годовых. Каковы размер полученной за долг суммы и величина дисконта при начислении процентов: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно?

Дано: $S = 500$; $d_m = 0,15$; $t = 5$; а) $m = 1$; б) $m = 4$; в) $m = 12$.

Найти: P , D .

Решение

$$\text{а) } P = 500 \left(1 - \frac{0,15}{1} \right)^{1 \cdot 5} = 221,85 \text{ (тыс. руб.)}; D = 500 - 221,85 = 278,15 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$\text{б) } P = 500 \left(1 - \frac{0,15}{4} \right)^{4 \cdot 5} = 232,80 \text{ (тыс. руб.)}; D = 500 - 232,80 = 267,20 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$\text{в) } P = 500 \left(1 - \frac{0,15}{12} \right)^{12 \cdot 5} = 235,07 \text{ (тыс. руб.)}; D = 500 - 235,07 = 264,93 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Таким образом, данная операция дисконтирования выгоднее при более частом начислении процентов, поскольку в этом случае меньше дисконт.

Начисление процентов по непрерывной ставке

Непрерывная процентная ставка — это процентная ставка, при которой начисление процентов осуществляется непрерывно. Начисление процентов по непрерывной ставке является предельным случаем, когда начисление происходит очень часто, а значит, бесконечно много раз в год.

Годовая непрерывная ставка δ называется *силой роста* (при наращении) или *силой учета* (при дисконтировании). Она имеет смысл предельного значения годовой номинальной ставки при неограниченном увеличении числа начислений процентов в год:

$$\delta = \lim_{m \rightarrow \infty} j_m \text{ или } \delta = \lim_{m \rightarrow \infty} d_m.$$

Модели начисления непрерывных процентов

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Итоговая сумма	$S_{\delta} = Pe^{\delta t}$	P — текущая стоимость; S — итоговая сумма; δ — сила роста; t — время (в годах)
Процент	$I_{\delta} = S_{\delta} - P$	
Множитель наращения	$B_{\delta} = e^{\delta t}$	
Текущая стоимость	$P_{\delta} = Se^{-\delta t}$	
Дисконт	$D_{\delta} = S - P_{\delta}$	
Множитель дисконтирования	$v_{\delta} = e^{-\delta t}$	

Пример 8

На сумму в 200 тыс. руб. начисляются проценты по ставке 8% . Определим наращенную сумму через пять лет, если начисление происходит: а) непрерывно; б) ежедневно.

Дано: $P = 200$; $\delta = 0,08$; $t = 5$.

Найти: S .

Решение

а) $S = 200e^{0,085} = 298,365$ (тыс. руб.);

б) $S = 200 \left(1 + \frac{0,08}{365} \right)^{365 \cdot 5} = 298,351$ (тыс. руб.).

Модель доходности операций при начислении сложных процентов

Показатель доходности	Формула	Исходные показатели
Ставка наращения	$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1$	P — текущая стоимость; S — итоговая стоимость; t — время (годы)
Учетная ставка	$d = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}}$	

n — число периодов начисления процентов.

Пример 9

Предприниматель получил ссуду в банке в размере 100 тыс. руб. с условием начисления на эту сумму ежегодно сложных процентов и возвращения долга в размере 150 тыс. руб. через три года. Найдем доходность операции для банка в виде годовой сложной ставки.

Дано: $P = 100$; $S = 150$; $n = 3$.

Найти: i .

Решение

$$i = \sqrt[3]{\frac{150}{100}} - 1 = 0,1447, \text{ или } 14,47\%.$$

Эквивалентные сложные ставки

Эквивалентная ставка	Формула	Исходная ставка
Сложная ставка нараще- ния j_{m_2}	$j_{m_2} = m_2 \left(\left(1 + \frac{j_{m_1}}{m_1} \right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1 \right)$	Сложная ставка нараще- ния j_{m_1}
Сложная учетная ставка d_{m_2}	$d_{m_2} = m_2 \left(1 - \left(1 - \frac{d_{m_1}}{m_1} \right)^{\frac{m_1}{m_2}} \right)$	Сложная учетная ставка d_{m_1}
Сложная учетная ставка d_{m_2}	$d_{m_2} = m_2 \left(1 - \left(1 + \frac{j_{m_1}}{m_1} \right)^{-\frac{m_1}{m_2}} \right)$	Сложная ставка нараще- ния j_{m_1}
Непрерывная ставка δ	$\delta = \ln \left(1 + \frac{j_m}{m} \right)^m$	Сложная ставка нараще- ния j_m

Пример 10

Найдем годовую номинальную ставку наращенная, конвертируемую поквартально, которая эквивалентна заданной годовой номинальной ставке наращенная 10%, конвертируемой ежемесячно.

Дано: $j_{12} = 0,10$.

Найти: j_4 .

Решение

$$j_4 = 4 \left[\left(1 + \frac{0,1}{12} \right)^{\frac{12}{4}} - 1 \right] = 0,1008 = 10,08\%.$$

Эффективные ставки, эквивалентные номинальным ставкам

Формула	Исходная ставка
$r = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m - 1$	Сложная ставка наращенения j_m
$r = \left(1 - \frac{d_m}{m}\right)^{-m} - 1$	Сложная учетная ставка d_m
$r = e^{\delta} - 1$	Непрерывная ставка δ

Пример 11

Определим доходность депозитной операции при условии начисления процентов на вложенную сумму по годовой номинальной ставке 6%: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно.

Дано: $j_m = 0,06$; а) $m = 1$; б) $m = 4$; в) $m = 12$.

Найти: r .

Решение

$$\text{а) } r = \left(1 + \frac{0,06}{1}\right)^1 - 1 = 0,0600;$$

$$\text{б) } r = \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^4 - 1 = 0,0613;$$

$$\text{в) } r = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} - 1 = 0,0617.$$