Системы линейных уравнений

и методы их решения

План изложения темы

1. Основные сведения о СЛУ:

- Определение
- Виды
- Разрешимость

2. Методы решения СЛУ:

- Метод обратной матрицы
- Метод Крамера
- Метод Гаусса
- Метод Жордана-Гаусса

3. Понятие СЛОУ

Литература

- Высшая математика для экономистов: Учебник для студентов вузов. Под ред. проф. Н.Ш. Кремера.
- Высшая математика для экономистов: Практикум для студентов вузов. Под ред. проф. Н.Ш. Кремера.

Система линейных уравнений (СЛУ)

из m уравнений с n неизвестными

имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

где a_{ij} -коэффициенты при переменных;

b_i - свободные члены уравнений

Краткая форма записи СЛУ

- С помощью знаков суммирования систему записывают в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = \overline{1,m}$$

Матричная форма СЛУ

- Обозначения:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m3} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

основная матрица системы — вектор неизвестных — вектор свободных членов

- СЛУ принимает вид матричного уравнения:

$$A \cdot X = B$$

Решение СЛУ

- **Решением СЛУ** называется упорядоченный набор (вектор) значений $X=(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ при подстановке которого в СЛУ, каждое уравнение обращается в верное равенство.
- **Решить СЛУ** – найти множество всех его решений.

Равносильные СЛУ

- Две системы уравнений называются **равносильными** или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.
- Элементарные преобразования над матрицей приводят к получению систем, равносильных данной.

Виды СЛУ по числу решений

Система линейных уравнений

Совместная – имеет непустое множество решений

Несовместная – не имеет решений

Определённая – имеет единственное решение

Неопределённая – имеет не менее двух решений

Разрешимость СЛУ

- **Расширенной матрицей системы** называется матрица (A|B).
- **Теорема Кронекера-Капелли**: СЛУ совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы, т.е. **СЛУ совместна** ↔ **r(A) = r(A|B).**
- **Совместная** система имеет

единственное решение (определённа), если ранг расширенной матрицы равен числу неизвестных;

бесконечное число решений (неопределённа), если ранг меньше числа неизвестных.

Система **n** уравнений с **n** неизвестными (СЛУ $n \times n$)

- Число уравнений равно числу неизвестных ($m=n$).
- Основная матрица системы A является квадратной.
- Определитель $\det A = \Delta A$ называется **определителем системы**.

Методы решения СЛУ

- Метод **обратной матрицы** – для СЛУ $n \times n$;
- Метод **Крамера** - для СЛУ $n \times n$;
- Метод **Гаусса** – для всех СЛУ;
- Метод **Жордана-Гаусса** – для всех СЛУ.

Метод обратной матрицы

- Для СЛУ n×n,
- записанной в матричном виде $A \cdot X = B$
- имеющей **невырожденную** матрицу A ($\Delta A \neq 0$)

имеется **единственное** решение X, определяемое формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

- Если $\Delta A = 0$, то метод обратной матрицы неприменим для решения СЛУ.
- Применяется не только в решении СЛУ, но и других матричных уравнений.

Метод Крамера

- Обозначим Δ - определитель системы,

  Δ_i – определитель, получаемый заменой в матрице А j-го столбца на столбец свободных членов B.
- При Δ**≠0** СЛУ совместна определённа, её **единственное** решение находят по формулам

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \qquad j = \overline{1,n}$$

- Если Δ**=0** и **хотя бы один** Δ_i **≠0**, то система **несовместна** (не имеет решений).
- Если Δ**=0** и **все** Δ_i **=0**, то система совместна **неопределённа**, её решения находят другими методами.

Метод Гаусса

является универсальным, т.е. применим для решения любой СЛУ.

- Др. название – **метод последовательного исключения неизвестных.**
- **Идея метода** – заменить СЛУ более простой равносильной системой.
- Осуществляется в 2 этапа:

1. «**Прямой ход**» - преобразование расширенной матрицы системы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований;
2. «**Обратный ход**» - решение равносильной системы, начиная с последнего уравнения.

Базисное решение СЛУ

- Пусть r(A)=r и r<n. Выберем r переменных
$$x_1, x_2, \ldots, x_r$$
таких, что определитель из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля.
- Такие переменные назовём **основными** или **базисными**.
- Остальные n-r переменных называют **неосновными** или **свободными**.
- Решение СЛУ, в котором все свободные переменные равны нулю, называют **базисным**.
- Число базисных решений СЛУ конечно и не превосходит C_n^r