

Визначник другого та третього порядків

План

- *Визначники*
- *Мінори*
- *Алгебраїчні доповнення*

Визначники

До квадратної матриці A порядку n можна зіставити число $\det A$ ($|A|$), яке або Δ називається її визначником (детермінантом) наступним чином:

$$1. \ n = 1. \ A = (a_1); \det A = a_1.$$

$$2. \ n = 2. \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

$$3. \ n = 3, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

На відміну від матриці визначник обмежується справа та зліва одинарною лінією.

Щоб знайти визначник другого порядку, множимо елементи головної діагоналі та віднімаємо добуток елементів побічної діагоналі:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Обчислення визначника другого порядку ілюструється схемою:



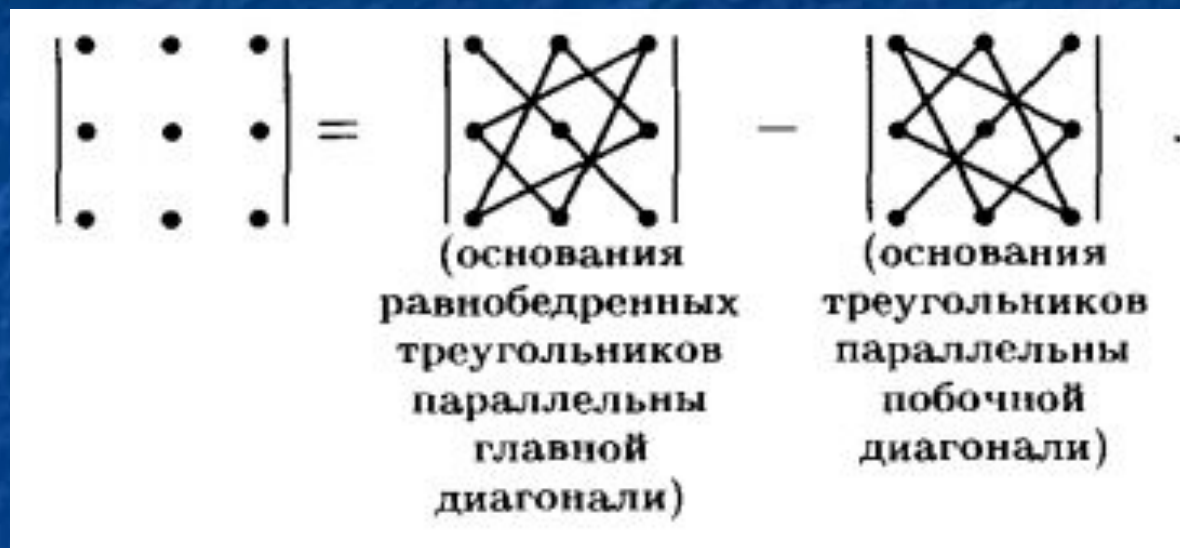
$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

The diagram illustrates the calculation of a 2x2 determinant using the rule of Sarrus. It shows the determinant as the difference between two products of elements along diagonals. The first determinant has a dot in each of the four positions. The second determinant has a diagonal line from the top-left to the bottom-right dot. The third determinant has a diagonal line from the top-right to the bottom-left dot.

Приклад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 22 \end{vmatrix} = 3 \cdot 22 - 1(-4) = 70.$$

При обчисленні визначника 3-го порядку зручно користуватися правилом трикутників (або Саррюса), яке схематично можна записати наступним чином:



Щоб знайти визначник третього порядку, будемо шість добутків таким чином:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Приклад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 \cdot 6 -$$
$$-(-2) \cdot 5 \cdot 6 - (-3) \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 5 = 100 + 12 - 54 + 60 + 36 + 30 = 184.$$

Властивості визначників

1. Значення визначника не змінюється,

якщо всі його рядки замінити відповідними стовбцями. Така операція називається

т

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**2. Перестановка двох рядків
визначника рівносильна множенню
його на -1.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**3. Якщо визначник має два однакових
рядки, або стовпці, то він дорівнює
нулю.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка, або стовпця визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Якщо всі елементи деякого рядка, або стовпця визначника дорівнюють нулю, то сам визначник дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Якщо відповідні елементи двох рядків визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Якщо до елементів деякого рядка визначника додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на довільний спільний множник, то значення визначника при цьому не зміниться.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{23} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо кожен елемент деякого рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник може бути зображений у вигляді суми двох визначників, у яких один у згаданому рядку має перші з заданих доданків, а інші другі; елементи, що знаходяться на решті місць у всіх трьох визначниках одні й ті самі.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Мінори

Означення.

Мінором M_{ij} , що відповідає елементу a_{ij} матриці, називається визначник, який відповідає матриці, утвореній з матриці викреслюванням i -го рядка та j -го стовпця.

Алгебраїчні доповнення

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} , що відповідає елементу a_{ij} матриці, називається відповідний мінор, взятий зі знаком “+”, якщо сума його індексів парна, і зі знаком “-”, якщо сума його індексів непарна.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Приклад: Дано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити мінори M_{12} і M_{22} та алгебраїчні доповнення A_{12} і A_{22} .

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 20 - (-12) = 32;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (2 \cdot 5 - 3 \cdot 6) = -(10 - 18) = 8;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (4 \cdot 5 - 6 \cdot (-2)) = 20 - (-12) = 32.$$

Алгебраїчні доповнення:

теорему.

Теорема 1. (Теорема Лапласа)

Значення визначника n -го порядку, що визначає матрицю, дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка або довільного стовпця

на відповідні алгебраїчні доповнення.

Для визначника 3×3 виконуються такі

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

**Приклад: Обчислити визначник
розкладаючи
його за елементами третього рядка:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -11 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-11) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$= 4 \cdot 1 \cdot (-7 \cdot 3 - 5 \cdot (-2)) + 2 \cdot (-1) \cdot (3 \cdot 3 - 5 \cdot 1) + (-11) \cdot 1 \cdot (3 \cdot (-2) - (-7) \cdot 1) = -44 -$$
$$-8 - 11 = 63.$$

**Теорема 2. Сума добутків елементів
будь-якого
рядка або стовпця визначника на
алгебраїчні
доповнення відповідних елементів іншого**

$$\Delta = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) +$$
$$+ a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) = 0.$$

Запитання для самоконтролю

- 1. Що називається визначником n -го порядку?
- 2. Що називається мінором та алгебраїчним доповненням елементу визначника ?
- 3. Які способи обчислення визначників ?
- 4. Які основні властивості визначників ?
- 5. Які операції над визначниками не змінюють їх?