Векторные пространства

I. Определение
II. Линейная независимость
III. Базис и размерность

Литература: А.Г.Курош Курс высшей алгебры (9-е изд.). М.: Наука, 1968.

I. Определение векторного пространства

I.1. Определение и примеры

I.2. Пространства и оболочки

Определение

Определение 1.1: Векторное пространство(V, +, ,; F)

Векторное пространство (над R) состоит из множества V *с двумя операциями* '+' и ' ' , так что

(1) Векторное сложение + :

$\forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \in V$

a) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in V$ (замкнутость)

b) $\boldsymbol{v} + \mathbf{w} = \boldsymbol{w} + \mathbf{v}$ (коммутативность)

c) $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{u})$ (ассоциативность)

d) $\exists\, \mathbf{0} \in V$ s.t. $\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$ (наличие нулевого элемента)

e) $\exists\, -\boldsymbol{v} \in V$ s.t. $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ (наличие противоположного элем.)

(2) Скалярное умножение :

$\forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ и $a, b \in$ F, [F – поле]

f) $a\, \boldsymbol{v} \in V$ (замкнутость)

g) $(a + b)\, \boldsymbol{v} = a\, \boldsymbol{v} + b\, \boldsymbol{v}$ (дистрибутивность)

h) $a\, (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = a\, \boldsymbol{v} + a\, \boldsymbol{w}$

i) $(a \times b)\, \boldsymbol{v} = a\, (b\, \boldsymbol{v}) = a\, b\, \boldsymbol{v}$ (ассоциативность)

j) $1\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

Пример 1.2: R^2

R^2 является векторным пространством, если

$$a\mathbf{x}+b\mathbf{y}=a\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax_1+by_1\\ax_2+by_2\end{pmatrix}\quad\forall\, a,b\in\mathbf{R}$$

и

$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Доказать самостоятельно.

Пример 1.3: Плоскость в пространстве R^3.

$$P=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\, x+y+z=0\right\}$$ есть векторное пространство

P есть подпространство R^3.

Доказать самостоятельно.

Пример 1.4:

Пусть $$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ Тогда V есть векторное пространство над F.

Определение 1.5: Пространство с одним элементом называется тривиальным пространством (нулевым пространством).

Пример 1.5: Пространство многочленов степени не выше n

$$\mathsf{P}_n = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,\middle|\, a_k \in \mathbf{R} \right\}$$

Например, $\mathsf{P}_3 = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \,\middle|\, a_k \in \mathbf{R} \right\}$

Обозначим $\mathbf{a} \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

Сложение: $$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$$

Умножение на число: $$b\,\mathbf{a} = b\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{n} b\, a_k x^k$$

Нулевой элемент: $$\mathbf{0} = \sum_{k=0}^{n} 0 x^k$$

Противоположный: $$-\mathbf{a} \equiv \sum_{k=0}^{n} (-a_k) x^k$$

Пример 1.6: Пространство функций

Множество $\{f \mid f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}\}$ действительных функций от действительных переменных есть векторное пространство

Сложение векторов: $$\left(f_1 + f_2\right)\left(n\right) \equiv f_1\left(n\right) + f_2\left(n\right) \qquad n \in \mathbf{N}$$

Умножение на число: $$\left(a f\right)\left(n\right) \equiv a f\left(n\right) \qquad a \in \mathbf{R}$$

Нулевой : $$zero(n) = 0$$

Противоположный: $$\left(-f\right)(n) \equiv -f\left(n\right)$$

Замечания:

- Определения могут быть другими.
- Данное определение наиболее часто встречается в математических работах.

Лемма 1.7:

Для всякого векторного пространства V,

1. $0\,\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.
2. $(-1)\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.
3. $a\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

$\forall\ \boldsymbol{v} \in V$ и $a \in$ F.

Доказательство:

1. $\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = (1+0)\mathbf{v} - \mathbf{v} \quad = \mathbf{v} + 0\mathbf{v} - \mathbf{v} \quad = 0\mathbf{v}$

2 $\quad (-1)\mathbf{v} + \mathbf{v} = (-1+1)\mathbf{v} \quad = 0\mathbf{v} \quad = \mathbf{0}$

3 $\quad a\,\mathbf{0} = a(0\,\mathbf{v}) \quad = (a\,0)\,\mathbf{v} \quad = 0\,\mathbf{v} \quad = \mathbf{0}$

.

Определение 1.8: Линейная комбинация

Пусть S - подмножество векторного пространства V,

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in S$ и $a_1, a_2, \ldots, a_m$ - числа, тогда

$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_m\mathbf{v}_m$ есть линейная комбинация элементов

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m.$

Если $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_m\mathbf{v}_m$, то говорят, что $\mathbf{v}$ линейно выражается через $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m.$

I.2. Подпространства и оболочки

Определение 2.1: Подпространство

Для любого векторного пространства, подпространство есть подмножество, которое само является пространством относительно унаследованных операций.

Замечание: Подмножество векторного пространства является подпространством тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно соответствующих операций. $\rightarrow$ Содержит $\mathbf{0}$. (ср. Лемма2.4)

Пример 2.2: Плоскость в R^3 $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x + y + z = 0 \right\}$ есть подпространство R^3.

Доказательство:

Пусть $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T \in P$

$$\rightarrow \quad x_1 + y_1 + z_1 = 0 \;,\; x_2 + y_2 + z_2 = 0$$

$$\therefore \quad a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2 = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2, az_1 + bz_2)^T$$

так что $(ax_1 + bx_2) + (ay_1 + by_2) + (az_1 + bz_2) = a(x_1 + y_1 + z_1) + b(x_2 + y_2 + z_2) = 0$

$$\rightarrow \quad a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2 \in P \quad \forall\, a, b \in \mathbf{R}$$

QED

Пример 2.3:

- $\{\ \mathbf{0}\ \}$ есть тривиальное подпространство R^n.
- R^n есть подпространство R^n.

Лемма 2.4:

Пусть S есть непустое подмножество векторного пространства V над полем F.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. S есть подпространство V.
2. S замкнуто относительно всех линейных комбинаций пар векторов.
3. S замкнуто относительно произвольных линейных комбинаций.

Доказательство: самостоятельно

Замечание: Векторное пространство = множество линейных комбинаций векторов.

Определение 2.5: Линейная оболочка

Пусть $S = \{ s_1 , \ldots, s_n \mid s_k \in V \}$ есть множество из n векторов из векторного пространства V над полем F.

Линейная оболочка множества S есть множество всех линейных комбинаций векторов из S, то есть

$$span\ S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{s}_k \,\middle|\, \mathbf{s}_k \in S, c_k \in F \right\} \quad \text{причем} \qquad span\ \varnothing = \{ \mathbf{0} \}$$

Лемма 2.6: Линейная оболочка любого подмножества векторного пространства есть подпространство.

Доказательство:

Пусть $S = \{ s_1 , \ldots, s_n \mid s_k \in V \}$ и $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n} u_k \mathbf{s}_k \,,\ \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k \mathbf{s}_k \in span\ S$

$$\rightarrow \qquad \mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \left(a u_k + b v_k \right) \mathbf{s}_k = \sum_{k=1}^{n} w_k \mathbf{s}_k \in span\ S \qquad \forall\, a, b \in \mathrm{R}$$

QED

Обратно: Любое векторное подпространство есть линейная оболочка некоторого подмножества его элементов.

Также: span S есть наименьшее векторное пространство, содержащее все элементы S.

Пример 2.7:

$$span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbf{R}^2$$

Доказательство:

Действительно, для произвольного вектора из соотношения

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

получаем $\begin{matrix} a+b=x \\ a-b=y \end{matrix}$ эта система имеет единственное решение

Так что $a = \frac{1}{2}(x+y)$ $b = \frac{1}{2}(x-y)$ $\forall\, x, y \in \mathbf{R}$ QED

Определение 2.8. Полнота

Подмножество S векторного пространства V называется полным если $\operatorname{span} S = V$.

Пример 2.9: Все возможные подпространства R^3