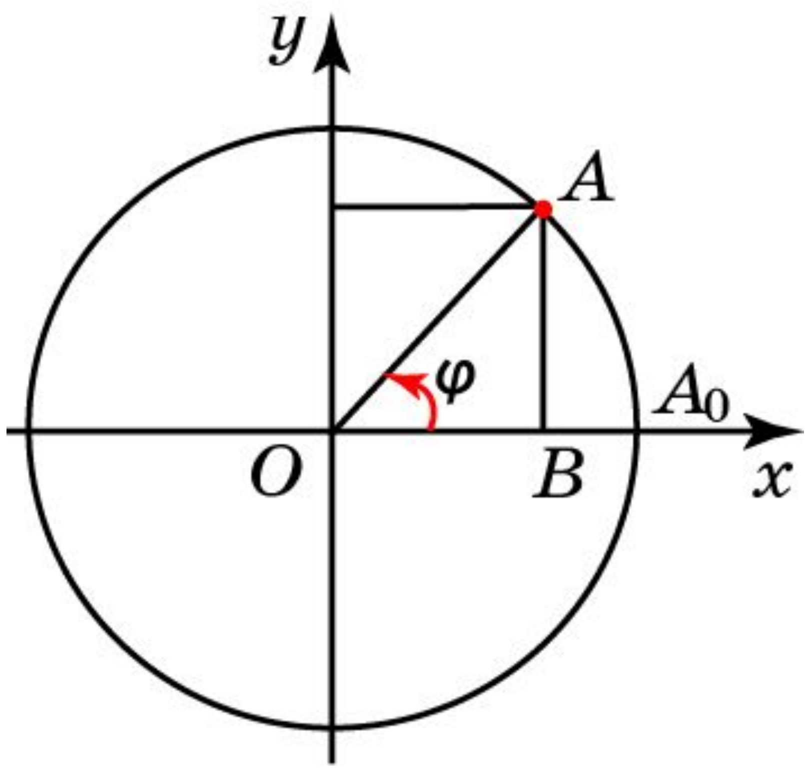
Тригонометрические функции произвольного угла

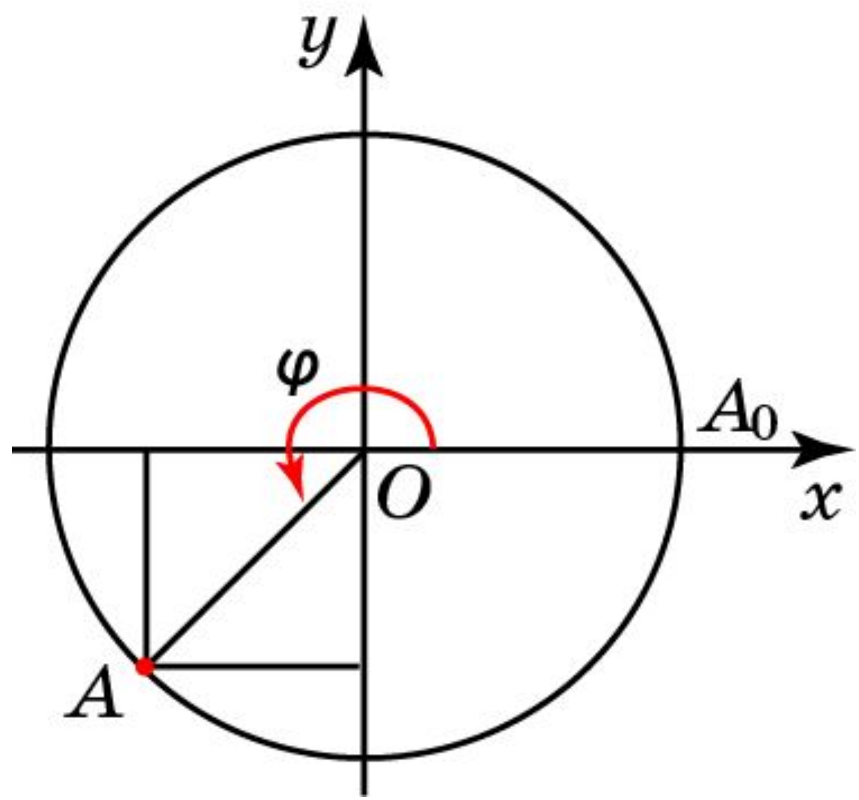
Рассмотрим декартову систему координат и окружность единичного радиуса с центром в начале координат O. Такую окружность будем называть единичной.



Каждому углу ϕ, $0^o < \phi < 90^o$, соответствует точка A на единичной окружности, полученная поворотом точки $A_0(1, 0)$ на угол ϕ против часовой стрелки. Поскольку гипотенуза OA прямоугольного треугольника OAB равна единице, то, как легко видеть, синус этого угла будет равен ординате точки A, а косинус – абсциссе точки A.

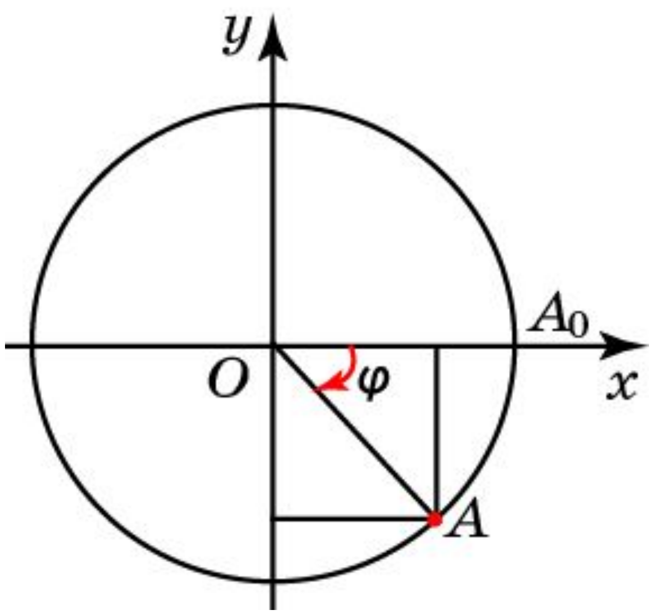
Тригонометрические функции произвольного угла

Определим sin ϕ и cos ϕ для $0^{\circ} \leq \phi < 360^{\circ}$. Рассмотрим точку A, получающуюся поворотом точки $A_0(1, 0)$ на угол против часовой стрелки. Ордината этой точки называется синусом и обозначается sin ϕ. Абсцисса этой точки называется косинусом и обозначается cos ϕ.



Тригонометрические функции произвольного угла

Определим поворот точки $A_0(1, 0)$ на градусную величину $\phi \geq 360^o$. Для этого представим ϕ в виде суммы $\phi = \phi_1 + \ldots + \phi_n$, где $\phi_1, \ldots \phi_n$ меньше 360^o. Результат последовательного выполнения поворотов на углы $\phi_1, \ldots, \phi_n$ против часовой стрелки и будет искомым поворотом точки A_0 на ϕ. Ордината и абсцисса полученной в результате полного поворота точки A называется соответственно синусом и косинусом ϕ и обозначается $\sin \phi$ и $\cos \phi$.



Для градусных величин $\phi < 0^o$ поворот на ϕ определяется аналогичным образом, но делается в направлении по часовой стрелке. В этом случае $\sin \phi$ и $\cos \phi$ также полагаются равными соответственно ординате и абсциссе точки A полученной в результате поворота точки A_0.

Тригонометрические функции произвольного угла

Тригонометрические функции tg ϕ и ctg ϕ для произвольных градусных величин ϕ определяются обычным образом, а именно,

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \operatorname{ctg}\phi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Из определения синуса и косинуса непосредственно следует, что выполняются следующие тождества:

(1) $\sin(\phi + 360^o) = \sin\phi$, $\cos(\phi + 360^o) = \cos\phi$;

(2) $\sin(\phi + 180^o) = -\sin\phi$, $\cos(\phi + 180^o) = -\cos\phi$;

(3) $\sin(-\phi) = -\sin\phi$, $\cos(-\phi) = \cos\phi$;

(4) $\sin(90^o - \phi) = \cos\phi$, $\cos(90^o - \phi) = \sin\phi$.

Теорема. Для произвольных градусных величин имеет место основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$$

Пример 1

На какую градусную величину повернется минутная стрелка за 2 ч 15 мин?

Ответ: 810°.

Пример 2

Найдите $\sin 390^{o}$ и $\cos(-300^{o})$.

Ответ: $\sin 390^{o} = \sin(360^{o}+30^{o}) = \sin 30^{o} = \frac{1}{2}$.

$\cos(-300^{o}) = \cos(360^{o}-300^{o}) = \cos 60^{o} = \frac{1}{2}$.

Упражнение 1

Найдите: а) sin 330°; б) sin(-150°); в) cos 420°; г) cos(-135°).

Ответ: а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 2

Могут ли синус и косинус произвольного угла принимать значения: а) большие 1; б) меньшие –1?

Ответ: а) Нет, не могут;

б) нет, не могут.

Упражнение 3

Укажите, для каких градусных величин синус принимает: а) положительные значения; б) значения, равные нулю; в) отрицательные значения.

Ответ: а) $360°k < \varphi < 180° + 360°k$;

б) $\varphi = 180°k$;

в) $180° + 360°k < \varphi < 360° + 360°k$.

Упражнение 4

Укажите, для каких градусных величин косинус принимает: а) положительные значения; б) значения, равные нулю; в) отрицательные значения.

Ответ: а) $-90^{\circ} + 360^{\circ}k < \varphi < 90^{\circ} + 360^{\circ}k$;

б) $\varphi = 90^{\circ} + 180^{\circ}k$;

в) $90^{\circ} + 360^{\circ}k < \varphi < 270^{\circ} + 360^{\circ}k$.

Упражнение 5

Для каких градусных величин не определен: а) tg φ; б) ctg φ?

Ответ: а) $\varphi = 90^\circ + 180^\circ k$;

б) $\varphi = 180^\circ k$.

Упражнение 6

Могут ли тангенс и котангенс принимать значения: а) большие 1; б) меньшие -1?

Ответ: а) да;

б) да.

Упражнение 7

Для каких градусных величин φ тангенс принимает значения: а) больше нуля; б) равные нулю; в) меньше нуля?

Ответ: а) $180^\circ k < \varphi < 90^\circ + 180^\circ k$;

б) $\varphi = 180^\circ k$;

в) $-90^\circ + 180^\circ k < \varphi < 180^\circ k$.

Упражнение 8

Для каких градусных величин φ котангенс принимает значения: а) больше нуля; б) равные нулю; в) меньше нуля?

Ответ: а) $180^{\circ}k < \varphi < 90^{\circ} + 180^{\circ}k$;

б) $\varphi = 90^{\circ} + 180^{\circ}k$;

в) $90^{\circ} + 180^{\circ}k < \varphi < 180^{\circ} + 180^{\circ}k$.

Упражнение 9

Найдите угол между лучом OA и осью абсцисс, если точка A имеет координаты: а) (2, 2); б) (0, 3); в) ($-\sqrt{3}$, 1); г) ($-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$).

Ответ: а) 45°;
б) 90°;
в) 150°;
г) 135°.

Упражнение 10

На какую градусную величину повернется минутная стрелка за: а) 1 ч 45 мин; б) 2 ч 30 мин; в) 3 ч 20 мин?

Ответ: а) 630°;

б) 900°;

в) 1200°.