Числовые и буквенные выражения

Л. А. Янкина,

к.п.н., доцент

Об алфавите математического языка

В алфавит математического языка входят:

1) *цифры*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

2) *буквы латинского алфавита*: a, b, c, …, z, A, B, C, …, Z.

3) *знаки действий:* $+$, $–$, $\cdot$, $:$, $\cap$, $\cup$, $\setminus$, $\times$ и др.

4) *знаки отношений*: $=$, $>$, $<$, $\|$, $\perp$, □ и др.

5) скобки (круглые, квадратные, фигурные), запятая, точка и др.

Из знаков математического алфавита по определенным правилам конструируются ***слова*** и ***предложения***.

Слово в математике - это такая конечная последовательность (набор) букв алфавита этого языка, которая имеет смысл.

Пример: запись **7 - : 8 +** не является словом

Числовые выражения

Запись, составленная из чисел, знаков действий и скобок, называется **числовым выражением**

Примеры: 1) **(240 – 20 · 3) : (20 + 70); 2) 36 + 19 · 14**

Каждое число также является числовым выражением.

Если в числовом выражении выполнить указанные действия, соблюдая принятый порядок, то получится число, которое называется

значением выражения.

Существуют числовые выражения, которые не имеют числового значения. Про такие выражения говорят, что они **не имеют смысла**.

Примеры: **1) 7 – 9** не имеет смысла на множестве **N,**

2) $\sqrt{-9}$ – на множестве **R**

3) **8 : (4 – 4)** – не имеет смысла на любом числовом множестве.

Числовые выражения обозначают строчными буквами латинского алфавита: ***a, b, c***…

Числовые равенства

Если два числовых выражения a и b соединить знаком равенства, получим предложение $a = b$, которое называют **числовым равенством**.

Примеры: 1) $2 + 7 = 3 \cdot 3$ (И), 2) $2+7 = 4+6$ (Л).

Свойства числовых равенств

a, b, c, d – числовые выражения.

1) $a = a$ (рефлексивность);

2) $a = b \Rightarrow b = a$ (симметричность)

3) $a = b$ и $b = c \Rightarrow a = c$ (транзитивность)

4) $a = b \Rightarrow a + c = b + c$

5) $a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$

6) $a = b,\ c = d \Rightarrow a + c = b + d$

$$a - c = b - d$$

$$a \cdot c = b \cdot d$$

$$a : c = b : d$$

при условии выполнимости данных операций

Числовые неравенства

Если два числовых выражения a и b соединить знаком «>» («<», «≥», «≤»), получим предложение $a > b$ ($a < b$, $a \geq b$, $a \leq b$), которое называют ***числовым неравенством***.

Примеры: 1) **(18 – 3) : 5 > 8 + 4** (Л), 2) **(18 – 3) : 5 < 8 + 4** (И).

Свойства числовых неравенств

a, b, c, d – числовые выражения.

1) $a < b \Rightarrow \overline{b > a}$ (антисимметричность);

2) $a < b$ **и** $b < c \Rightarrow a < c$ (транзитивность);

3) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

4) $a > b$ **и** $c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$; $a > b$ **и** $c > 0 \Rightarrow a : c > b : c$

5) $a > b$ **и** $c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$; $a > b$ **и** $c < 0 \Rightarrow a : c < b : c$

6) $a > b$ **и** $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

7) Два неравенства одинакового смысла **нельзя почленно вычитать** друг из друга:

$10 > 5, 6 > 2 \Rightarrow 4 > 3$ (И), **$10 > 5, 8 > 2 \Rightarrow 2 > 3$ (Л)**

8) $a < b$ **и** $c > d \Rightarrow a - c < b - d$

9) $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, a > b, c > d \Rightarrow ac > bd$

Выражения с переменными

Употребляемые в алгебре буквы называют **переменными**, так как

Запись, содержащая числа, буквы, знаки действий и скобки, называется **выражением с переменными** или (**буквенным выражением**).

Примеры: 1) 2x + 5; 2) $\frac{3a+8}{5}$; 3) $\sqrt{x-6}$

Числа, которые можно подставлять вместо переменной в выражение, называются **значениями переменной**.

При подстановке вместо букв чисел получается числовое выражение. Если оно имеет значение, то это значение называют **значением выражения** при данных значениях переменных.

Область определения выражения -

множество значений переменной, при которых это выражение имеет определенное значение (имеет смысл).

Примеры: 1) 3x – 4, X = **R,**

2) $\dfrac{4}{x-3}$, X =]- ∞; 3[∪]3; +∞[,

3) $\sqrt{x-5}$, X = [5; + ∞[

Рассматривают также выражения, содержащие две переменные, три переменные и т.д.

Например, 3x + 7y, 5x – (2y – 7z).

Тождественное преобразование выражений

Два выражения с переменной называют **тождественно равными**, если они принимают одинаковые значения при любых значениях переменных из области определения выражений.

Примеры: 1) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, $X = \mathbf{R}$

2) $\frac{x}{4}$ и $\frac{x^2}{4x}$ не являются тождественно равными на **R**, но тождественно равны на $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$,

Равенство, верное при любых допустимых значениях переменных, называется **тождеством**.

Тождествами считают:

верные числовые равенства,

законы сложения и умножения действительных чисел,

правила вычитания и деления и др. правила действий с нулем и единицей: $a + 0 = 0 + a = a$, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $a : 1 = a$.

формулы сокращенного умножения:

1) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;
2) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$;
5) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$;
6) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
7) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Замена одного выражения другим, тождественно равным ему на данном множестве, называется **тождественным преобразованием выражения**.

Тождественные преобразования:

- разложение многочлена на множители,
- сокращение алгебраических дробей,
- упрощение выражений.

Разложение многочленов на множители

Разложить многочлен на множители – это значит тождественно преобразовать его в произведение нескольких сомножителей – многочленов и одночленов.

Основные приемы разложения многочленов на множители:

1. **Вынесение общего множителя за скобку**.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

2. Способ группировки.

$$a + b = b + a, \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

3. Использование формул сокращенного умножения.

4. Разложение квадратного трехчлена.

Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Примеры:

1) $28x^3 – 35x^4 = 7x^3(4 - 5x)$

2) $x^6 - 1 = (x^3)^2 – 1 = (x^3-1)(x^3+1) = (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

3) $x^3 + 5x – 3x^2 –15 = (x^3 – 3x^2) + (5x – 15) =$

$x^2(x - 3) +5(x - 3) = (x-3)(x^2 +5)$

4) $x^2 + 5x – 6 = (x – 1)(x + 6)$

Тождественные преобразования выражений используются при упрощении выражений.

<u>Пример</u>:

$$\frac{1-2x}{2x-3}-\frac{1-5x}{3-2x}=\frac{1-2x}{2x-3}+\frac{1-5x}{2x-3}=\frac{1-2x+1-5x}{2x-3}=\frac{2-7x}{2x-3}$$

Спасибо за внимание!