7 класс
алгебра

Системы двух линейных уравнений с двумя переменными

Основные понятия.

Вспомним!

Уравнение вида: $ax + b = 0$

называется линейным уравнением с одной переменной (где x – переменная, a и b некоторые числа).

Внимание!

x – переменная входит в уравнение обязательно в первой степени.

$45\,x - 18 = 0$ — линейное уравнением с одной переменной

$3x^2 + 6x + 7 = 0$ — не линейное уравнением с одной переменной

Вспомним!

Линейное уравнение с двумя переменными

Уравнение вида:

$$ax + by + c = 0$$

называется линейным уравнением с двумя переменными (где x, y - переменные, a, b и c - некоторые числа).

$$(x;y)$$

Решением уравнения с двумя неизвестными называется пара переменных, при подстановке которых уравнение становится верным числовым равенством.

Вспомним!

Решить линейное уравнение – это значит найти те значения переменной, при каждом из которых уравнение обращается в верное числовое равенство.

$(x;y)$- ?

Таких решений бесконечно много.

Вспомним!

$$x + y - 3 = 0$$

Реальная ситуация (словесная модель)	Алгебраическая модель	Геометрическая модель
Сумма двух чисел равна 3.	$x + y = 3$ (линейное уравнение с двумя переменными)	прямая *m* (график линейного уравнения с двумя переменными)

Теорема:

Графиком любого линейного уравнения $ax + by + c = 0$ есть прямая.

Для построения графика достаточно найти координаты двух точек.

Вспомним!

Алгоритм построения графика уравнения $ax + by + c = 0$

1. Придать переменной x конкретное значение x_1; найти из уравнения $ax + by + c = 0$ соответствующее значение y_1. Получим $(x_1;y_1)$.

2. Придать переменной x конкретное значение x_2; найти из уравнения $ax + by + c = 0$ соответствующее значение y_2. Получим $(x_2;y_2)$.

3. Построим на координатной плоскости точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ и соединим прямой.

4. Прямая – есть график уравнения.

Часто приходится рассматривать математическую модель состоящую из **двух линейных уравнений с двумя переменными.**

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$(x;y)$$

Решение системы уравнений с двумя неизвестными называется пара переменных, при подстановке которых уравнения становятся верными числовыми равенствами.

Решить систему - это значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Пример 1

Графический способ решения систем

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

1. Построим график уравнения
$2x - y - 3 = 0$, $y = 2x - 3.$

x	1	2
y	-1	1

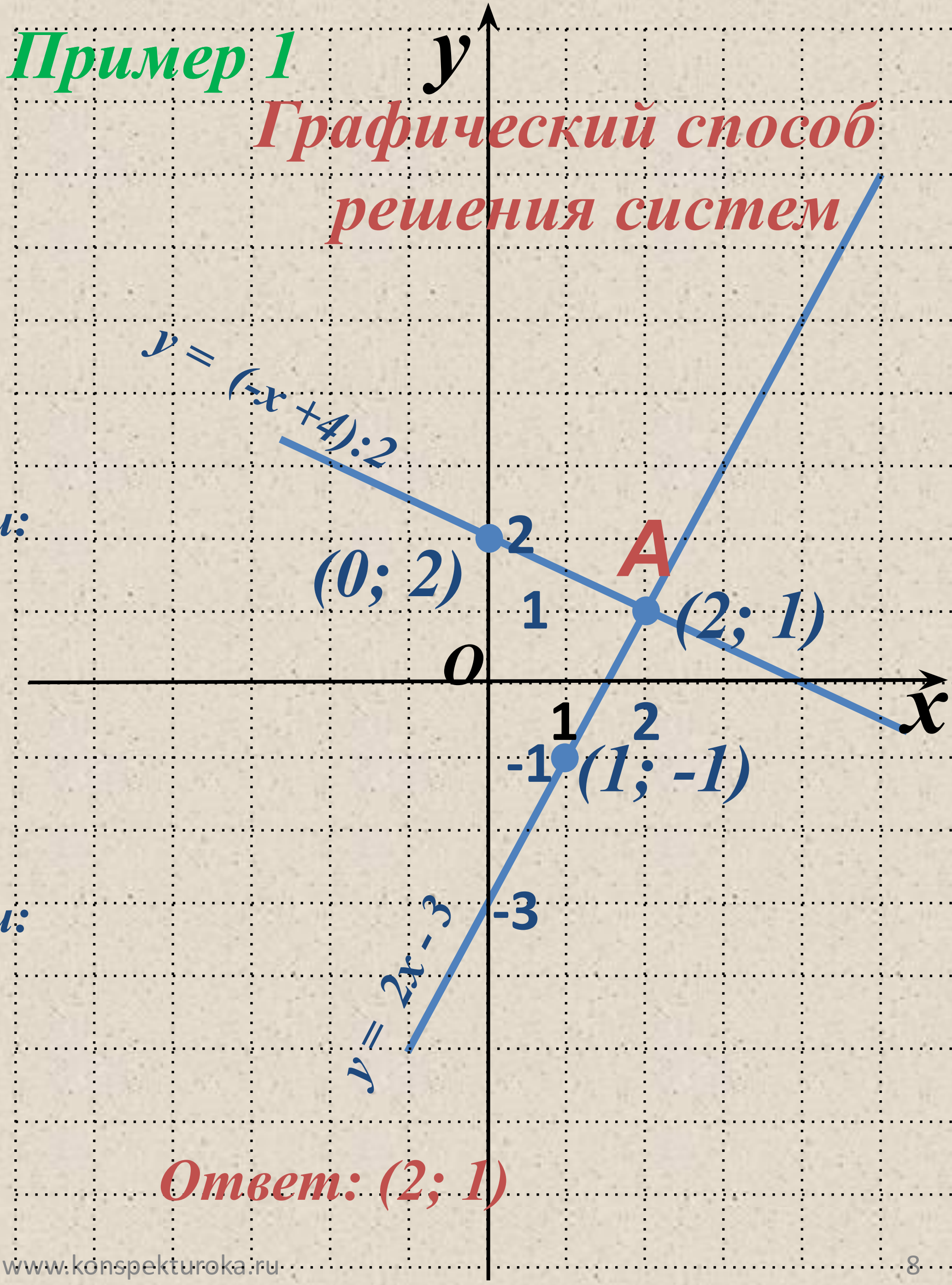
Получим точки:
(1; -1), (2; 1)

2. Построим график уравнения
$x + 2y - 4 = 0$, $2y = -x + 4,$
$y = (-x + 4) : 2.$

x	0	2
y	2	1

Получим точки:
(0; 2), (2; 1)

3. Прямые пересекаются в единственной точке A(2;1)



Ответ: (2; 1)

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0, \\ 2x + 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

Пример 2

Графический способ решения систем

1. Построим график уравнения

$x + 2y – 5 = 0$, $y = (5 - x):2.$

x	1	3
y	2	1

Получим точки:

(1; 2), (3; 1)

2. Построим график уравнения

$2x + 4y + 3 = 0$, $4y = -2x - 3$,

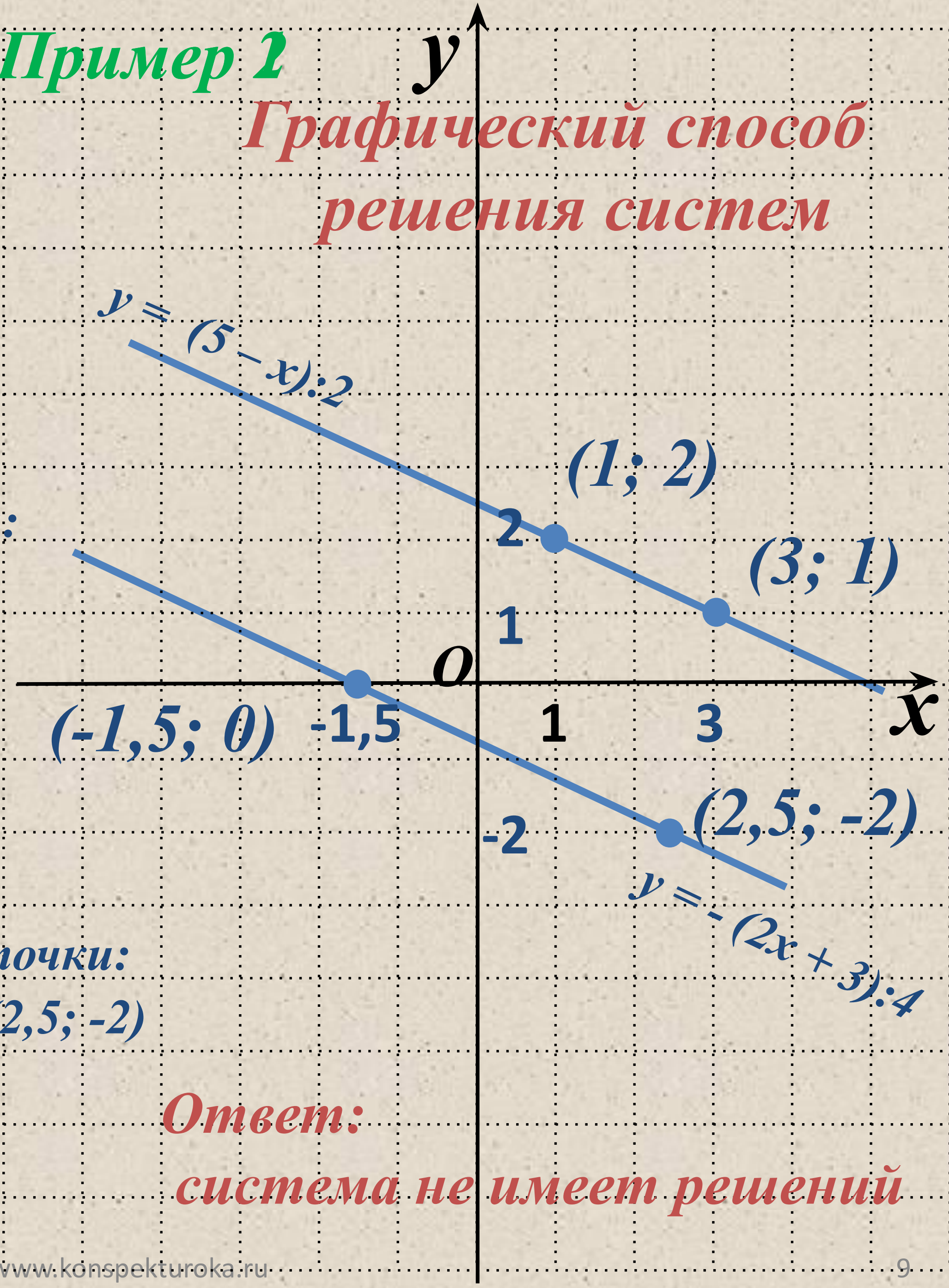
$y = -(2x + 3) : 4.$

x	-1,5	2,5
y	0	-2

Получим точки:

(-1,5; 0), (2,5; -2)

3. Прямые параллельны.



Ответ:

система не имеет решений

Пример 3

При каких значениях *а* система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} (2a-1)x+3y=7a+1, \\ (a+2)x+2y=5a-3. \end{cases}$$

Решение

Условие при которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\frac{2a-1}{a+2} \neq \frac{3}{2},$$

Используем свойство пропорции:

$$2(2a-1) \neq 3(a+2),$$

$$4a-2 \neq 3a+6$$

$$4a-3a \neq 2+6$$

$$a \neq 8$$

Ответ: при всех значениях *а*, кроме *а* = 8, данная функция имеет единственное решение.

Количество решений двух линейных уравнений с двумя переменными.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

1) Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то прямые пересекаются и система имеет единственное решение.

2) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то прямые параллельны и система не имеет решений. Система называется несовместной.

3) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то прямые совпадают и система имеет бесконечно много решений. Система называется неопределенной.

Пример 4

При каких значениях a система уравнений несовместна:

$$\begin{cases} (2a-1)x+3y=7a+1, \\ (2a+1)x+5y=5a-3. \end{cases}$$

Решение

Условие при которых система уравнений несовместна:

$$\frac{2a-1}{2a+1}=\frac{3}{5}\neq\frac{7a+1}{5a-3}$$

1) Сначала рассмотрим равенство $\dfrac{2a-1}{2a+1}=\dfrac{3}{5}$

Используем свойство пропорции: $5(2a-1)=3(2a+1),$

$10a-5=6a+3$ $\quad 10a-6a=3+5$ $\quad 4a=8$ $\quad a=2$

2) Теперь проверим неравенство: $$\frac{3}{5} \neq \frac{7a+1}{5a-3}$$

При подстановке значения $a = 2$ имеем: $$\frac{3}{5} \neq \frac{7 \bullet 2+1}{5 \bullet 2-3}$$

$$\frac{3}{5} \neq \frac{15}{7}$$ - верное неравенство

Ответ: при $a = 2$, данная система несовместна.

Пример 5

При каких значениях **а** система уравнений **неопределенна:**

$$\begin{cases} (2a-1)x+3y=7a+1, \\ (a+1)x+6y=11a+5. \end{cases}$$

Укажите решения системы.

Решение

Условие при которых система уравнений **неопределенна:**

$$\frac{2a-1}{a+1}=\frac{3}{6}=\frac{7a+1}{11a+5}$$

1) Сначала рассмотрим равенство $\frac{2a-1}{a+1}=\frac{3}{6}$ $\frac{2a-1}{a+1}=\frac{1}{2}$

Используем свойство пропорции: $2(2a-1)=a+1,$

$4a-2=a+1$ $4a-a=1+2$ $3a=3$ $a=1$

2) Теперь проверим равенство: $\frac{3}{6} = \frac{7a+1}{11a+5}$

При подстановке значения $a = 1$ имеем: $\frac{3}{6} \neq \frac{7\cdot 1+1}{11\cdot 1+5}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ - верное равенство

Итак при $a = 1$, данная система неопределенна.

При подстановке значения $a = 1$ в данную систему имеем:

$$\begin{cases} (2\cdot 1 - 1)x + 3y = 7\cdot 1 + 1, \\ (1+1)x + 6y = 11\cdot 1 + 5. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y = 8, \\ 2x + 6y = 16. \end{cases}$$

Поделим второе уравнение на 2, имеем: $\begin{cases} x + 3y = 8, \\ x + 3y = 8. \end{cases}$

Ответ: решением системы будет любая пара чисел x и y, в которой $x = 8 - 3y$, а y – произвольное число.

Ответить на вопросы

а) что собой представляют графики обоих уравнений системы?

б) в каком случае система имеет единственное решение?

в) какая система является несовместимой?

г) о какой системе говорят, что она неопределенна?

д) что называется решением системы уравнений с двумя переменными?

е) что значит решить систему уравнений?