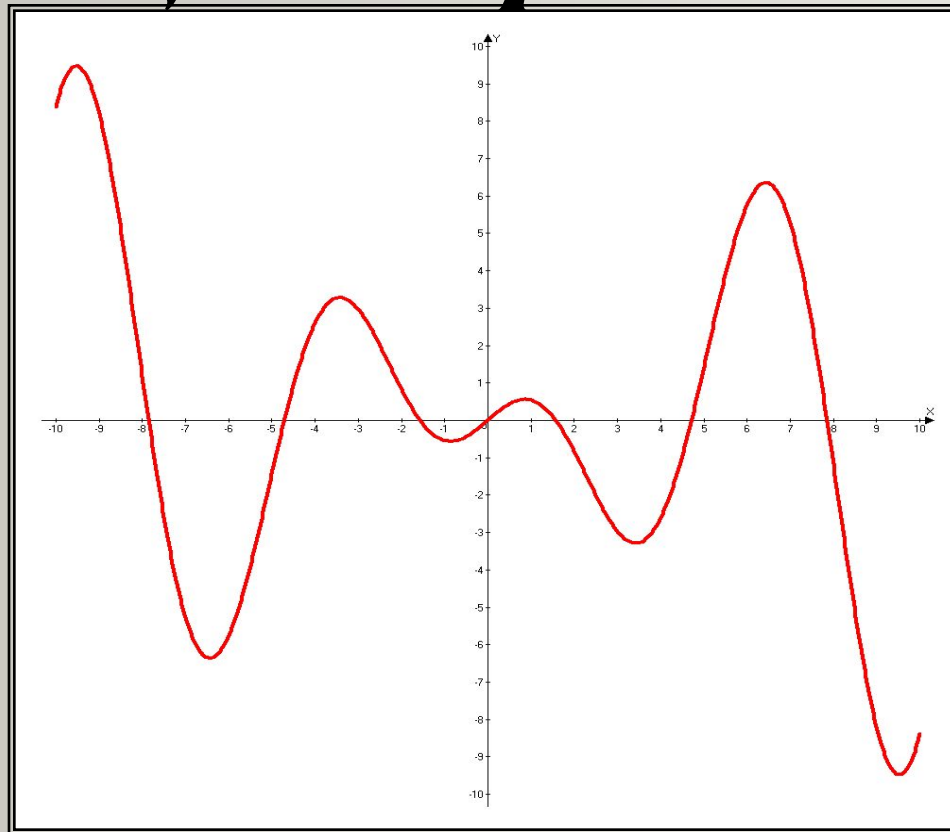


Исследование функций и построение графиков с помощью производной



«...нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира...»

Н.И. Лобачевский

Скажи мне, и я забуду.

Покажи мне, и я запомню.

Дай мне действовать самому,

И я научусь.

Конфуций

Цели урока:

□ *Образовательные.*

Формировать:

- - навыки прикладного использования аппарата производной;
- - выявить уровень овладения учащимися комплексом знаний и умений по исследованию функции и ликвидировать пробелы в знаниях в соответствии с требованиями к математической подготовке учащихся.

□ *Развивающие.*

Развивать:

- - способности к самостоятельному планированию и организации работы
- - навыки коррекции собственной деятельности через применение информационных технологий;
- - умение обобщать, абстрагировать и конкретизировать знания при исследовании функции.

□ *Воспитательные.*

Воспитывать:

- - познавательный интерес к математике;
- - информационную культуру и культуру общения;
- - самостоятельность, способность к коллективной работе.

1 этап. Актуализация ЗУН, необходимых для творческого применения знаний

- *Необходимое условие возрастания и убывания функции*
- *Достаточное условие возрастания и убывания функции*
- *Необходимое условие экстремума. (теорема Ферма)*
- *Признак максимума функции.*
- *Признак минимума функции.*
- *Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции*

Необходимое условие возрастания и убывания функции

Т е о р е м а.

Если дифференцируемая функция $f(x)$, $x \in (a;b)$, возрастает (убывает) на $(a;b)$, то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для любого x из интервала $(a;b)$.



Достаточные условия возрастания и убывания функции

Теорема Лагранжа.

Если функция $f(x)$, $x \in [a; b]$,
непрерывна на отрезке $[a; b]$ и
дифференцируема на интервале
 $(a; b)$, то найдётся точка $c \in (a; b)$
такая, что имеет место формула

$$f(a) - f(b) = f'(c)(b - a)$$



Достаточное условие возрастания функции

Теорема.

Если функция f имеет неотрицательную производную в каждой точке интервала $(a;b)$, то функция f возрастает на интервале $(a;b)$.

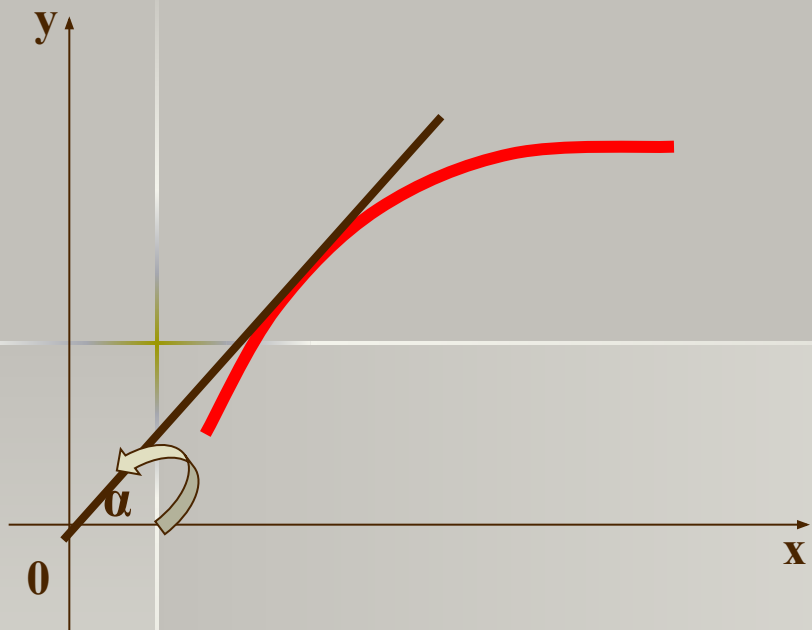


Достаточное условие убывания функции

Теорема.

**Если функция имеет
неположительную
производную в каждой точке
интервала $(a;b)$, то функция f
убывает на интервале $(a;b)$.**



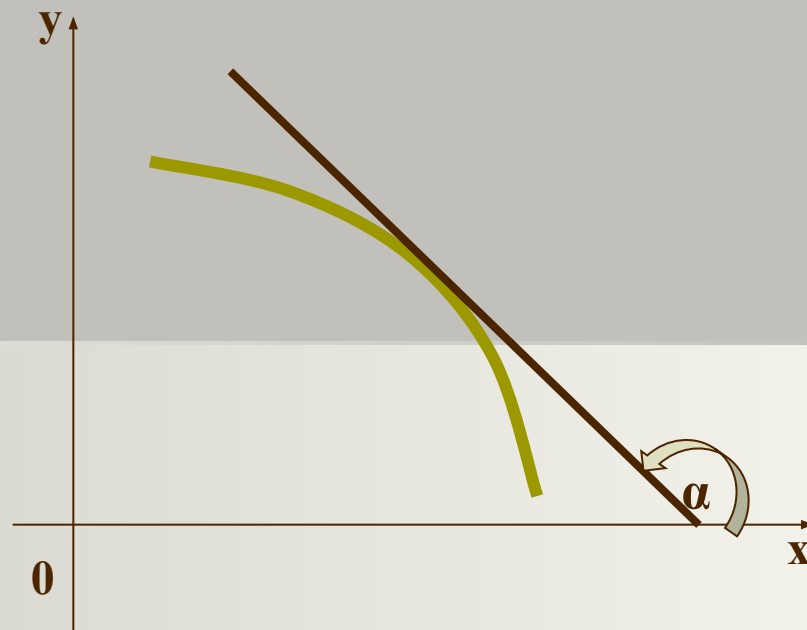


Функция возрастает

$$\alpha < 90^0$$

$$\text{tg } \alpha > 0$$

$$f'(x) > 0$$



Функция убывает

$$\alpha > 90^0$$

$$\text{tg } \alpha < 0$$

$$f'(x) < 0$$



Правило нахождения интервалов монотонности

1) Вычисляем производную $f'(x)$ данной функции $f(x)$, а затем находим точки, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует. Эти точки называются *критическими* для функции $f(x)$



Правило нахождения интервалов монотонности

2) Критическими точками область определения функции $f(x)$ разбивается на интервалы, на каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами монотонности.



Правило нахождения интервалов монотонности

3) Определим знак $f'(x)$ на каждом из найденных интервалов. Если на рассматриваемом интервале $f'(x) \geq 0$, то на этом интервале $f(x)$ возрастает, если же $f'(x) \leq 0$, то на таком интервале $f(x)$ убывает.



Исследование экстремумов функции

Необходимое условие экстремума.

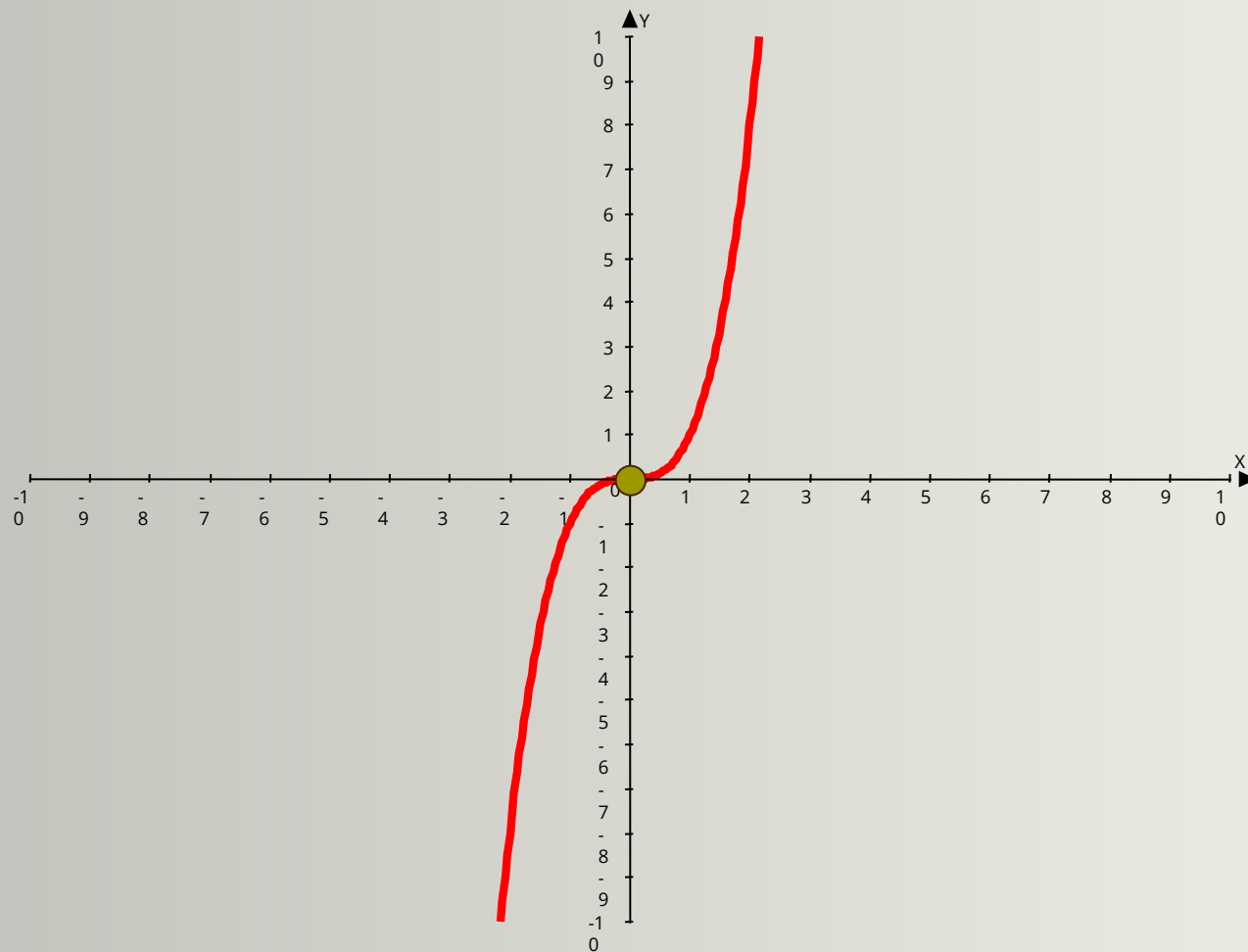
(теорема Ферма)

Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная $f'(x)$, то она равна нулю:

$$f'(x) = 0.$$

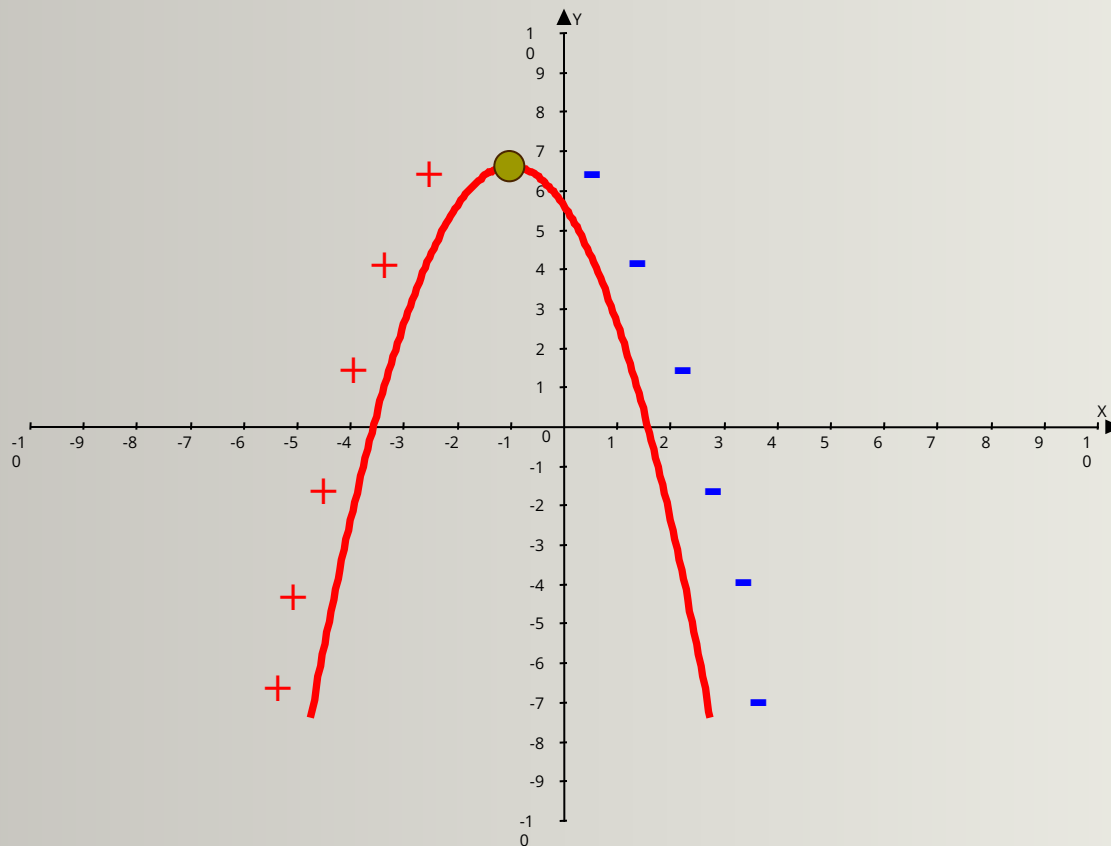


Теорема Ферма лишь необходимое условие экстремума. Например, производная функции $f(x) = x^3$ обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке функция не имеет.



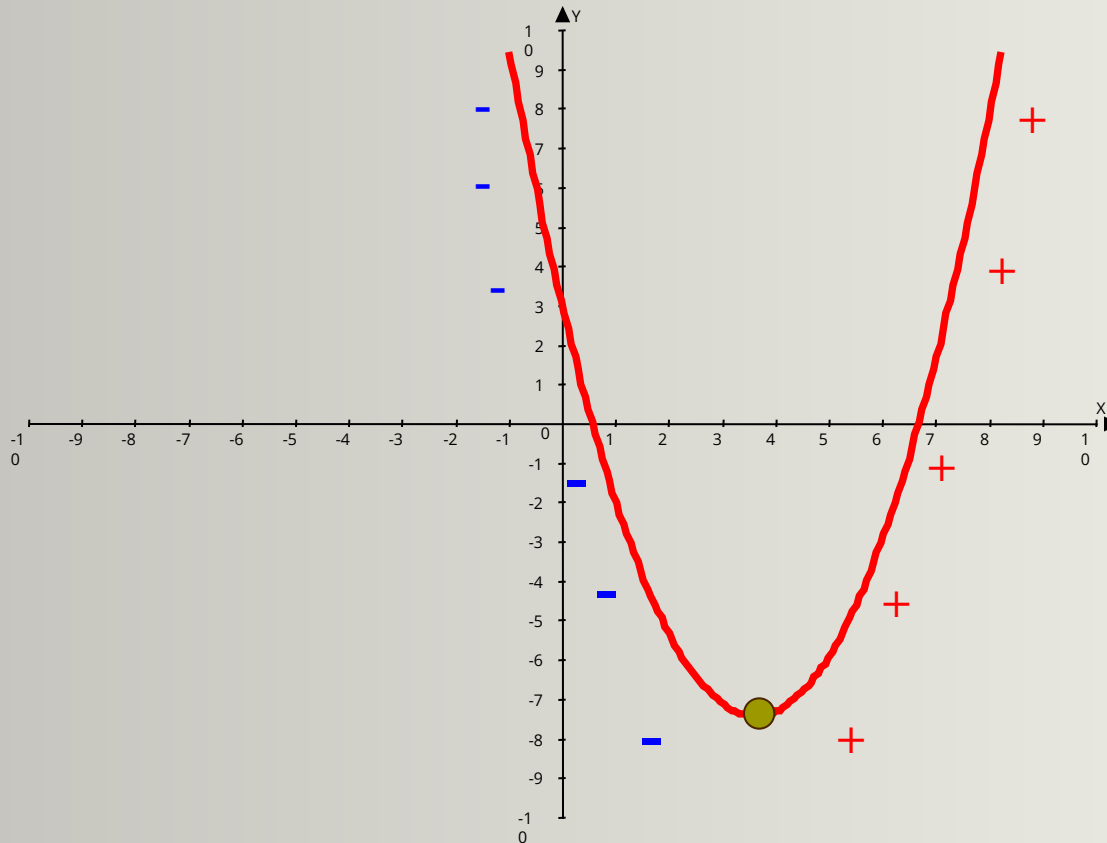
Достаточные условия существования экстремума в точке

- Признак максимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0 , а $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$, и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f .



Достаточные условия существования экстремума в точке

- Признак минимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0 , $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции f



Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции

Т е о р е м а. Пусть функция $f(x)$, $x \in (a;b)$, имеет первую и вторую производные. Тогда, если $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a;b)$, то на интервале $(a;b)$ график функции $f(x)$ выпуклый вверх, если же $f''(x) > 0$ для всех $x \in (a;b)$, то график функции $f(x)$ выпуклый вниз на $(a;b)$.



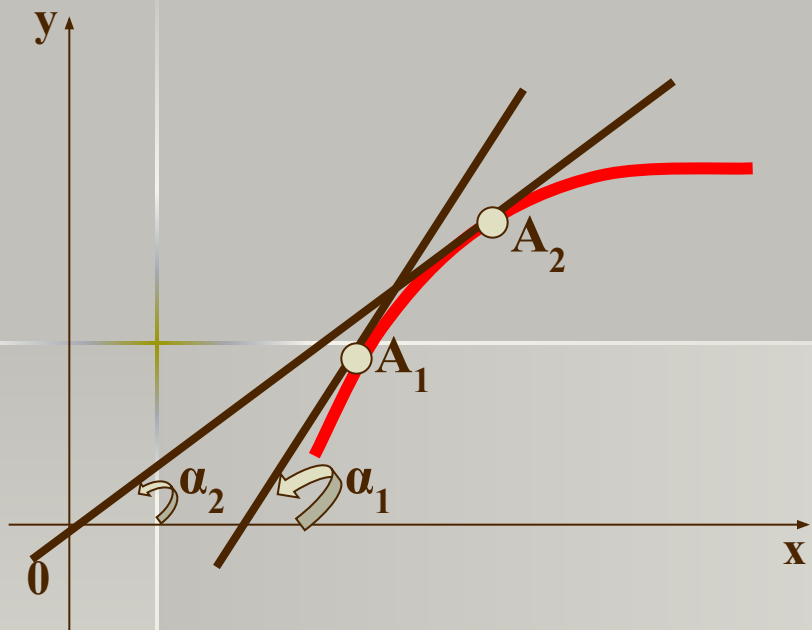


График выпуклый

α - убывает

$\text{tg } \alpha$ - убывает

$f'(x)$ - убывает

$$f''(x) < 0$$

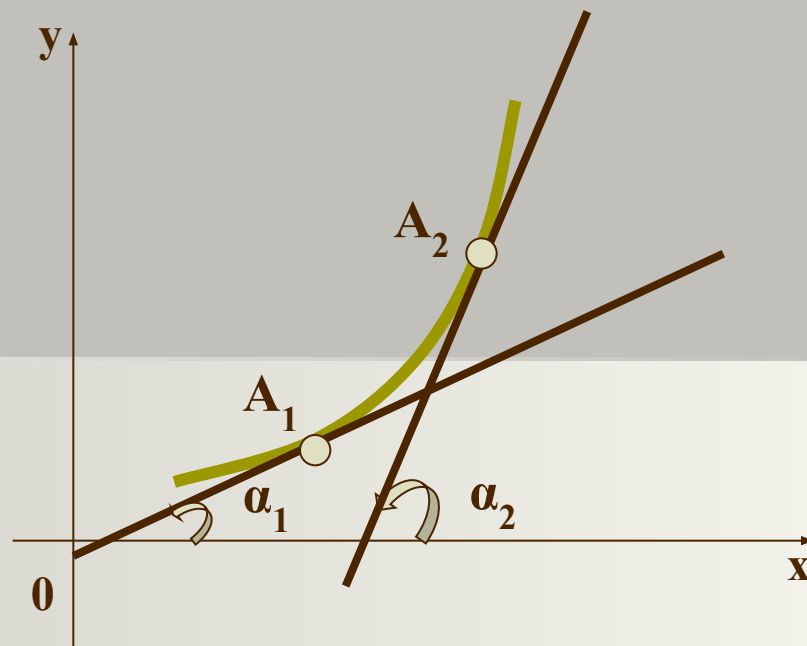


График вогнутый

α - возрастает

$\text{tg } \alpha$ - возрастает

$f'(x)$ - возрастает

$$f''(x) > 0$$



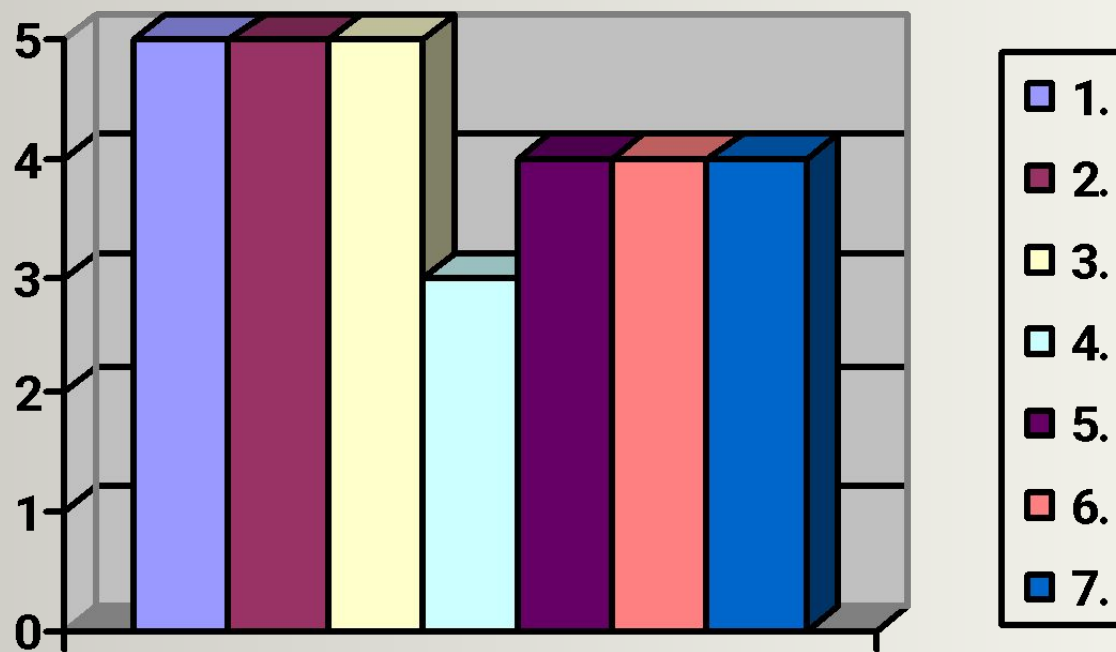
Точки перегиба

- 1) Найти критические точки функции по второй производной.
- 2) Исследовать знак второй производной в некоторой окрестности критической точки.

Если $f''(x)$ меняет свой знак при переходе аргумента через критическую точку x_0 , то $(x_0; f(x_0))$ - точка перегиба графика данной функции

Анализ компетентности учащихся в теоретических вопросах темы (например)



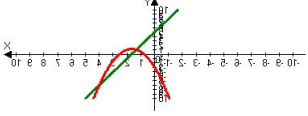
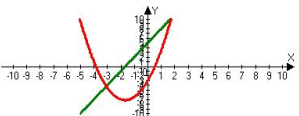
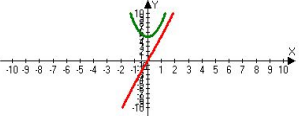
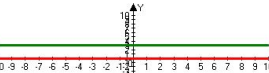
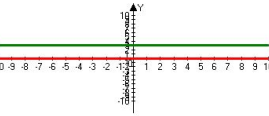
1.	5
2.	5
3.	5
4.	3
5.	4
6.	4
7.	4



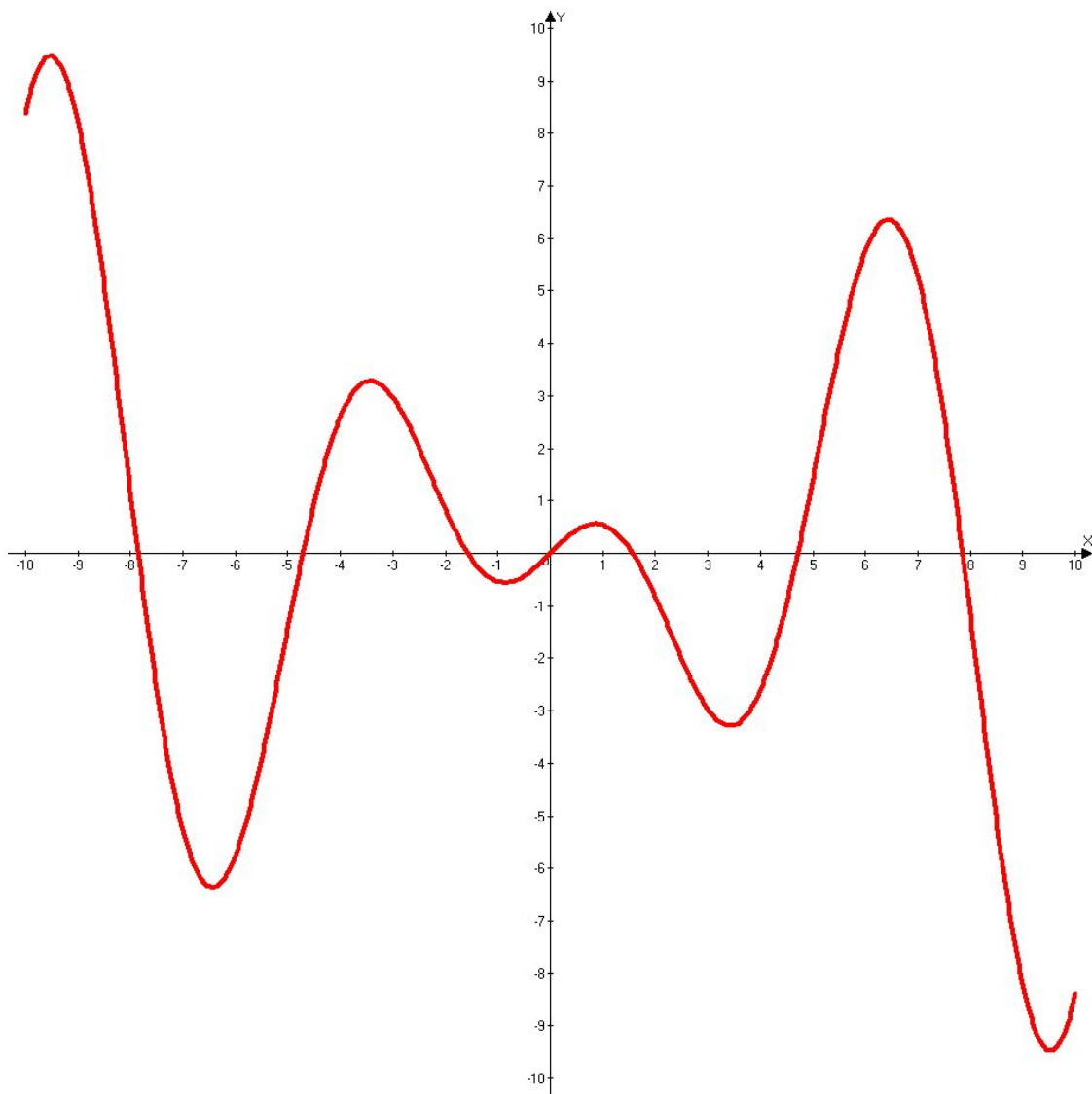
*II этап. Обобщение и систематизация
знаний и способов деятельности*

Задание для всех учащихся.

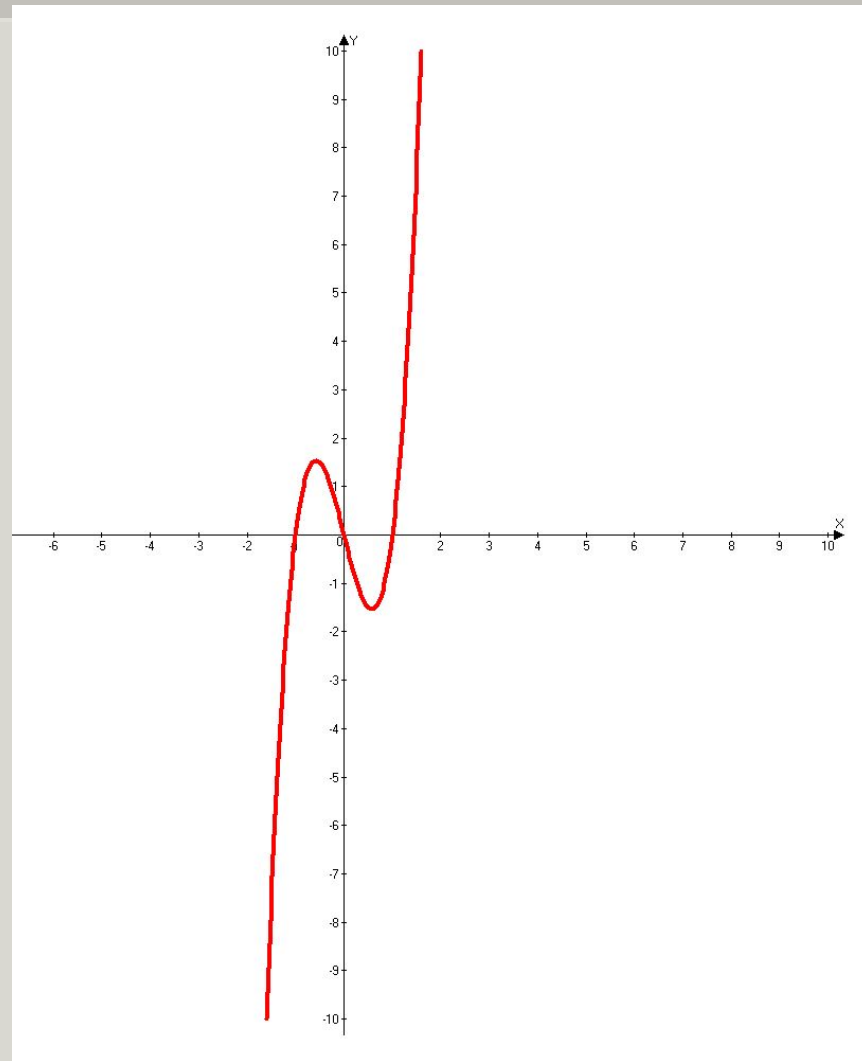
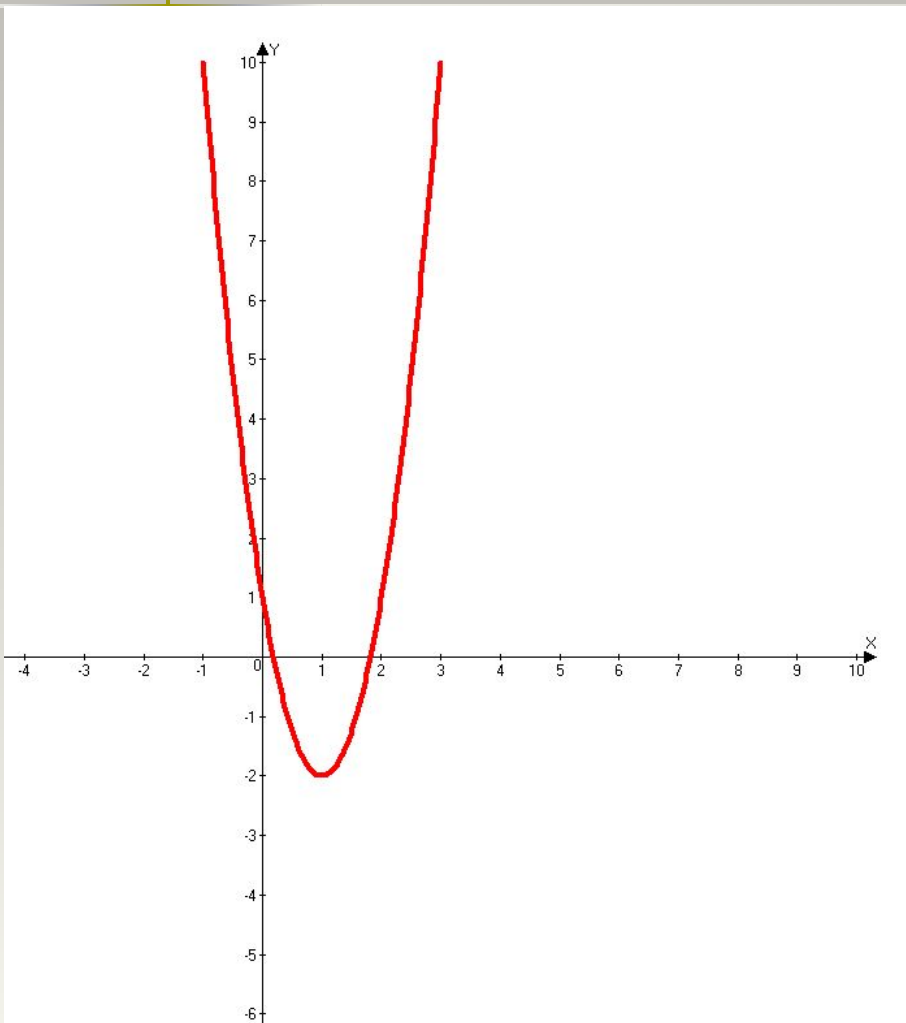
Заполните таблицу

TO y если	Моноotonно убывает	Имеет максимум во внутренней точке	Имеет минимум во внутренней точке	Постоянна	Моноotonно возрастает
$y' = -3$	  Legend: Y(x) = -3 (green line) Y(x) = -3x (red line)				
$y' = -3x + 5$		 Legend: Y(x) = -1.5x^2 + 5x (red line) Y(x) = -3x + 5 (red line)			
$y' = 3x + 5$			 Legend: Y(x) = 1.5x^2 + 5x (red line) Y(x) = 3x + 5 (red line)		
$y' = 3x^2 + 5$					 Legend: Y(x) = x^3 + 5x (red line) Y(x) = 3x^2 + 5 (red line)
$y' = 0$				  Legend: Y(x) = -3 (red line) Y(x) = 0 (green line)	

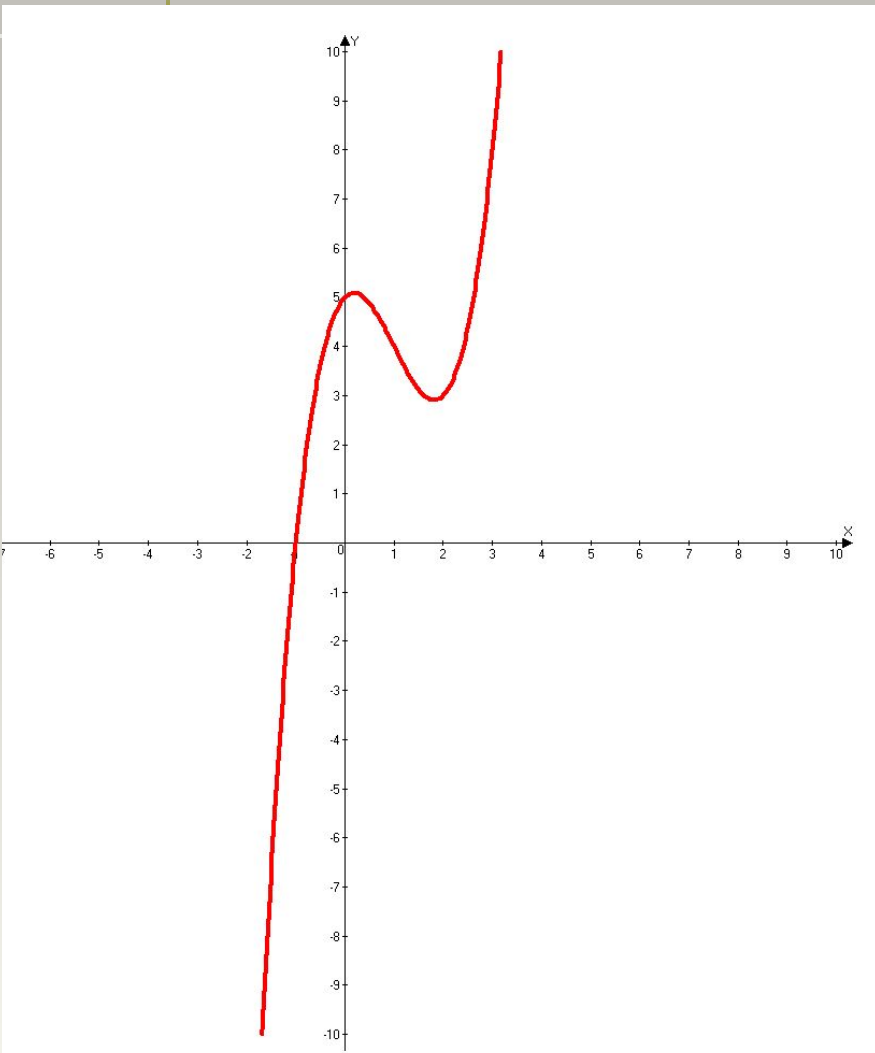
№2 По графику производной некоторой функции укажите интервалы, на которых функция монотонно возрастает, убывает, имеет максимум, имеет минимум, имеет перегиб.,



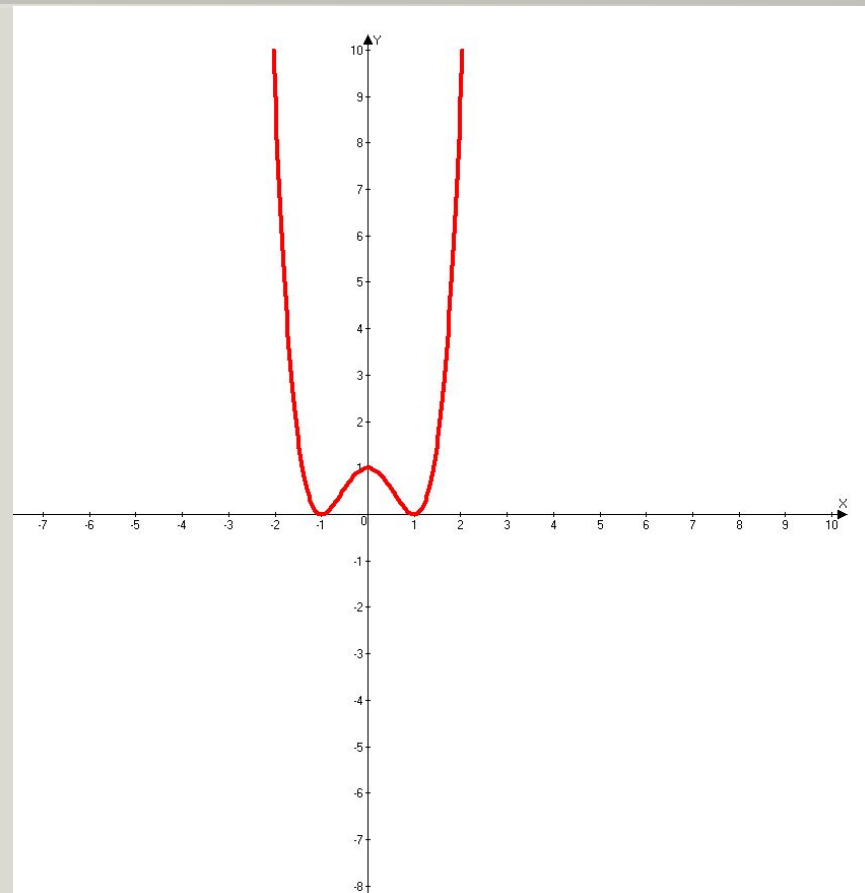
3. На рисунке изображён график производной функции $y=f(x)$. Сколько точек максимума имеет эта функция?



$$y = x^3 - 3x^2 + x + 5$$

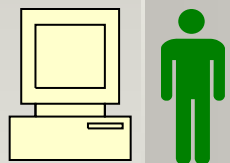
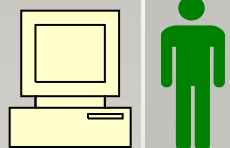
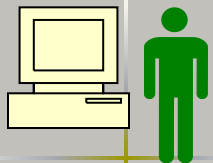
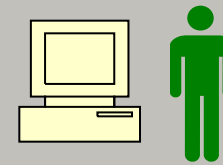
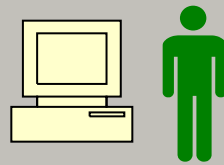
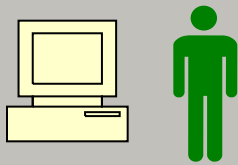


$$y = (x^2 - 1)^2$$

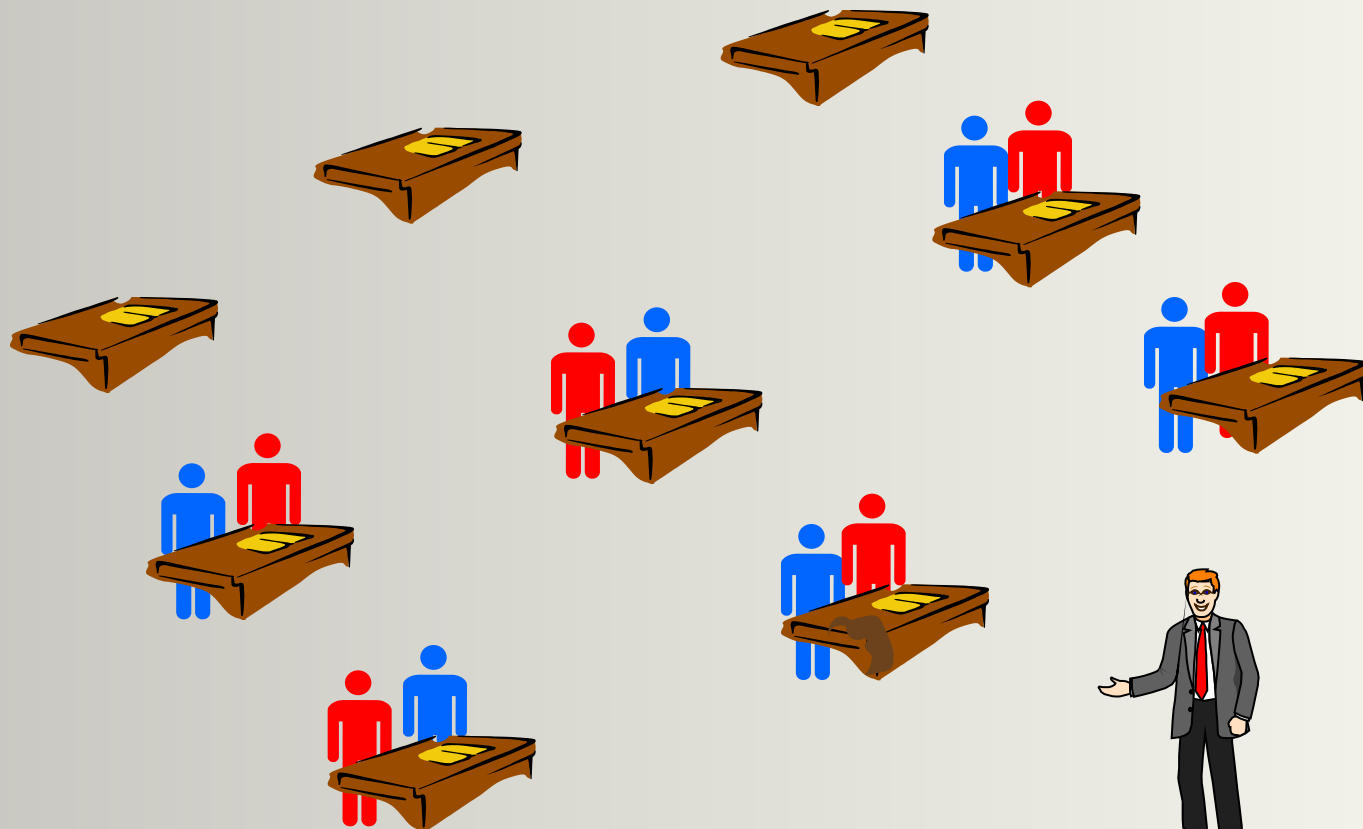


III этап. Усвоение образца комплексного применения ЗУН.

Практическая работа с применением электронного учебного пособия «Математика – практикум 5-11» и по индивидуальным заданиям на местах. За компьютер сначала рассаживаются 7 учащихся, остальные за парты. По мере выполнения заданий ребята меняются местами.



Работа на
компьютере



Работа на местах





Работа с ЭУП «Математика – практикум 5-11»



1. Какова область определения функции?

2. Найдите область определения функции.

3. Найдите множество значений функции.

$$y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$$

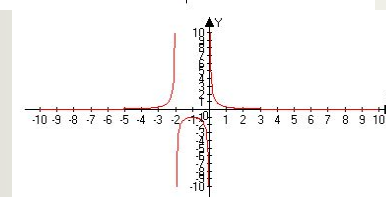
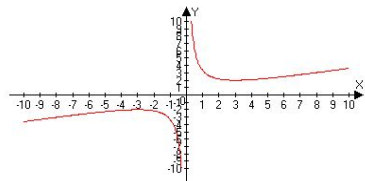
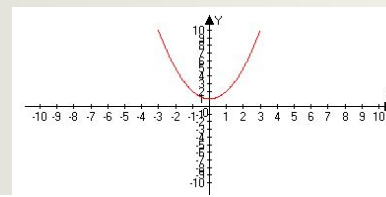
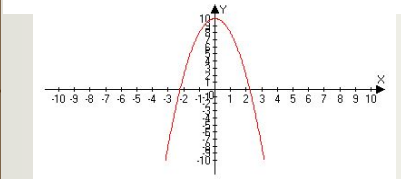
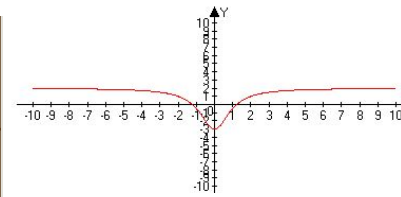
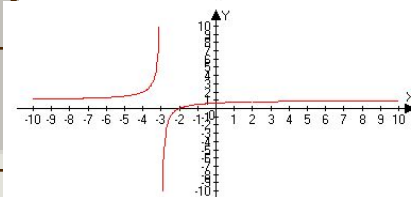
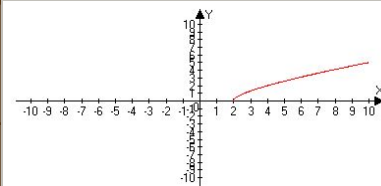
4. Найдите область значений функции.

$$y = \frac{10 - 2x^2}{x^2 + 1}$$

5. В каких точках график функции $y = x^2 + 1$ пересекает ось абсцисс?

6. Является ли функция чётной или нечётной?

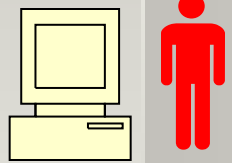
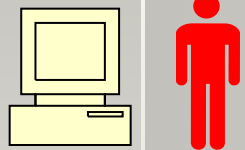
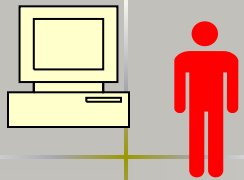
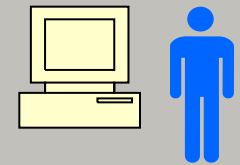
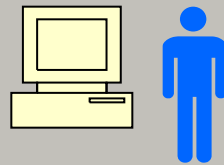
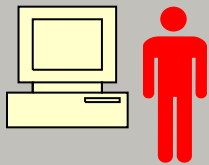
7. Может ли функция обращаться в нуль?



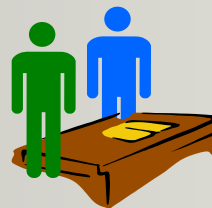
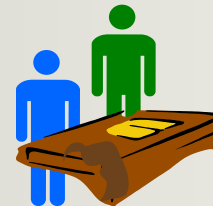
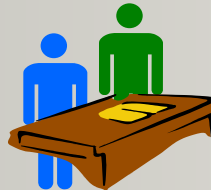
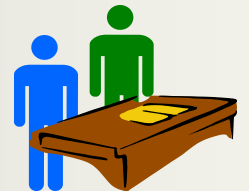
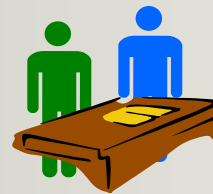
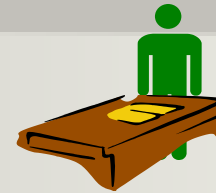
$$y = \frac{x^2 + 9}{3x}$$



$$y = \frac{1}{x^2 + 2x}$$



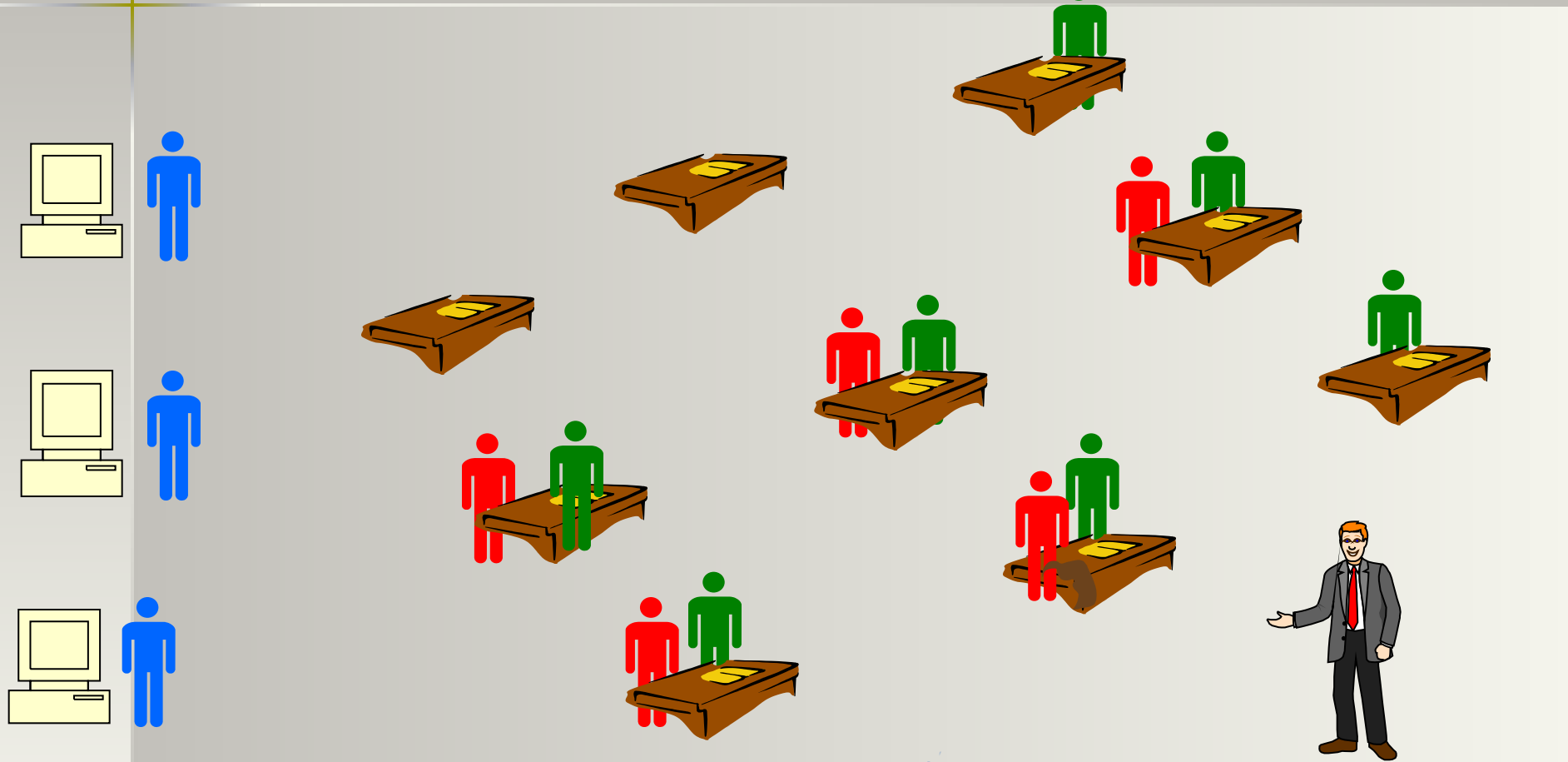
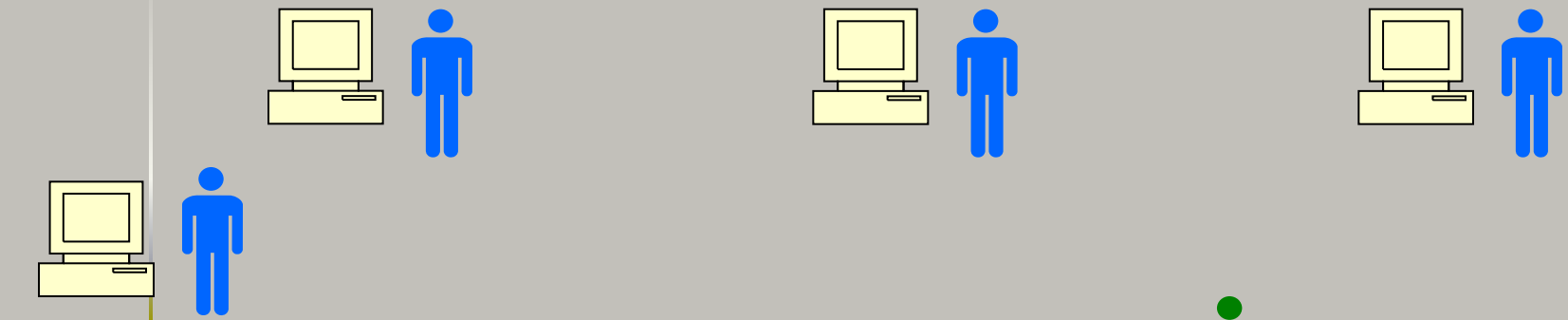
Работа на
компьютере



Какая из данных функций убывает на всей оси?

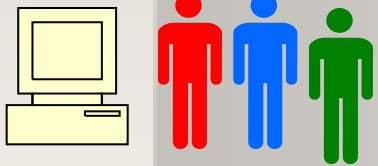
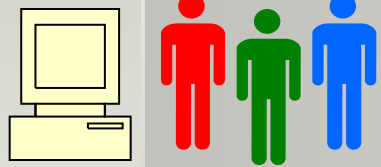
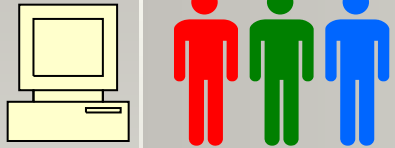
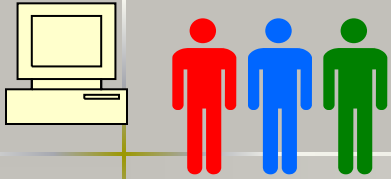
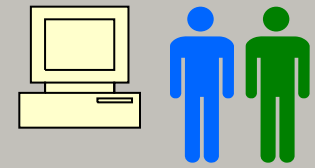
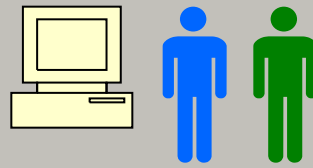
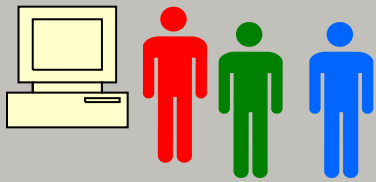
а) $y = -x^3 + x$ **в)** $y = x^3 + x^2$ **д)** $y = x^3 - x$

б) $y = -x^3 - x$ **г)** $y = -x^3 - x^2$ **е)** $y = x^3 + x$



Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость.

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 1,7x$$



**Ещё расскажу, если вам интересно,
Что точку разрыва и корень имею,
И есть интервал, где расти не посмею.
Во всём остальном положительна,
право,
И это, конечно, не ради забавы.
Для чисел больших я стремлюсь к
единице.
Найдите меня среди прочих в таблице.**

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+4x^2}}$$

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^2$$

$$f(x) = (x^2 - 1)^2$$

$$f(x) = x(1-x)$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$