Семинар 1. Последовательности. Предел последовательности.

1. Понятие предела.

<u>Определение</u>

Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует такое число *a*, что последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой. При этом число *a* называется пределом последовательности $\{x_n\}$. В соответствии с эти определением всякая бесконечно малая последовательность сходится и имеет своим пределом число 0.

<u>Другое определение</u>

Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует такое число *a*, что $\forall \varepsilon > 0$ можно указать номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что при $n \geq N$ все x_n удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$ (1). Число *a* – предел последовательности.

Символическая запись $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to +\infty$.

2. Свойства сходящихся последовательностей

<u>Теорема 1</u>

Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

<u>Теорема 2</u>

Сходящаяся последовательность ограничена.

<u>Теорема 3</u>

Сумма сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Теорема 4

Разность сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен разности пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$

Теорема 5

Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Теорема 6

Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при условии, что предел последовательности $\{y_n\}$ отличен от 0, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Теорема 7

Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geq b, (x_n \leq b)$, то и предел a этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \geq b, (a \leq b)$

Теорема 8

Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Пусть также начиная с некоторого номера элементы последовательности $\{y_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n \leq y_n \leq z_n$, тогда $\lim_{n\to\infty} y_n = a$

2.Ограниченные и неограниченные последовательности

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число М (число m), что каждый элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенству $x_n \le M \, (x_n \ge m)$

М – верхняя грань; m – нижняя грань. $x_n \le M \, (x_n \ge m)$ - условие ограниченности последовательности сверху (снизу).

Замечание Любая ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет бесчисленное множество верхних (нижних) граней.

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной с обеих сторон или просто ограниченной, если существует такие числа М и m, что каждый элемент x последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенству $m \le x_n \le M$

М – верхняя грань; m – нижняя грань.

Если $\{x_n\}$ ограничена, то все элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n| \le A$, где $A = \max\{|M|, |m|\}$

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого положительного числа *A* найдется элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$

Примеры:

1)последовательность -1, -4, -9, …,- n^2,… - ограничена сверху и не ограничена снизу. Верхняя грань – число больше или равно -1.

2)Последовательность 1, ½,1/3,…,1/n, … - ограничена. $M \geq 1, m \leq 0$

3)Последовательность 1, 2, 1, 3, ….,n, 1, (n+1), … - не ограничена.

3. Монотонные последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если для всех номеров *n* справедливо неравенство $x_n \leq x_{n+1} (x_n \geq x_{n+1})$.

Общее название – монотонные последовательности.

Если для всех n $x_n < x_{n+1} \Rightarrow \{x_n\}$ - возрастающая.

Если для всех n $x_n < x_{n+1} \Rightarrow \{x_n\}$ - убывающая.

Общее название – строго монотонные.

4. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

Определение 1.

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа *A* можно указать номер *N* такой, что для $n \geq N$ все элементы x_n удовлетворяют неравенству $|x_n| > A$

Определение 2

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для $\forall \varepsilon > 0$, можно указать номер *N* такой, что при $n \geq N$ все элементы α_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Примеры с решениями

Пример 1. Доказать исходя из определения, что число 1 является пределом последовательности $x_n = n/(n+1) (n = 1,2,...)$

Доказательство. Рассмотрим модуль разности $|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$. Введем произвольное число $\varepsilon > 0$. Неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполнено, если $1/(n+1) < \varepsilon$ то есть при $n > 1/\varepsilon - 1$. В качестве N возьмем какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию $N > 1/\varepsilon - 1$, то есть $1/(N+1) < \varepsilon$. Тогда для всех $n \geq N$ выполнены неравенства $|x_n - 1| = \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{N+1} < \varepsilon$. Это и означает, что число 1 есть предел последовательности $x_n = n/(n+1)(n = 1,2,...)$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

Пример 2. Доказать исходя из определения, что $\lim\limits_{n\to\infty} (1/3)^n = 0$.

Доказательство.

Так как $3^n > n$ для любого $n \geq 1$, то $|(1/3)^n - 0| = 1/3^n < 1/n$.

Пусть $\varepsilon > 0$, выберем натуральное N такое, что $1/N < \varepsilon$. Тогда для любого $n \geq N$ имеем $|(1/3)^n - 0| = 1/n \leq 1/N < \varepsilon$. Значит $\lim\limits_{n\to\infty} (1/3)^n = 0$.

Пример 3. Доказать, что последовательность $\{(n^2 - 10)/n\}$ расходится.

Доказательство. Докажем, что данная последовательность неограниченна. Имеем

$x_n = n - 10/n \geq n - 10$

Пусть С – произвольное положительное число. Возьмем какое-нибудь натуральное число $n_0 > C + 10$, тогда $x_{n_0} \geq n_0 - 10 > C$. Это означает, что последовательность $\{(n^2 - 10)/n\}$ неограниченна, а поэтому расходится.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3 - 3n^2}{n^3 + 1}$

Решение. Преобразуем формулу общего элемента к виду $x_n = \dfrac{5 - 3/n}{1 + 1/n^3}$.

Учитывая, что $\{1/n\}, \{1/n^3\}$ - бесконечно малые последовательности, и используя теоремы о пределах, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-3/n}{1+1/n^3}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(5-3/n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n^3)}=\frac{5}{1}=5$

Пример 5. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0, x_n\ge -1$ для любого n; пусть p – натуральное число.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[p]{1+x_n}=1$

Доказательство. Если $x_n\ge 0, \Rightarrow 1+x_n\ge 1\Rightarrow 1\le\sqrt[p]{1+x_n}\le(\sqrt[p]{1+x_n})^p=1+x_n=1+|x_n|$

а если $-1\le x_n<0\Rightarrow 0\le 1+x_n<1$ поэтому $1>\sqrt[p]{1+x_n}\ge(\sqrt[p]{1+x_n})^p=1+x_n=1-|x_n|$

Объединяя эти результаты, для любого $x_n\ge -1$ получаем $1-|x_n|\le\sqrt[p]{1+x_n}\le=1+|x_n|$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(1-|x_n|)=\lim\limits_{n\to\infty}(1+|x_n|)=1$. Отсюда

следует, что и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[p]{1+x_n}=1$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

Решение. Преобразуем формулу общего элемента:

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+1/n}+1}=\dfrac{1}{2}$

Задания для самостоятельного решения

1.Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ **, указав для каждого** $\varepsilon > 0$ **такое N, что для любого** $n \geq N$ **верно неравенство** $|x_n| < \varepsilon$ **, если**

1) $x_n = 1/n$;

2) $x_n = a/n$; (a – произвольное данное число);

3) $x_n = (-1)^{n+1} 1/n$;

4) $x_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$

5) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$

6) $x_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi n}{2}$

2. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+b}{n}=1, b\in R$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{2n-1}=\dfrac{3}{2}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-n}{2+n}=-1$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2}=1$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^p}=0, p\geq 1$

1.Доказать, что $\{x_n\}$ **- бесконечно малая последовательность, если**

1) $x_n = \frac{n^2 - 1}{n^3}$; 2) $x_n = \frac{2n+3}{n^2}$;

3) $x_n = q^n / n; |q| \le 1$ 4) $x_n = \frac{2n+1}{(n+1)2^n}$ 5) $x_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$

4. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если

1) $x_n = (-1)^n n$; 2) $x_n = n^{(-1)^n}$;

3) $x_n = \frac{n^2 - 2n}{n+1}$ 4) $x_n = n^2 \sin \frac{\pi n}{4}$ 5) $x_n = (0{,}5)^{((-1)^n - 1)n}$