

---

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

---

---

# Предмет математической логики

---

**ЛОГИКА** — междисциплинарная отрасль наук, изучающая

- законы причинно-следственной связи в окружающем мире;
- проявление законов причинно-следственной связи в рациональном мышлении человека (законы правильного мышления);
- отражение законов причинно-следственной связи в языках (естественных и искусственных).

---

Логика возникла в VI—IV вв. до н. э. как «анализ мышления», т.е. анализ принципов правильных рассуждений.

Основоположник логики — древнегреческий ученый Аристотель (384-322 гг. до н. э.), который в сочинениях «Аналитики» впервые изложил идею дедуктивного вывода.

---

# ЛОГИКА (ФОРМАЛЬНАЯ)

изучает формы, в которых проявляются законы причинно-следственных связей, вне зависимости от содержания (смысла) тех явлений (предметов), к которым эти законы относятся.

---

**Математическая логика** занимается задачами формализации правильных способов рассуждений с помощью **математического аппарата**.

Главная цель – изучение математических рассуждений с целью точного определения понятия «математическое доказательство».

---

# Основная задача формальной логики.

База знаний:  $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ .

Предложение:  $\psi$ .

**Задача** (формальная): проверить, что  $\psi$  выводится из  $\Gamma$  по законам формальной логики.

**Задача** (неформальная): выяснить, является ли предложение  $\psi$  следствием утверждений базы знаний  $\Gamma$ .

---

Бурное развитие математической логики и теории алгоритмов в наше время обусловлено:

- распространением информационно-коммуникационных технологий на основе современной компьютерной техники,
  - необходимостью создания теоретических основ обработки и передачи информации, математического моделирования самых разнообразных задач и процессов.
-

Приложение 1.

## Экспертные системы

База знаний  $\Gamma$  — база знаний экспертной системы.

Предложение  $\psi$  — запрос к базе знаний.

Аппарат логического вывода — ядро экспертной системы.

## Программирование

Вычисление программы — последовательное преобразование интерпретатором одних состояний данных в другие согласно заданному алгоритму.

Логический вывод (доказательство) — последовательное построение по законам формальной логики одних утверждений из других, исходя из заданной базы знаний.

---

# Логика высказываний

---

---

*Высказывание* - повествовательное предложение, о котором можно судить, истинное оно или ложное.

Обозначаются высказывания  $A, B, C, \dots$

*Истинностное значение* высказывания  $A$  обозначается символом  $\lambda(A)$  и определяется по формуле:

$\lambda(A)=1$ , если высказывание  $A$  истинно, и

$\lambda(A)=0$ , если  $A$  ложно.

---

---

# Алгебра высказываний

---

Из высказываний путем соединения их различными способами (с помощью связок «не», «и», «или», «следует», «равносильно») можно составлять новые, более сложные высказывания.

При этом главное внимание уделяется истинностно-функциональным комбинациям, в которых истинность или ложность новых высказываний определяется истинностью или ложностью составляющих их высказываний.

Определение. *Алгеброй высказываний* называется множество всех высказываний  $P$  с логическими операциями  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ .

---

# Формулы алгебры высказываний

---

Свойства алгебры высказываний  $P$  описываются с помощью формул, которые строятся из переменных символов с помощью знаков логических операций. Такие формулы прямо называть также *пропозициональными формулами*

Символы логических операций  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ , которые называются *пропозициональными связками*.

Переменные символы  $X, Y, Z, \dots$ , которые используются для обозначения высказываний и которые называются *пропозициональными переменными*.

---

Определение.                      *Формулы*                      алгебры  
высказываний индуктивно определяются по  
правилам:

1) каждая пропозициональная переменная  
является формулой,

2) если  $\Phi, \Psi$  – формулы, то формулами  
являются также выражения

$$(\neg\Phi), (\Phi \wedge \Psi), (\Phi \vee \Psi), (\Phi \Rightarrow \Psi), (\Phi \Leftrightarrow \Psi).$$

Множество всех формул алгебры  
высказываний обозначим  $\mathbf{F}_{AB}$ .

---

Если в формулу  $\Phi$  входят переменные  $X_1, \dots, X_n$ , то записывают  $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ .

Из индуктивного определения формул следует, что если в формулу  $\Phi$  вместо переменных  $X_1, \dots, X_n$  подставить произвольные конкретные высказывания  $A_1, \dots, A_n$ , то получится некоторое сложное высказывание  $\Phi(A_1, \dots, A_n)$ .

Истинностное значение высказывания  $\lambda(\Phi(A_1, \dots, A_n))$  определяется истинностными значениями исходных высказываний  $\lambda(A_1), \dots, \lambda(A_n)$  согласно таблицам истинностных значений логических операций  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ .

Формула  $\Phi$  определяет функцию  $n$  переменных  $F_\Phi$ , которая каждому упорядоченному набору  $(\lambda(X_1), \dots, \lambda(X_n))$   $n$  элементов множества  $\{0, 1\}$  ставит в соответствие элемент  $\lambda(\Phi(X_1, \dots, X_n))$  этого же множества.

Функция  $F_\Phi$  называется *истинностной функцией* формулы  $\Phi$  и графически представляется *истинностной таблицей*.

Такая таблица содержит  $2^n$  строк и имеет одно из  $2^{2^n}$  возможных распределений значений 0 и 1 в последнем столбце.

Пример.      Формула     $\Phi = (\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y)$   
имеет следующую истинностную таблицу:

$X$	$Y$	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg X \wedge \neg Y$	$X \vee \neg Y$	$\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

Определение. Формула  $\Phi$  называется:

- *тавтологией* (или *тождественно истинной формулой*) и обозначается  $\models \Phi$ , если ее истинностная функция тождественно равна 1;
- *противоречием* (или *тождественно ложной формулой*), если ее истинностная функция тождественно равна 0;
- *выполнимой*, если ее истинностная функция не равна тождественно 0;
- *опровержимой*, если ее истинностная функция не равна тождественно 1.

---

Тавтологии являются общими схемами построения истинных высказываний и в этом смысле выражают некоторые *логические законы*.

Примеры таких законов являются:

$\models X \vee \neg X$  – закон исключенного третьего,

$\models \neg\neg X \Leftrightarrow X$  – закон двойного отрицания,

$\models \neg(X \wedge \neg X)$  – закон противоречия,

$\models (X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$  – закон контрапозиции.

---

---

Новые тавтологии можно получить с помощью следующего правила.

Правило подстановки:

если  $\models \Phi(X_1, \dots, X_n)$ , то для любых формул  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  тавтологией является формула  $\Phi(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ .

---

---

# Логическая равносильность формул

---

---

Определение. Формулы  $\Phi, \Psi$  называются *логически равносильными* (или просто *равносильными*), если  $\models \Phi \Leftrightarrow \Psi$ .

Для обозначения логически эквивалентных формул используется символическая запись  $\Phi \equiv \Psi$ , или просто  $\Phi = \Psi$ .

Такие выражения называются *логическими равенствами* или просто *равенствами формул*.

---

Лемма. Справедливы следующие равенства формул:

$$1) \quad X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z, \quad X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$$

– свойства ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции;

2)  $X \vee Y = Y \vee X, \quad X \wedge Y = Y \wedge X$  – свойства коммутативности дизъюнкции и конъюнкции;

3)  $X \vee X = X, \quad X \wedge X = X$  – свойства идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции;

$$4) \quad X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z),$$

$X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$  – законы дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции;

5)  $\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$ ,  $\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$  —

законы де Моргана;

6)  $(X \wedge Y) \vee X = X$ ,  $(X \vee Y) \wedge X = X$  — законы

поглощения;

7)  $\neg\neg X = X$  — закон двойного отрицания;

8)  $X \Rightarrow Y = \neg X \vee Y$ ,  $X \Rightarrow Y = \neg(X \wedge \neg Y)$  —

взаимосвязь импликации с дизъюнкцией и конъюнкцией;

9)  $X \Leftrightarrow Y = (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$ ,

$X \Leftrightarrow Y = (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)$  — взаимосвязь

эквивалентности с импликацией,

дизъюнкцией и конъюнкцией.

---

Лемма (Правило замены). Если формулы  $\Phi, \Phi'$  равносильны, то для любой формулы  $\Psi(X)$ , содержащей переменную  $X$ , выполняется равенство:  $\Psi(\Phi) = \Psi(\Phi')$ .

Это правило означает, что при замене в любой формуле  $\Psi = \Psi(\Phi)$  некоторой ее подформулы  $\Phi$  на равносильную ей формулу  $\Phi'$  получается формула  $\Psi' = \Psi(\Phi')$ , равносильная исходной формуле  $\Psi$ .

Такие переходы называются *равносильными преобразованиями формул*.

---

Пример.

Формула  $\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z$  с помощью равенств 5),7),8) из леммы 2.4.1 равносильно преобразовывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi &= (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z = \neg(X \Rightarrow Y) \vee Z = \\ &= \neg(\neg(X \wedge \neg Y)) \vee Z = (X \wedge \neg Y) \vee Z.\end{aligned}$$