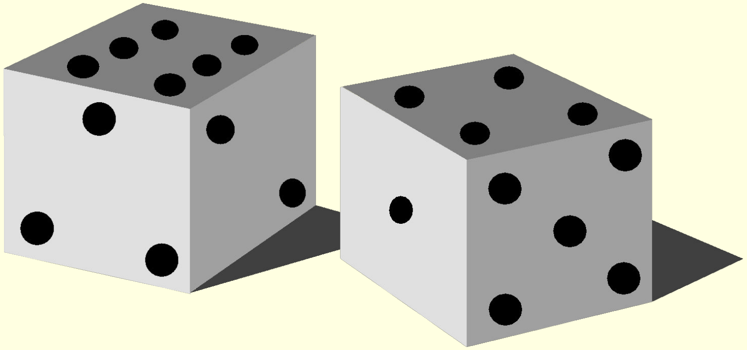
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

И.П. БОЛОДУРИНА, Ю.П. ИВАНОВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА



Оренбург 2013

Во многих своих разделах математическая статистика опирается на теорию вероятностей, позволяющую оценить надёжность и точность выводов, делаемых на основании ограниченного статистического материала

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений, случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними

Математическая статистика – математическая наука, разрабатывающая математические методы систематизации и использования статистических данных для научных и практических выводов

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Задачи называются **комбинаторными**, если в них определяется число способов осуществления того или иного действия

Наука, изучающая способы решения комбинаторных задач, называется **комбинаторикой**. **Комбинаторика** - это раздел математики, в котором исследуются и решаются задачи выбора элементов из исходного множества и расположения их в некоторой комбинации, составленной по заданным правилам

Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова «combinare», которое означает «соединять, сочетать»

ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ

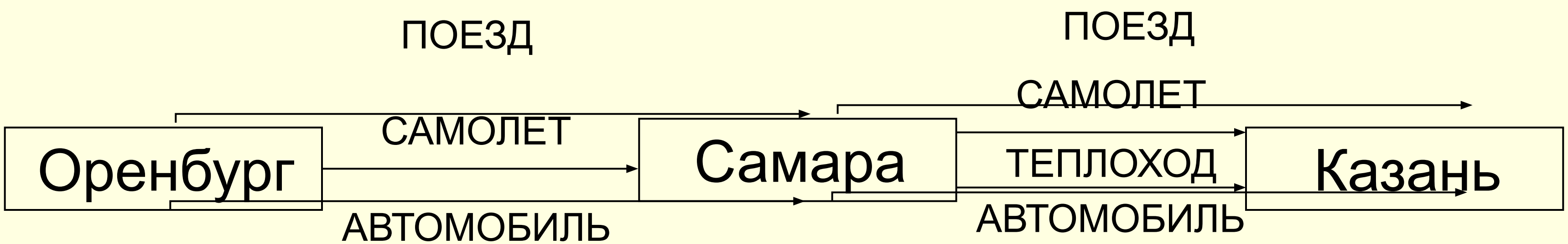
- Комбинаторика как наука стала развиваться в XIII в. параллельно с возникновением теории вероятностей.
- Первые научные исследования по этой теме принадлежат итальянским ученым Дж. Кардано, Н. Чарталье (1499-1557), Г. Галилею (1564-1642) и французским ученым Б.Пискамо (1623-1662) и П. Ферма.
- Комбинаторику, как самостоятельный раздел математики первым стал рассматривать немецкий ученый Г. Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной в 1666г. Он также впервые ввел термин «Комбинаторика».

Принцип умножения

Задача:

Требуется совершить путешествие по маршруту Оренбург--Самара-Казань. Известно, что из Оренбурга до Самары можно добраться поездом, самолетом или на автомобиле; из Самары до Казани: самолетом, поездом, пароходом или на автомобиле.
Сколькими способами можно осуществить такое путешествие?

Решение



Из Оренбурга до Самары можно добраться 3 способами, для каждого из них из Самары до Казани – 4 способами. Таким образом, такое путешествие можно осуществить 12 способами.

12 способов

Принцип умножения

Теорема

Если требуется выполнить одно за другим k действий, причем первое действие можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами,…, k-ое – n_k способами, то все k действий вместе можно выполнить $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами

Задача: На вершину горы ведут 5 дорог. Сколькими способами можно подняться на гору и спуститься с нее?

Решение: Для каждого варианта подъема на гору существует 5 вариантов спуска с горы. Значит всего способов подняться на гору и спуститься с нее 5·5=25.

ПЕРЕСТАНОВКИ

Определение

Множество из n элементов называется **упорядоченным**, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие натуральное число (номер элемента) от 1 до n.
В противном случае, множество называется **неупорядоченным**

Для одного и того же множества из n элементов можно получить различные упорядоченные множества

Определение

Различные упорядоченные множества одного и того же множества из n элементов называются перестановками этого множества P_n

P_n - число перестановок из n элементов

Факториал

$0! = 1$ $\quad 2! = 1 \cdot 2$ $\quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$

$1! = 1$ $\quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ $\quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ ....

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}$$

ПЕРЕСТАНОВКИ

Теорема

Число перестановок множества из n элементов равно

$$P_n = n!$$

Доказательство:

Определим сколькими способами n предметов можно расставить по n местам.

1-ое место можно заполнить n способами;

2-ое место можно заполнить (n-1) способами;

……..

(n-1)-ое место можно заполнить 2 способами;

n-ое место можно заполнить 1 способом.

Таким образом, общее число способов осуществления данного действия равно

$$n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Следствие

n различных предметов по n местам можно расставить n! способами

РАЗМЕЩЕНИЯ

Задача: Как из множества, состоящего из n элементов, выбрать упорядоченное подмножество из m элементов?
Например, как рассадить за праздничный стол 12 гостей, если
всего 15 мест?

Определение

Упорядоченное m-элементное подмножество множества из $(m \le n)$
элементов называется **размещением** из n элементов по m A_n^m

A_n^m - число размещений из n элементов по m

Следствие далее представленной теоремы

m различных предметов по n местам можно расставить A_n^m способами

Решение

Число приглашенных гостей можно рассадить A_{15}^{12} способами

РАЗМЕЩЕНИЯ

Теорема

Число размещений множества из n элементов по m равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Доказательство:

1-ый элемент можно выбрать n способами;
2-ой элемент можно выбрать (n-1) способами;

…………………

m-ый элемент можно выбрать (n-(m-1)) способами.

Таким образом, общее число способов выбрать упорядоченное подмножество равно n(n-1)…(n-(m-1)).

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-(m-1))(n-m)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

СОЧЕТАНИЯ

Задача: Как из множества, состоящего из n элементов, выбрать неупорядоченное подмножество из m элементов? Например, в студенческой группе из 25 человек выбрать 3 для выполнения какой-нибудь общественной работы? Порядок выдвижения кандидатур значения не имеет.

Определение

Произвольное m-элементное подмножество множества из n $(m \le n)$ элементов называется **сочетанием** из n элементов по m C_n^m

C_n^m - число сочетаний из n элементов по m

Следствие далее представленной теоремы

m одинаковых предметов по n местам можно расставить C_n^m способами

Решение

Количество способов выбрать 3 человека из 25 для выполнения поручения C_{25}^3

СОЧЕТАНИЯ

Теорема

Число сочетаний множества из n элементов по m равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Доказательство:

Известно, что число упорядоченных m-элементных подмножеств множества из m элементов равно
Среди них встречаются множества, состоящие из одинаковых элементов и отличающиеся только порядком расположения этих элементов. Разобьем все упорядоченные подмножества на группы множеств, состоящих из одинаковых элементов. Число множеств внутри каждой группы будет m!. Следовательно, групп (а значит и неупорядоченных подмножеств) будет

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

РАЗБИЕНИЯ

Задача: Разбиение множества из n элементов на r попарно непересекающихся подмножеств. Например, студенческую группу из 25 человек нужно разбить на 3 подгруппы по 5, 8, 12 человек соответственно для выполнения хозяйственных работ на субботнике.

Определение

Представление (разложение) множества из n элементов в виде суммы (объединения) r попарно непересекающихся неупорядоченных подмножеств, состоящих из $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_r$ элементов соответственно,

называется разбиением множества из n элементов на r подмножеств по $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_r$ элементов соответственно $(m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n)$

$P_n\left(m_1, m_2, \ldots, m_r\right)$ - число разбиений из n элементов по $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_r$

Решение

Группу из 25 человек на подгруппы из 5, 8, 12 человек можно разбить $P_{25}\left(5,8,12\right)$ способами

РАЗБИЕНИЯ

Теорема

Число разбиений множества из n элементов на r попарно непересекающихся подмножеств по $m_1, m_2, \ldots, m_r$ элементов равно

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_r) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_r!}$$

Доказательство:

1-ое множество, состоящее из m1 элементов, можно выбрать $C_n^{m_1}$ способами;

2-ое множество - $C_{n-m_1}^{m_2}$ способами;

…..

(r-1)-ое множество - $C_{n-m_1-m_2-\ldots-m_{r-2}}^{m_r-1}$ способами;

r-ое множество - 1 способом.

Общее число способов будет равно

$$C_n^{m_1} \cdot C_{n-m_1}^{m_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-m_1-m_2-\ldots-m_{r-2}}^{m_r-1} \cdot 1 = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_r!}$$

<u>ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ</u>

ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ

<u>Случайным событием (просто событием, исходом)</u> называется любой факт, который в результате испытания может произойти или не произойти

Случайные события обозначают заглавными буквами латинского алфавита: А, В, С, …

ПРИМЕРЫ

1) А {выпало четное число очков};
2) В {выпало число очков, кратное 3};
3) С {выпало более 4 очков}

Под <u>испытанием (опытом, экспериментом)</u> понимается выполнение определенного комплекса условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат

ПРИМЕРЫ

1) бросание игрального кубика;
2) сдача экзамена;
3) выстрел из винтовки;
4) химический эксперимент и др.

ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ

Среди всех возможных событий , которые, по воле случая, в результате опыта происходят или не происходят выделяют элементарные исходы (элементарные события)

Элементарные исходы – это события, обладающие следующими свойствами;

1) они взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из них;
2) для любого события (возможного в результате опыта), по наступившему элементарному событию, можно определить произошло оно или нет

Элементарные события обозначают ω *или* ω_i

Совокупность всех элементарных событий называют пространством элементарных событий

Пространство элементарных событий обозначают $\Omega = \{\omega\}$

Любое подмножество множества Ω называют событием

Событие А происходит тогда и только тогда, когда происходит одно из элементарных событий, входящих в А

ТИПЫ СОБЫТИЙ

ДОСТОВЕРНОЕ

Событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания.

1. ПОСЛЕ ЗИМЫ НАСТУПАЕТ ВЕСНА.
2. ПОСЛЕ НОЧИ ПРИХОДИТ УТРО.
3. КАМЕНЬ ПАДАЕТ ВНИЗ.
4. ВОДА СТАНОВИТСЯ ТЕПЛЕЕ ПРИ НАГРЕВАНИИ.

СЛУЧАЙНОЕ

Случайным называют событие которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания.

1. НАЙТИ КЛАД.
2. БУТЕРБРОД ПАДАЕТ МАСЛОМ ВНИЗ.
3. В ШКОЛЕ ОТМЕНИЛИ ЗАНЯТИЯ.
4. ПОЭТ ПОЛЬЗУЕТСЯ ВЕЛОСИПЕДОМ.
5. В ДОМЕ ЖИВЕТ КОШКА.

НЕВОЗМОЖНОЕ

Событие называется **невозможным**, если оно не может произойти в результате данного испытания.

1. 30 ФЕВРАЛЯ ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ.
2. ПРИ ПОДБРАСЫВАНИИ КУБИКА ВЫПАДАЕТ 7 ОЧКОВ.
3. ЧЕЛОВЕК РОЖДАЕТСЯ СТАРЫМ И СТАНОВИТСЯ С КАЖДЫМ ДНЕМ МОЛОЖЕ.

ПРИМЕР

Задача: Рассмотрим кубик, на гранях которого написаны цифры 1, 7, 0,
1, 2, 4. Опыт состоит в том, что бросаем кубик и смотрим, какая цифра появится на верхней грани.

Элементарными событиями являются:
ω_0 - выпадение цифры «0»;
ω_1 - выпадение цифры «1»;
ω_2 - выпадение цифры «2»;
ω_4 - выпадение цифры «4»;
ω_7 - выпадение цифры «7».

Пространство элементарных исходов: $\Omega = \{\omega_0; \omega_1; \omega_2; \omega_4; \omega_7\}$

$A = \{\omega_0; \omega_2; \omega_4\}$ - событие, состоящее в том, что выпадет четная цифра;

$B = \{\omega_1; \omega_7\}$ - событие, состоящее в том, что выпадет нечетная цифра;

$C = \{\omega_2; \omega_7\}$ - событие, состоящее в том, что появится простое число.

ПРИМЕР

Предположим, в результате опыта появилась цифра 7.

В этом случае произошли события В и С, а событие А не произошло

События называются <u>совместными</u>, если появление одного не исключает появление другого. В противном случае события называются <u>несовместными</u>

А и В – несовместные события; В и С – совместные события

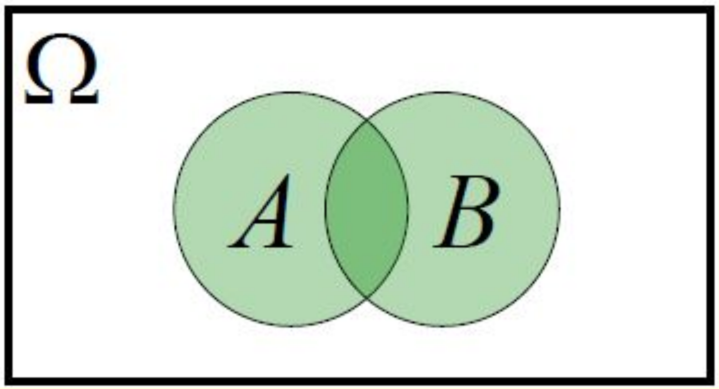
Невозможным для данного опыта является событие, состоящее в том, что появится цифра 5.

ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Определение

<u>Суммой событий А и В</u> называется событие

$$C = \{\omega \in \Omega \quad : \quad \omega \in A \quad или \quad \omega \in B\}$$



ОБОЗНАЧЕНИЕ

C=A+B или $C = A \cup B$

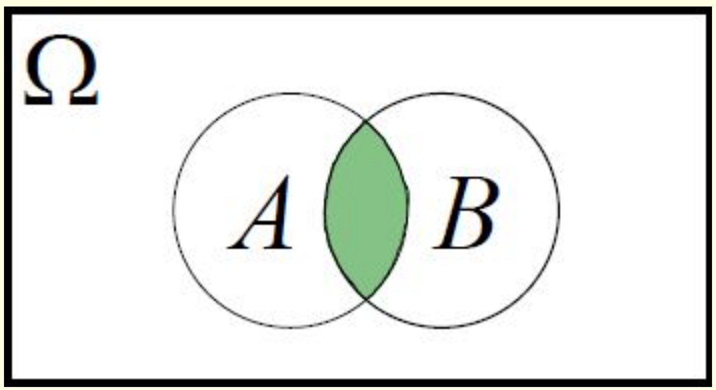
Событие А+В происходит тогда и только тогда, когда происходит или событие А или событие В или и А и В одновременно

ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Определение

Произведением событий А и В называется событие

$$C = \{\omega \in \Omega \quad : \quad \omega \in A \quad и \quad \omega \in B\}$$



ОБОЗНАЧЕНИЕ

С=АВ или $C = A \cap B$

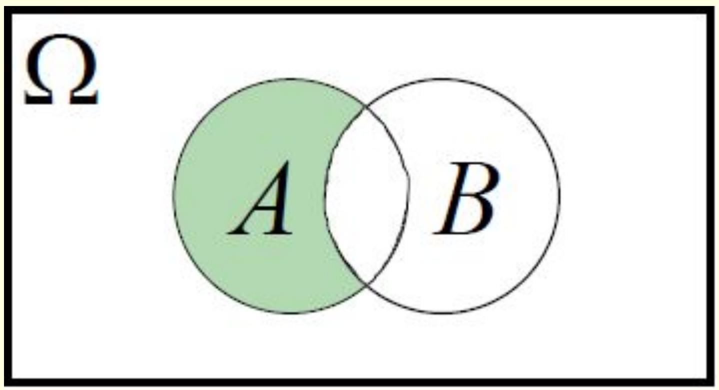
Событие АВ происходит тогда и только тогда, когда одновременно происходят события А и В. Если события А и В несовместны, то $A \cdot B = \Theta$.

ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Определение

<u>Разностью событий А и В</u> называется событие

$$C = \{\omega \in \Omega \ : \ \omega \in A \ \ и \ \ \omega \notin B\}$$



ОБОЗНАЧЕНИЕ

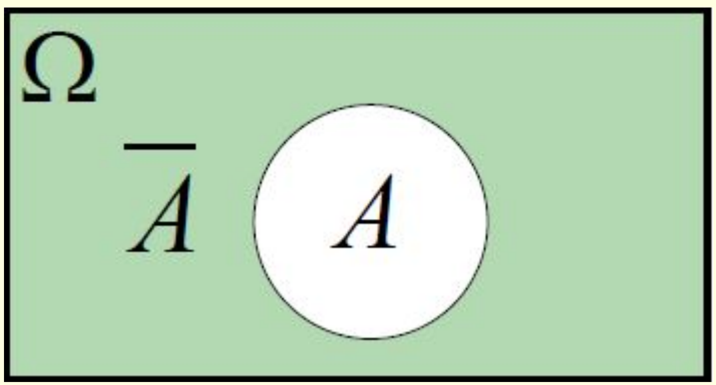
C=A-B или $C = A \setminus B$

Событие A-B происходит тогда и только тогда, когда событие A происходит, а B не происходит

ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Определение

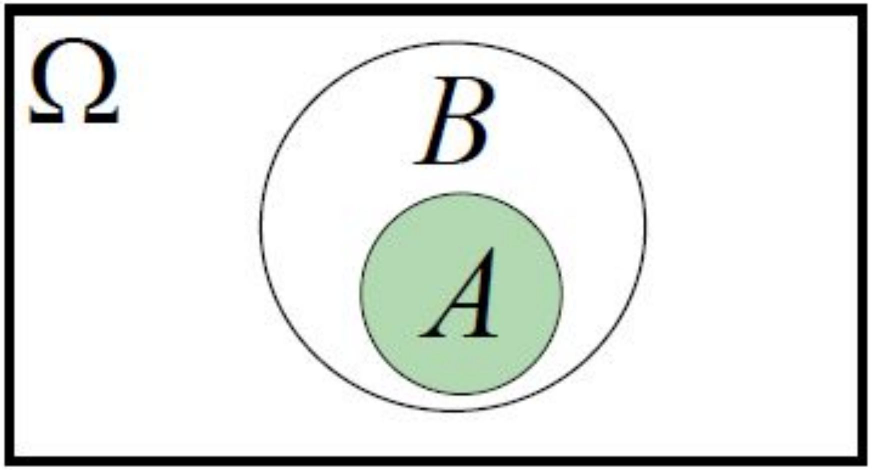
Событие $\Omega \setminus A$ называется <u>противоположным</u> событием к А



ОБОЗНАЧЕНИЕ $\overline{A}$

$$A \cdot \overline{A} = \Theta \qquad A + \overline{A} = \Omega$$

ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ



$$A \subset B$$

B является следствием события A

Если каждое появление события А сопровождается появлением В, то пишут А$\subset$ В

Если А$\subset$В, то каждое элементарное событие, входящее в А, содержится в событии В.

ОПЕРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Возникновение теории вероятностей как науки относится к середине 17 века. Первое определение вероятности было дано Бернулли

Вероятность – степень уверенности в том, что событие произойдет и отношение к достоверности как части к целому

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

КЛАССИЧЕСКОЕ

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ

СТАТИСТИЧЕСКОЕ

Классическое определение вероятности сформулировано в курсе лекций Лапласа

ОПЕРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть пространство элементарных событий Ω состоит из конечного числа равновозможных элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$. Произвольное событие А можно представить $A = \{\omega_{i1}; \omega_{i2}; \ldots; \omega_{ik}\}, 1 \le i1 < i2 < \ldots < ik \le k$ Событие А соответствует k элементарным исходам.

Определение

(классическое определение вероятности)

Вероятностью события А называется число, равное отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих появлению события А к общему числу исходов

$$p(A) = \frac{k}{n}$$

СВОЙСТВА КЛАССИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Каждому элементарному событию соответствует только один элементарный исход

$$p(\omega_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall i = \overline{1,n}$$

Событию Ω соответствует n элементарных исходов

$$p(\Omega) = 1$$

Невозможному событию не соответствует ни одного исхода

$$p(\Theta) = 0$$

СВОЙСТВА КЛАССИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

$$0 \le p(A) \le 1, \quad \forall A \in \Omega$$

$$p(A+B) = p(A) + p(B), \quad \forall A, B \subset \Omega: \quad A \cap B = \Theta$$

$$\text{Если} \quad p(A) = 0, \quad mo \quad A = \Theta$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Классическое определение вероятности может применяться лишь в тех случаях, когда:

1) пространство элементарных исходов состоит из конечного числа элементарных исходов;
2) элементарные исходы равновероятны.

ПРИМЕР

Задача: Рассмотрим кубик, на гранях которого написаны цифры 1, 7, 0,
1, 2, 4. Опыт состоит в том, что бросаем кубик и смотрим, какая цифра появится на верхней грани.

Элементарными событиями являются: ω_0 - выпадение цифры «0»;
ω_1 - выпадение цифры «1»;
ω_2 - выпадение цифры «2»;
ω_4 - выпадение цифры «4»;
ω_7 - выпадение цифры «7».

Пространство элементарных исходов: $\Omega = \{\omega_0; \omega_1; \omega_2; \omega_4; \omega_7\}$

$A = \{\omega_0; \omega_2; \omega_4\}$ - событие, состоящее в том, что выпадет четная цифра;

$B = \{\omega_1; \omega_7\}$ - событие, состоящее в том, что выпадет нечетная цифра;

$C = \{\omega_2; \omega_7\}$ - событие, состоящее в том, что появится простое число.

ПРИМЕР

В данном опыте события не равновероятны, так как появлению цифры 1 соответствует 2 грани, появлению остальных цифр по одной грани.

К данной модели можно применить классическое определение вероятности, если на гранях с цифрами 1 сделать дополнительные пометки, например 1' и 1" и вместо элементарного события ω1 рассмотреть элементарные события ω1' и ω1". В этом случае пространство элементарных событий будет иметь вид

$$\Omega = \{\omega_0; \omega_{1'}; \omega_{1''}; \omega_2; \omega_4; \omega_7\}$$

$A = \{\omega_0; \omega_2; \omega_4\}$ - событие, состоящее в том, что выпадет четная цифра; $p(A) = 3/6 = 1/2$

$B = \{\omega_{1'}; \omega_{1''}; \omega_7\}$ - событие, состоящее в том, что выпадет нечетная цифра; $p(B) = 3/6 = 1/2$

$C = \{\omega_2; \omega_7\}$ - событие, состоящее в том, что появится простое число. $p(C) = 2/6 = 1/3$

ПРИМЕР

ЭКСПЕРИМЕНТ	ЧИСЛО ВОЗМОЖНЫХ ИСХОДОВ ЭКСПЕРИМЕНТА (n)	СОБЫТИЕ А	ЧИСЛО ИСХОДОВ, БЛАГОПРИЯТ-НЫХ ДЛЯ ЭТОГО СОБЫТИЯ (m)	ВЕРОЯТНОСТЬ НАСТУПЛЕНИЯ СОБЫТИЯ А P(A)=m/n
Бросаем монетку	**2**	**Выпал «орел»**	**1**	$\frac{1}{2}$
Вытягиваем экзаменаци-онный билет	**24**	**Вытянули билет №5**	**1**	$\frac{1}{24}$
Бросаем кубик	**6**	**На кубике выпало четное число**	**3**	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
Играем в лотерею	**250**	**Выиграли, купив один билет**	**10**	$\frac{10}{250}=\frac{1}{25}$

ОПЕРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Геометрическая интерпретация вероятности была предложена английским математиком Венном

Геометрическое определение вероятности применяется в тех случаях, когда имеется бесконечное число равновероятных исходов.

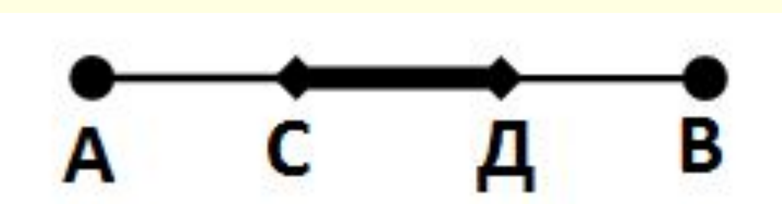
$$p(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}?$$

ОПЕРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

<u>Наиболее распространены 3 модели</u>

1 Имеем отрезок [А, В]. Бросаем в него точку. Теоретически точка может попасть в любую точку Х отрезка [А, В].
Пространство элементарных событий состоит из бесконечного числа элементарных исходов, следовательно классическое определение вероятности применить нельзя.

Вероятностью события А, состоящего в том, что при бросании точки на отрезок [А, В] она попадет на отрезок [С, Д] $\subset$ [А, В], называется число, определяемое по формуле

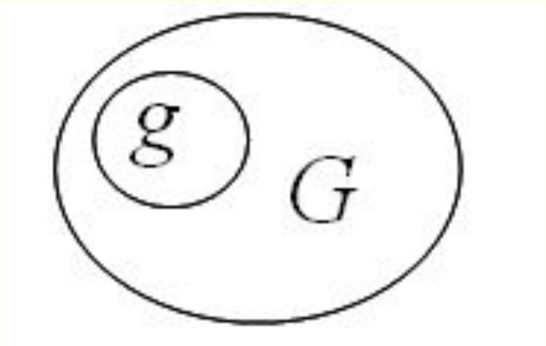


$$p(A) = \frac{\text{длина } [C, Д]}{\text{длина } [AAB]} = \frac{|CД|}{|AB|}$$

ОПЕРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

2 Пусть на плоскости OXY задана замкнутая ограниченная область G с гладкой или кусочно-гладкой границей. Каждой такой области можно поставить в соответствие число S(G) – площадь области. Бросаем точку в область G. Элементарное событие – почка попаден в точку P области G. Пространство элементарных исходов состоит из бесконечного числа равновероятных исходов

Вероятностью события A, состоящего в том, что при бросании точки в область G она попадет в замкнутую ограниченную область с гладкой или кусочно гладкой границей $g \subset G$ называется число, определяемое по формуле



$$p(A) = \frac{\text{площадь g}}{\text{площадь G}} = \frac{S(g)}{S(G)}$$

ОПЕРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

3 Пусть в задано замкнутое ограниченное тело T с гладкой или кусочно-гладкой границей. Ему можно поставить в соответствие число V(T) - объем тела.

Вероятностью события A, состоящего в том, что при бросании точки в область T она попадет в область $t \subset T$, называется число, определяемое по формуле

$$p(A) = \frac{\text{объем t}}{\text{объемT}} = \frac{V(t)}{V(T)}$$

Все три определения можно свести к одному, если вместо числовых характеристик области использовать термин мера области - mes

Вероятностью события A, состоящего в том, что при бросании точки в область D она попадет в область $d \subset D$, называется число, определяемое по формуле

$$p(A) = \frac{\text{mes(d)}}{\text{mes(D)}}$$

СВОЙСТВА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Мера области, соответствующая элементарному событию, равна нулю $p(\omega)=0$.

Благоприятной областью для события Ω является вся область D $p(\Omega)=1$.

Благоприятной области для невозможного события нет

$$p(\Theta)=0$$

$$0\le p(A)\le 1,\quad \forall A\in\Omega$$

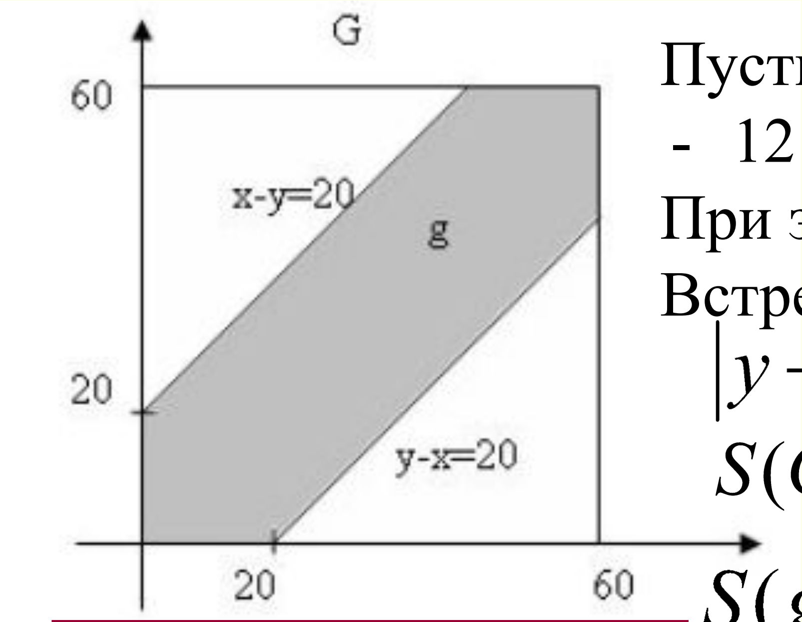
$$p(A+B)=p(A)+p(B),\quad \forall A,B\subset\Omega:\quad A\cap B=\Theta$$

Если $p(A)=0,\quad mo\quad A=\Theta$

ПРИМЕР

Задача: Два друга договорились встретиться между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течении 20 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча произойдет, если каждый наудачу выбирает время своего прихода от 12 до 13 часов.

Решение



Пусть время прихода одного из них –

- 12 ч. х мин.; другого – 12 ч. у мин.

При этом $0 \le x \le 60; \quad 0 \le y \le 60$

Встреча произойдет если:

$$|y - x| \le 20 \Rightarrow x - 20 \le y \le x + 20$$

$$S(G) = 3600$$

$$S(g) = 3600 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 40 = 2000$$

$$p(A) = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}$$

ОПЕРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Статистическое определение вероятности является следствием обработки результатов различных наблюдений и положило начало науке математическая статистика

Проведем серию из N опытов. Как часто появится событие А? (Например, бросаем монету несколько раз. Сколько раз при бросании монеты появится «герб»?)

Пусть NA – число появлений события А в серии из N опытов.

Определение

(статистическое определение вероятности)

Частотой (относительной частотой) появления события А в серии из N опытов называется число, равное отношению числа появлений события А в серии из N опытов к общему числу опытов

$$\nu_A = \frac{N_A}{N}$$

СВОЙСТВА ЧАСТОТЫ

$$0 \le \nu_A \le 1 \quad (\text{т.к.} \quad 0 \le N_A \le N)$$

$$\nu_\Omega = 1 \quad (т.к. \quad N_\Omega = N)$$

$$\nu_\Theta = 0 \quad (т.к. \quad N_\Theta = 0)$$

$$\nu_{A+B} = \nu_A + \nu_B, \quad \forall A, B \subset \Omega: \quad A \cap B = \Theta$$

$$\text{Если} \quad \nu_A = 0, \quad \textit{то} \quad \text{не} \quad \textit{следует}, \quad \textit{что} \quad A = \Theta$$

Например, если бросили монету 3 раза и каждый раз выпало «решка», то частота появления «герба» в данной серии опытов равна нулю, но событие не является невозможным

ОПЕРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Опыты показывают, что при больших N частота ν_A в различных серииях испытаний оказывается приближенно одинаковыми, то есть существует некоторое значение p(A), называемое вероятностью события A, около которого группируются указанные частоты

$$p(A) \approx \nu_A = \frac{N_A}{N}$$

Так как при проведении экспериментов или сбора информации возможны погрешности, то обычно проводят несколько серий опытов (например k серий), в которых число испытаний равно N_1, $N_2, \ldots, N_k$. Опрределяют частоту появления события в каждой серии $\nu_A^1, \ \nu_A^2, \ldots, \nu_A^k$ и под вероятностью понимают число

$$p(A) \approx \frac{\nu_A^1 + \nu_A^2 + \ldots + \nu_A^k}{k}$$

ТЕОРЕМЫ УМНОЖЕНИЯ

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P)

Теорема

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, при условии что первое произошло

$$\forall A, B \in F: \quad \begin{array}{l} \mathrm{p}(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) = \mathrm{p}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{B}/\mathrm{A}) \\ \mathrm{p}(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) = \mathrm{p}(\mathrm{B}) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{B}) \end{array}$$

Теорема

$$\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in F \quad p(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) =$$

$$= p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) \cdot p(A_3 / A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n / A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$$

ПРИМЕР

Задача:

В урне лежат 12 белых, 8 красных и 10 синих шаров. Наудачу вынимают 2 шара. Какова вероятность, что вынутые шары разных цветов, если известно, что среди них не оказалось синего шара?

Решение

Так как известно, что синие шары не вынимались, то всего существует n=20 возможных вариантов исхода опыта.

Событие Ai – i-ый вынутый шар белый;

Bi – i-ый вынутый шар красный.

$$i = 1,2$$

Если 1-ым вынут белый шар, а 2-ым красный, то вероятность такого события

$$p(C) = p(A_1 \cdot B_2) = p(A_1) \cdot p(B_2 / A_1) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19}$$

Если 1-ым вынут красный шар, а 2-ым белый, то вероятность такого события

$$p(D) = p(B_1 \cdot A_2) = p(B_1) \cdot p(A_2 / B_1) = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19}$$

ПРИМЕР

Так как порядок извлечения шаров не имеет значения, нас устраивают оба события. Тогда учитывая несовместность событий C и D, получаем

$$p = p(C + D) = p(C) + p(D) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} + \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{48}{95}$$

Определение

События A и B называются <u>независимыми</u>, если

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$$

Определение

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются <u>попарно независимыми</u>, если $p(A_i \cdot A_j) = p(A_i) \cdot p(A_j) \quad \forall i \neq j$

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P)
Нас интересует событие A, которое может наступить при появлении одного из несовместных событий A1, A2,…,An, образующих полную группу

Определение

Совокупность событий $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ называется <u>полной группой событий</u>, если:

1) события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно независимы, то есть

$$A_i \cdot A_j = \Theta \quad \forall i \neq j$$

2)

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$$

В результате эксперимента обязательно происходит одно из событий A_i, $i=1,2,\ldots,n$.
События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются <u>**гипотезами**</u>.

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть известны вероятности событий $A_i, \quad i=\overline{1,n}$ и условные вероятности $p(A/A_1), \quad p(A/A_2),..., p(A/A_n)$.

Как найти вероятность события А?

Теорема

(формула полной вероятности)

Если события А1, А2,…,Аn образуют полную группу событий, то для любого события А справедлива формула полной вероятности

$$p(A) = p(A_1)\cdot p(A/A_1) + p(A_2)\cdot p(A/A_2) + ...$$
$$... + p(A_n)\cdot p(A/A_n)$$

Вероятности p(Ak) называются <u>априорными вероятностями гипотез</u>, вычисляемыми до произведения опыта

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Формула полной вероятности применяется в случаях, когда опыт со случайным исходом распадается на два этапа: на первом этапе «разыгрываются» условия опыта, а на втором – его результат.

Предположим ситуацию:

Опыт произведен. В результате наступило событие А. Как изменятся вероятности гипотез $A_i, \quad i = 1, n$? То есть как найти апостериорные вероятности гипотез

$$p(A_1 / A), \quad p(A_2 / A), \dots, p(A_n / A)$$

Теорема (формула Байесса)

Предположим, что в результате испытания событие А произошло. Тогда вероятность гипотез $A_1, A_2, \dots, A_n$ можно вычислить

$$p(A_i / A) = \frac{p(A_i) \cdot p(A / A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(A_j) \cdot p(A / A_j)}, \quad \forall i = \overline{1, n}$$

ПРИМЕР

Задача: По объекту производится 2 выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,5; при втором – 0,7. Вероятность разрушения объекта при одном попадании равна 0,4; при двух попаданиях – 0,8. Найти вероятность разрушения объекта при двух выстрелах.

Решение

Обозначим B1 и B2 попадания соответственно при 1-ом и 2-ом выстреле. Введем гипотезы A2– два попадания при двух выстрелах,

A1 – одно попадание при двух выстрелах,

A0 – ни одного попадания при двух выстрелах.

Событие A1 произойдет, если случится одно попадание при 1-ом или 2-ом выстреле, то есть $\mathrm{A}_1 = \underline{B_1} \cdot \underline{B_2} + B_1 \cdot B_2$

Аналогично $\mathrm{A}_2 = B_1 \cdot B_2, \quad A_0 = B_1 \cdot B_2$

Считая B1 и B2 независимыми, получим

$$p(A_1) = 0{,}5 \quad p(A_2) = 0{,}35 \quad p(A_0) = 0{,}15$$

$$p(A / A_1) = 0{,}4 \quad p(A / A_2) = 0{,}8 \quad p(A / A_0) = 0 \Rightarrow p(A) = 0{,}48$$

СХЕМА БЕРНУЛЛИ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Определение

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события А

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться или нет, причем вероятность появления события А в каждом испытании постоянна и равна числу p. Тогда вероятность ненаступления события А в каждом испытании также постоянна и равна числу $q=1-p$.

Такая последовательность испытаний называется серией испытаний, удовлетворяющих **схеме Бернулли**.

СХЕМА БЕРНУЛЛИ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Вычислить вероятность того, что событие А при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, появится ровно m раз

ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

$$\boxed{p_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}}$$

C_n^m - общее число сложных событий, в которых событие А наступит m раз;

$p^m \cdot q^{n-m}$ - вероятность каждого сложного события

СЛЕДСТВИЕ

1. Вероятность того, что событие А наступит хотя бы один раз при проведении испытаний по схеме Бернулли равна $p_n(m \geq 1) = 1 - q^n$

2. Вероятность того, что событие А при проведении n испытаний по схеме Бернулли наступит не менее m1 раз и не более m2 раз равна

$$p_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} p_n(k)$$

ПРИМЕР

Задача: Чему равна вероятность того, что при четырех подбрасываниях игральной кости тройка выпадет 2 раза?

Решение

$$p_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-2} = \frac{25}{216}$$

Задача: Два равносильных шахмотиста играют в шахмоты. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (нечьи во внимание не принимаются)?

$$P_4(2) = C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 (1-\frac{1}{2})^{4-2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} = \frac{24}{64}$$

$$P_6(3) = C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 (1-\frac{1}{2})^{6-3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64}$$

Вероятность выиграть 2 партии из четырех выше.

НАИВЕРОЯТНЕЙШЕЕ ЧИСЛО НАСТУПЛЕНИЯ СОБЫТИЯ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ИСПЫТАНИЙ ПО СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

Задача: Рабочий обслуживает 12 одноименных станков. Вероятность того, что станок потребует к себе внимания в течение промежутка времени Т, равна 1/3.
Составим закон распределения вероятностей в зависимости от числа требований станков.

Решение

$p_{12}(0) = 0{,}0077$ $\quad p_{12}(5) = 0{,}1907$ $\quad p_{12}(9) = 0{,}003317$

$p_{12}(1) = 0{,}0462$ $\quad p_{12}(6) = 0{,}1112$ $\quad p_{12}(10) = 0{,}0004967$

$p_{12}(2) = 0{,}1271$ $\quad p_{12}(7) = 0{,}0476$ $\quad p_{12}(11) = 0{,}0000451$

$p_{12}(3) = 0{,}2119$ $\quad p_{12}(8) = 0{,}0121$ $\quad p_{12}(12) = 0{,}0000018$

$p_{12}(4) = 0{,}2384$

Вначале с ростом числа требований станков, вероятности возрастают, достигая пика при m=4; затем их значения начинаю уменьшаться.

НАИВЕРОЯТНЕЙШЕЕ ЧИСЛО НАСТУПЛЕНИЯ СОБЫТИЯ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ИСПЫТАНИЙ ПО СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

Исследования показали, что такая ситуация наблюдается для модели, подчиняющихся схеме Бернулли. В схеме Бернулли среди возможного числа успехов можно выделить количество успехов m^* которому соответствует наибольшая вероятность, то есть наивероятнейшее число успехов.

Формула для определения наивероятнейшего числа успехов:

$$n \cdot p - q \le m^* \le n \cdot p + p$$

Решение ранее представленной задачи

$$n = 12, \quad p = \frac{1}{3}, \quad q = \frac{2}{3} \Rightarrow 4 - \frac{2}{3} \le m^* \le 4 + \frac{1}{3} \Rightarrow m^* = 4$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Если np-q – целое число, то так как np+p=np+1-q=np-q+1 – целое число, то значений m^* будет два

ПРИМЕР

Задача: В ВУЗе обучаются 730 студентов. Вероятность того, что день рождение наугад взятого студента приходится на определенный
день года 1/365 (для года из 365 дней, високосные года не учитываются). Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 января.

Решение

$$\mathrm{n} = 730, \quad p = \frac{1}{365}, \quad q = \frac{364}{365}$$

$$np - q = \frac{366}{365}, \quad np + p = \frac{731}{365}$$

$$\frac{366}{365} \le m^* \le \frac{731}{365} \Rightarrow m^* = 2$$

ФОРМУЛА ПУАССОНА

В случае большого количества n испытаний и малой вероятности успеха (то есть p<0,1; np<10) вместо формулы Бернулли приемлемую точность дает приближенная **формула Пуассона**

Симеон-Дени Пуассон

$$p_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad \text{где} \quad \lambda = n \cdot p$$

Это связано с тем, что можно получить

$$\lim_{n\to\infty} p_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \forall 0 \le m \le n \quad \text{и} \quad 0 < \lambda < +\infty$$

Если количество n испытаний Бернулли велико, а $n \cdot p \cdot q \geq 10$. (то есть вероятность появления события А в каждом испытании не слишком мала), применяют другие приближенные формулы Бернулли.

ПРИМЕР

Пример. Телефонная станция обслуживает 2000 абонентов. Вероятность того, что какой-то абонент позвонит в течение часа равна 0,003. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

$$\{a = np = 2000 \cdot 0.003 \Rightarrow$$

$$P_5 = \frac{6^5 \cdot e^{-6}}{5!} \approx 0.13\}$$

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Вероятность того, что в n (n>>1) независимых испытаниях Бернулли событие А произойдет ровно m раз, может быть найдена по приближенной формуле

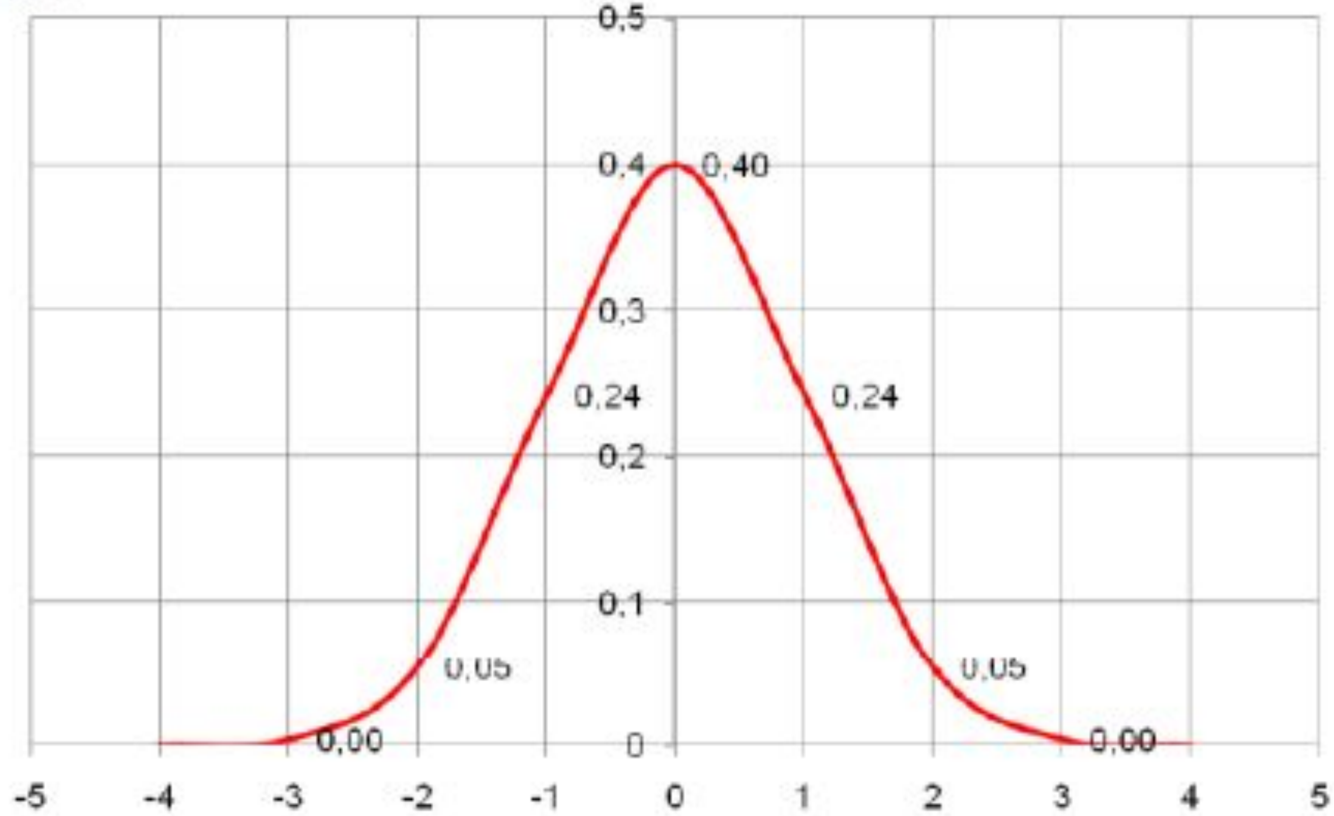
$$p_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где p – вероятность появления события А в каждом испытании;
q=1-p

Абрахам де Муавр (*Abraham de Moivre*, 26 мая 1667, Витри-ле-Франсуа—27 ноября 1754, Лондон) — английский математик,

- с (фр. *Pierre-Simon Laplace*; 23 марта 1749 — 5 марта 1827) — французский математик

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\varphi(x)$$ - **функция Гаусса**



1. Чётная.
2. При $x \geq 4$ можно считать равной *0*.

ПРИМЕР

Пример. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка 0,7. Какова вероятность попадания 160 раз при 200 выстрелах?

$$\{x = \frac{160 - 200 * 0.7}{\sqrt{200 * 0.7 * 0.3}} \approx \frac{20}{6.48} \approx 3.1$$

$$\varphi(3.1) \approx 0.0033$$ - из таблицы (след. слайд).

$$P_{200}(160) \approx \frac{1}{6.48} \cdot 0.0033 \approx 0.0005\}$$

Приложение 1. Значение функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	1714	1692	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1540	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1181	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
x	Десятые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,	0540	0440	0355	0283	0224	0175	0136	0104	0079	0060
3,	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0030	0020
4,	0001									

$x = 3.1$

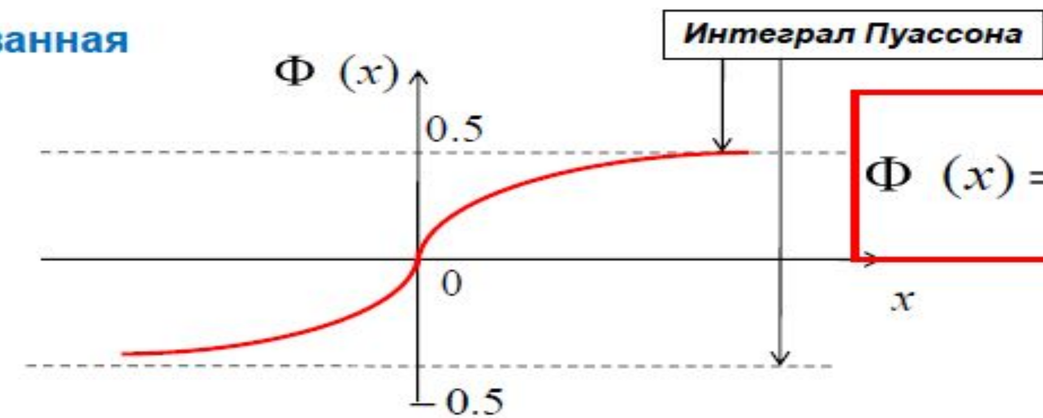
ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Вероятность того, что в n (n>>1) независимых испытаниях событие А произойдет от m1 до m2 раз, может быть найдена по приближенной формуле

$$p_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

p – вероятность появления события А в каждом испытании;   q=1-p

Нормированная функция Лапласа:



$$\Phi\ (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

1. Нечётная: $\Phi(x) = -\Phi(-x)$
2. При *x*>5 можно считать равной *0.5*

ПРИМЕР

Пример. Цех в среднем выпускает 96% продукции высшего сорта. При приёмке продукции проверяют 200 изделий. Если среди них >10 штук не высшего сорта, то вся партия бракуется и возвращается в цех. Какова вероятность того, что партия будет принята?

$$\{x_1 = \frac{0 - 200 * 0.04}{\sqrt{200 * 0.04 * 0.96}} \approx -2.9,$$

$$x_2 = \frac{10 - 200 * 0.04}{\sqrt{200 * 0.04 * 0.96}} \approx 0.72$$

из таблицы

$$P_{200}(0 \le m \le 10) = \Phi\ (0.72) - \Phi\ (-2.9)$$

$\textit{нечетность } \Phi$

$$= \quad 0.2642 + 0.4981 = 0.7623\}$$

Значение функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	$\boxed{2642}$	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767

x	Десятые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,	4773	4821	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	$\boxed{4981}$
3,	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	5000[1]

$x_2 = 0.72$

$x_1 = 2.9$

ТЕОРЕМЫ МУАВРА-ЛАПЛАСА

Замечание

Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа обеспечивают приемлемую точность, если вероятность p каждого успеха удовлетворяет ограничениям:

$$p > \frac{1}{n+1} \quad \text{или} \quad p < \frac{n}{n+1}$$

то есть p не слишком мала и не близка к единице