

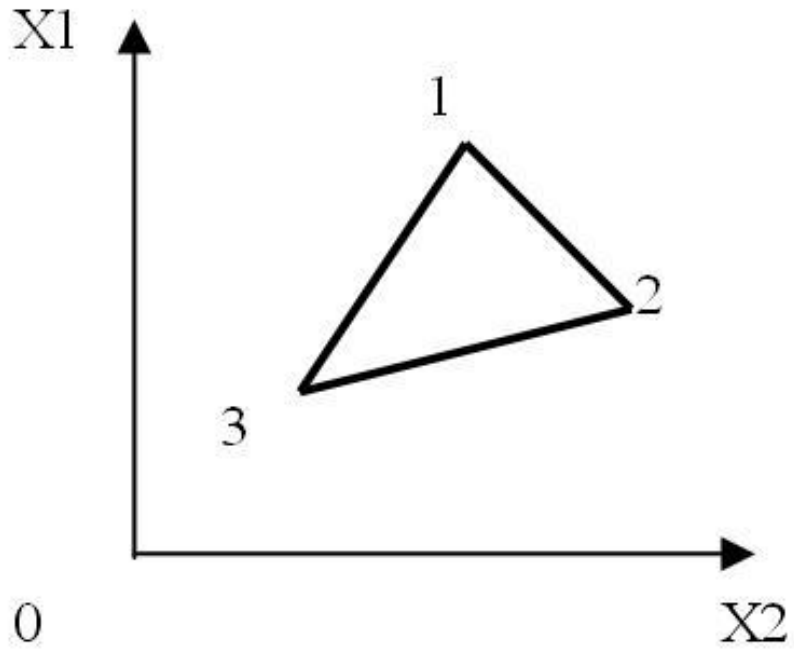
Симплекс

Симплексное планирование

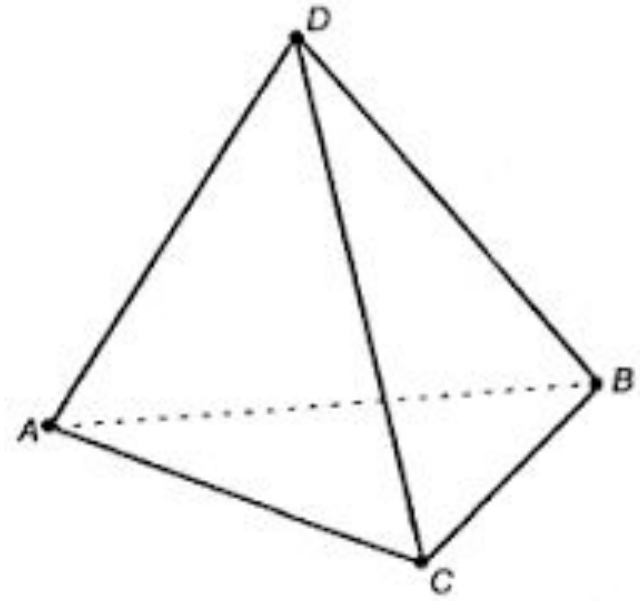
Симплексное планирование

- Симплекс в n - мерном пространстве представляет собой простейшую n - мерную замкнутую геометрическую фигуру, образованную $n+1$ вершинами, которые соединены между собой прямыми линиями.
- Координаты вершин симплекса являются значениями факторов в отдельных опытах.
- В двухфакторном пространстве ($n=2$) симплекс представляет собой треугольник в плоскости x_1ox_2 , в трехфакторном – тетраэдр и т.д.

Симплекс

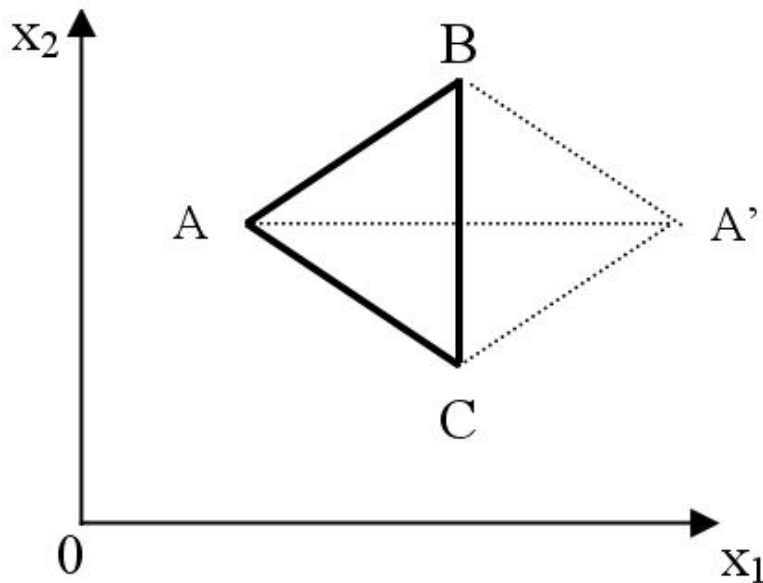


В двухфакторном пространстве



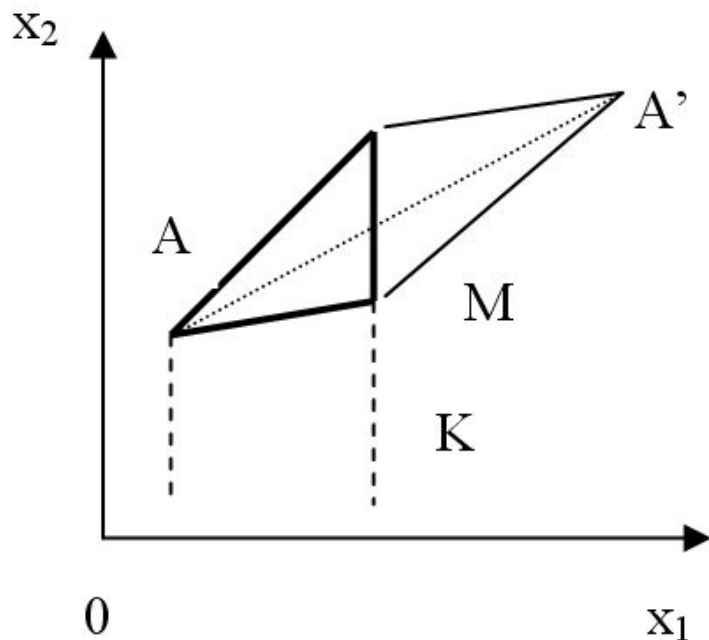
В трёхфакторном пространстве

Регулярный симплекс



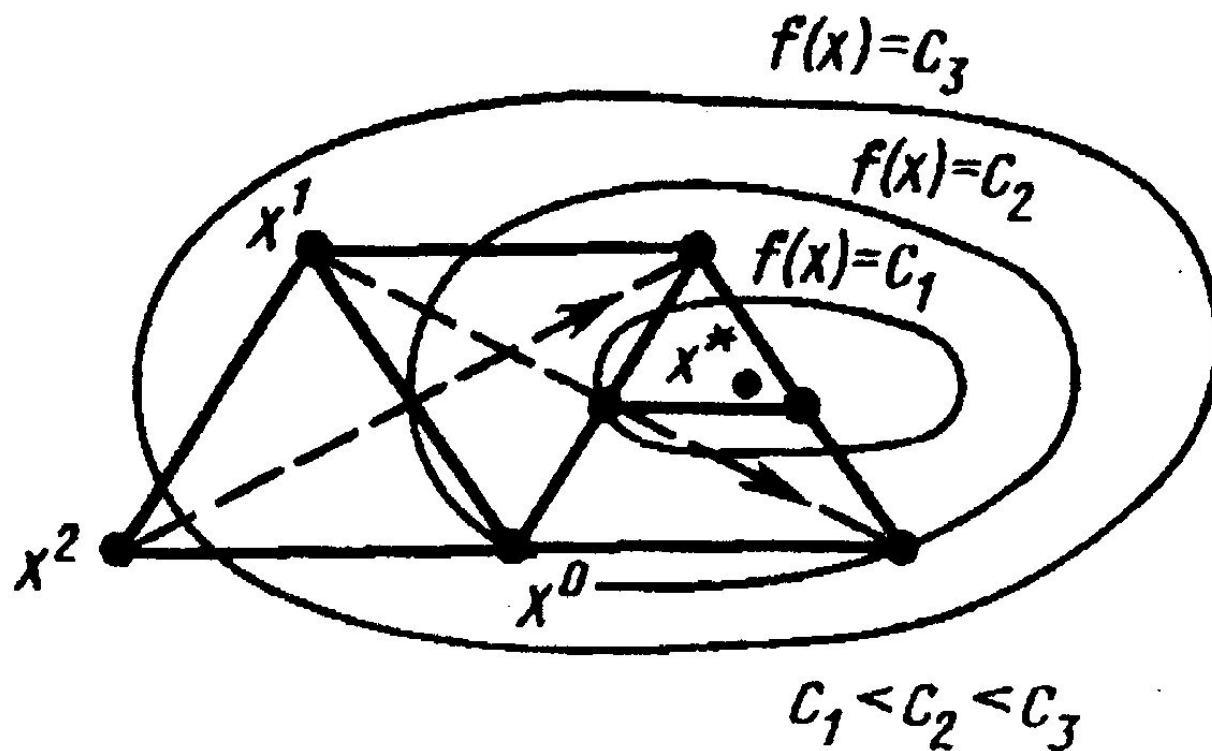
- Основное свойство симплекса - отбрасывание одной из его вершин и построение новой вершины, лежащей по другую сторону противоположащей грани, получают новый симплекс.
- При поиске оптимума отбрасывают ту вершину симплекса, которой соответствует наихудшее значение выхода объекта.

Поиск оптимума для нерегулярного симплекса



- Новая вершина симплекса, получаемая отражением наихудшей относительно противоположащей грани, располагается на прямой, соединяющей отбрасываемую вершину с центром тяжести остальных вершин.

Графическая интерпретация поиска оптимума



Критерии окончания поиска

- Разность значений выхода объекта в вершинах симплекса становится меньше заранее заданного числа. Отражение любой из вершин симплекса после однократной постановки опыта приводит к его возврату в прежнее положение.
- Циклическое движение симплекса вокруг одной из его вершин на протяжении более чем M шагов, причем $M=1,65n+0,5n^2$, M округляется до ближайшего целого числа.

Использование симплекс-матрицы

- При использовании симплексного планирования координаты вершины симплексов записывают в виде таблицы, являющейся матрицей планирования эксперимента или планирования расчетов с целью поиска оптимума.
- При построении матрицы планирования эксперимента (координат вершины симплекса), координатами n - мерного пространства служат факторы – x_j , где $j=1 \dots n$. Вершины симплекса служат номерами опытов.

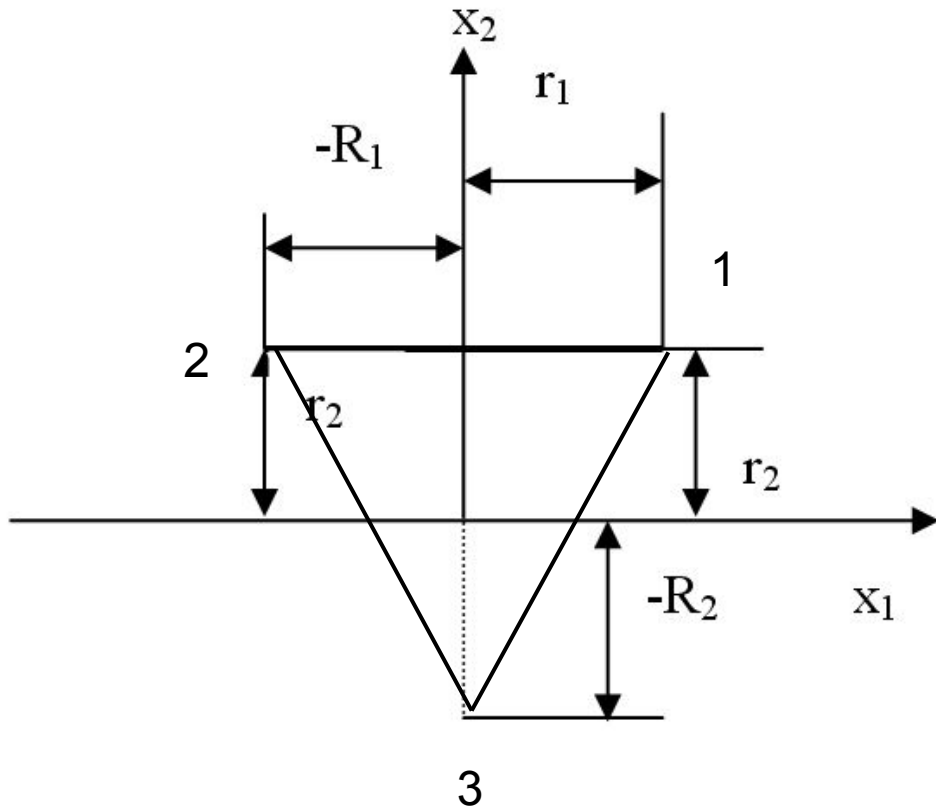
Матрица планирования

- Способ составления матрицы симплексного планирования зависит от выбора расположения симплекса относительно начала системы координат. Для удобства выберем, чтобы центр симплекса находился в начале координат. Хотя выбор размеров симплекса и его начального положения до известной степени произволен. В общем случае исходная матрица симплексного планирования поиска оптимума будет иметь следующий вид ниже:

Общий вид симплекс-матрицы

Номер опыта	Уровни факторов (координаты вершин)					
	x_1	x_2	x_3	x_{n-1}	x_n
1	r_1	r_2	r_3	r_{n-1}	r_n
2	$-R_1$	r_2	r_3	r_{n-1}	r_n
3	0	$-R_2$	r_3	r_{n-1}	r_n
4	0	0	$-R_3$	r_{n-1}	r_n
...
...
n	0	0	0	$-R_{n-1}$	r_n
n+1	0	0	0	0	$-R_n$

Расположение равномерного симплекса для построения симплекс-матрицы



Матрица эксперимента

№	x_1	x_2
1	r_1	r_2
2	$-R_1$	r_2
3	0	$-R_2$

Для вершины «1» координаты r_1 и r_2
«2» координаты $-R_1$ и r_2
«3» координаты 0 и $-R_2$

Матрица эксперимента

- Уровни факторов в данном случае кодированы и находятся из соотношений и является номером фактора или номером координаты n -мерного пространства

$$r_j = \sqrt{\frac{1}{2j(j+1)}};$$

$$R_j = \sqrt{\frac{j}{2(j+1)}},$$

Матрица симплексного планирования для 5 факторов

Номер опыта	Уровни факторов					y
	x1	x2	x3	x4	x5	
1	0,5	0,289	0,204	0,158	0,129	y1
2	-0,5	0,289	0,204	0,158	0,129	y2
3	0	-0,578	0,204	0,158	0,129	y3
4	0	0	-0,612	0,158	0,129	y4
5	0	0	0	-0,632	0,129	y5
6	0	0	0	0	-0,645	y6

Расчет новых уровней факторов

- Уровни факторов в матрице выше кодированы от -1 до 1 . Для проведения опытов необходимо кодированные уровни факторов превратить в натуральные значения. Для этого задаются исходные уровни факторов в натуральных единицах и интервалы варьирования .

$$\tilde{x}_{ji} = \tilde{x}_{j0} + \frac{x_{ji} - x_{j0}}{D_j} \text{ формула перевода}$$

Проведение эксперимента

- После составления исходной матрицы выполняются все опыты с уровнем факторов записанных в ней. В результате получают значения \mathbf{y} в каждом опыте:
- y_1, y_2, \dots, y_6 – это параметры оптимизации
- На основе анализа выбирают «наихудшее» значение \mathbf{y} и его записывают \mathbf{y}_i^* . Допустим, что в примере y_1 является худшим значением, т.е. \mathbf{y}_1^* . В этом случае первая строчка в матрице зачеркивается и ее значения отбрасываются. После этого производится расчет новых уровней факторов в первом опыте следующим образом:

$$\tilde{x}_j = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n+1} x_{ji} - \left(\frac{2}{n+1} \right) \tilde{x}_j^*$$

Пример

- Симплексным методом оптимизировать состав серого чугуна.
- В качестве исходного состава выбрать $C \rightarrow 3,8\%$, $Si \rightarrow 2\%$, $Mn \rightarrow 0,6\%$,
- Интервал варьирования их содержания принять: $C \rightarrow 0,4\%$, $Si \rightarrow 0,3\%$, $Mn \rightarrow 0,3\%$.

Перевод кодированных уровней факторов в натуральные единицы

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{1i} &= 3,8 + 0,4x_{1i} & x_{11} &= 0,5, & \tilde{x}_{11} &= 3,8 + 0,4 \cdot 0,5 = 4 \\ \tilde{x}_{2i} &= 2,0 + 0,3x_{1i} & x_{12} &= -0,5, & \tilde{x}_{12} &= 3,8 - 0,4 \cdot 0,5 = 3,6 \\ \tilde{x}_{3i} &= 0,6 + 0,3x_{1i} & \tilde{x}_{13} \text{ и } \tilde{x}_{14} &= 3,8, & \text{т.к. } x_{13} \text{ и } x_{14} &= 0.\end{aligned}$$

Исходная матрица планирования

Опыт	Уровни факторов			Результат
	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	
1	4,0	2,09	0,66	y1
2	3,6	2,09	0,66	y2
3	3,8	1,83	0,66	y3
4	3,8	2	0,42	y4

Расчет нового уровня фактора

- Предположим, что худшее значение y наблюдается в первом опыте.
Исключаем первый опыт и
рассчитываем новые уровни факторов:

$$\tilde{x}_1 = (2/3)(4,0+3,6+3,8+3,8)-(2/(3+1))\cdot 4,0=3,46$$

$$\tilde{x}_2 = (2/3)(2,09+2,09+1,83+2)-(2/(3+1))\cdot 2,09=3,46$$

$$\tilde{x}_3 = (2/3)(0,66+0,66+0,66+0,42)-(2/(3+1))\cdot 0,66=0,5$$

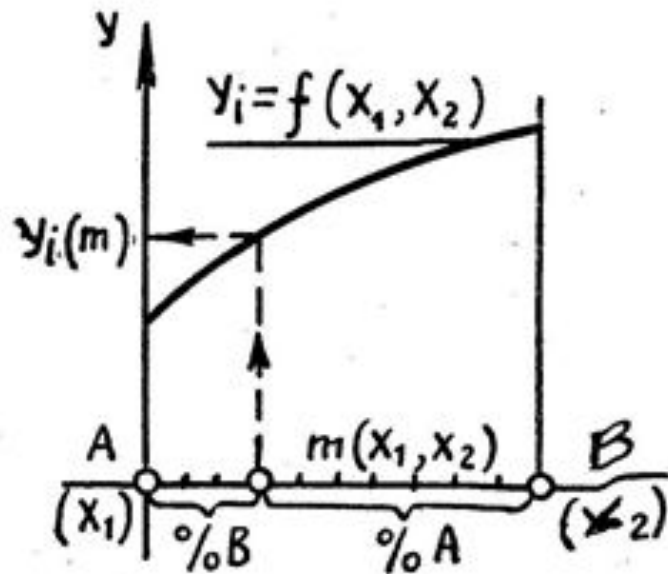
**Планирование
экспериментов на
диаграммах «Состав-
свойства»**

Область концентраций задается в виде симплекса

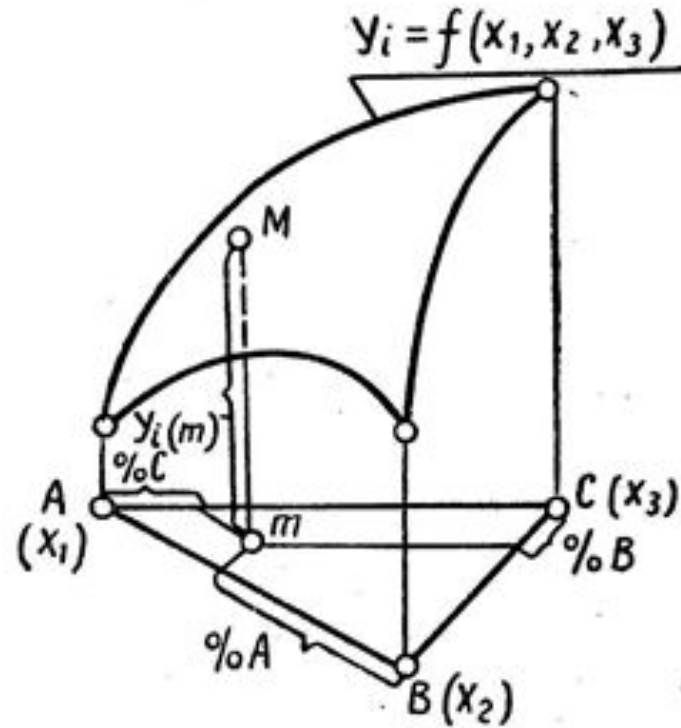
- В этом случае состав многокомпонентного сплава задается с помощью симплекса, с q вершинами в $(q-1)$ мерном пространстве. Каждой из вершин симплекса соответствует состав сплава в нормированном виде, где содержание одного компонента максимально, а остальных минимально.

$$\sum_{i=1}^q x_i = 1 \quad (100\%)$$

Диаграмма «состав-свойство»

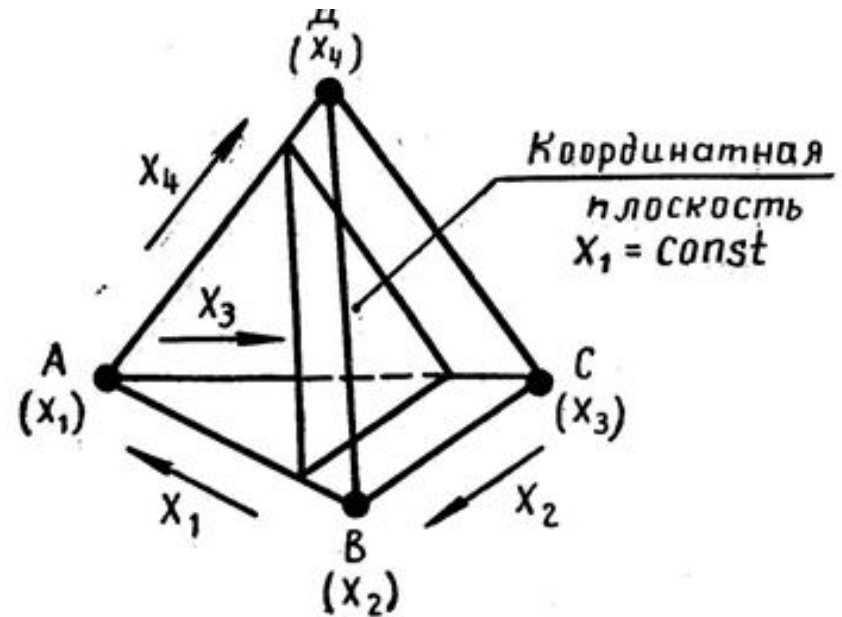
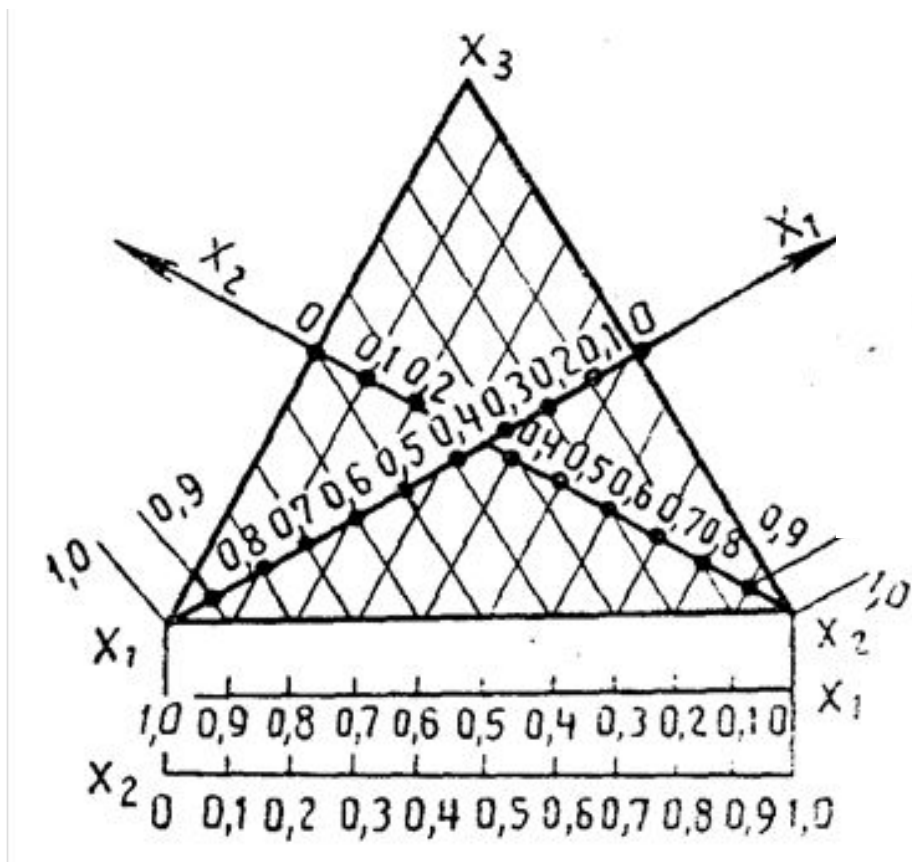


двухкомпонентный сплав
(диаграмма одномерного симплекса).

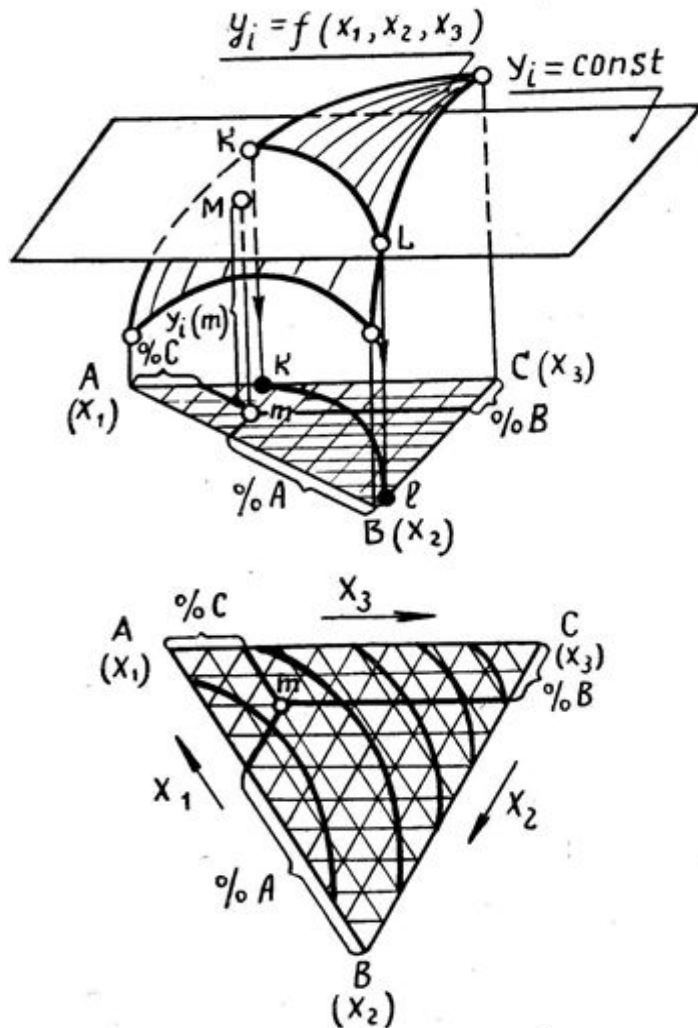


трёхкомпонентный сплав
(диаграмма двумерного симплекса).

Координатные оси и линии симплекса



Построение диаграммы линий уровня



- При планировании эксперимента на диаграммах «состав-свойства» задачи формулируются обычно как задачи описания, т. е. получение некоторых математических уравнений зависимости свойств сплавов от концентраций исходных компонентов.
- Здесь степенные ряды Тейлора практически никогда не используются из-за зависимости одной из переменных.

Использование канонической формы полинома

- Если рассматривать $q-1$ переменную симплекса, как систему независимых переменных, а содержание последнего q -го компонента определять, как остаток от общей суммы, модель в форме полинома Тейлора может быть построена, но эта модель будет содержать лишь $q-1$ переменную.

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \tilde{x}_1 + b_2 \tilde{x}_2$$

$$y = (b_0 \tilde{x}_1 + b_0 \tilde{x}_2) + b_1 \tilde{x}_1 + b_2 \tilde{x}_2 = \beta_1 \tilde{x}_1 + \beta_2 \tilde{x}_2 = \sum_{i=1}^q b_i \tilde{x}_i$$

$$y = \sum_{i=1}^q \beta_i \tilde{x}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^q \beta_{ij} \tilde{x}_i \tilde{x}_j$$

$$y = \sum_{i=1}^q \beta_i \tilde{x}_i + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^q \gamma_{jk} \tilde{x}_j \tilde{x}_k (\tilde{x}_j - \tilde{x}_k) + \sum_{\substack{j,k,l=1 \\ j < k < l}}^q \beta_{jkl} \tilde{x}_j \tilde{x}_k \tilde{x}_l$$

Однородные полиномы

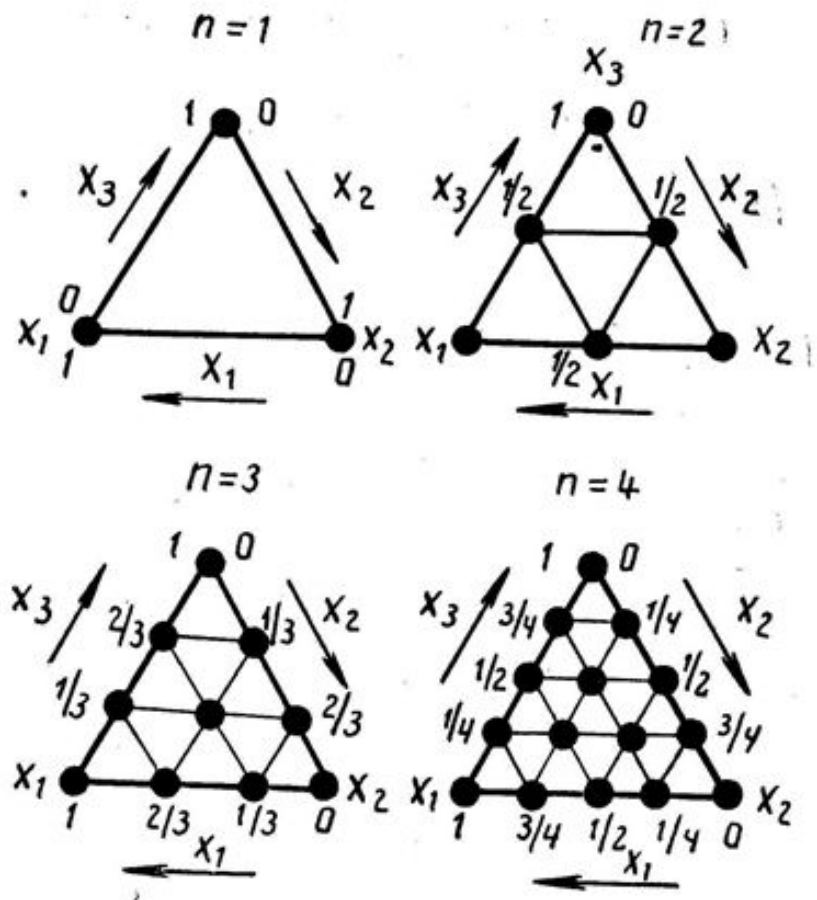
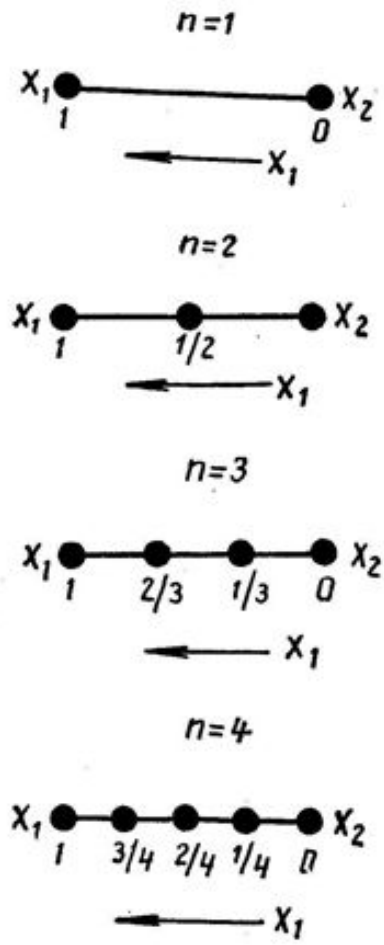
- Это полиномы, получаемые из исходного ряда Тейлора домножением его членов степени $s < n$ на

$$\left(\sum_{j=1}^q x_j \right)^{n-s} = 1.$$

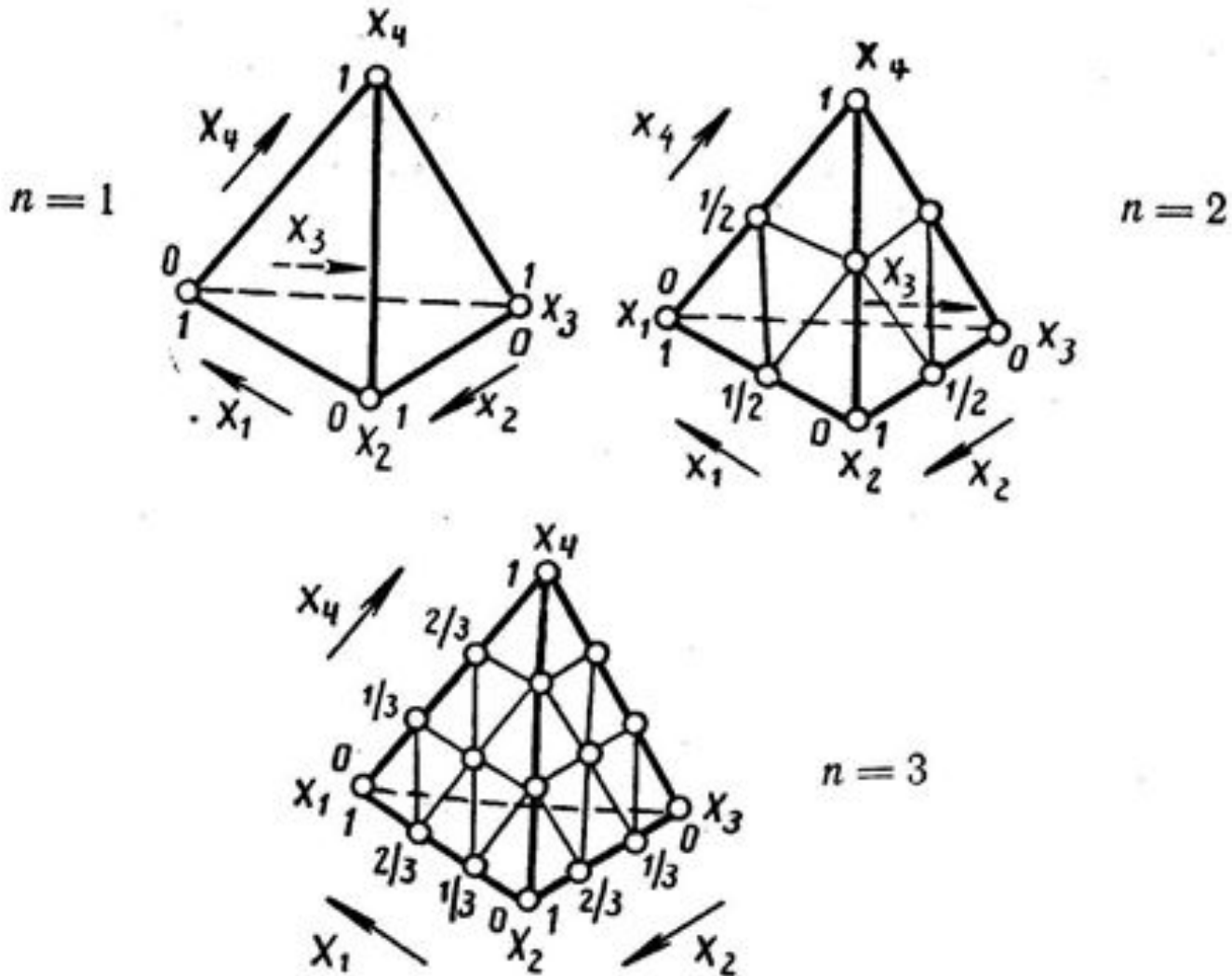
$$\hat{y} = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^q \beta_{jk} \tilde{x}_j \tilde{x}_k + \sum_{j=1}^q \beta_{jj} \tilde{x}_j^2.$$

$$y = \sum_{i=1}^q \beta_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^q \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^q \beta_{ijk} x_i x_j x_k + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k < l}}^q \beta_{ijkl} x_i x_j x_k x_l$$

Симплекс решетчатый план



Решетчатые планы для четырёх компонентных сплавов



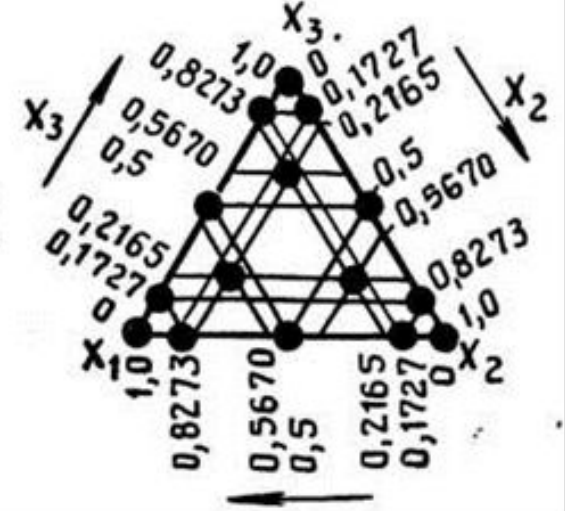
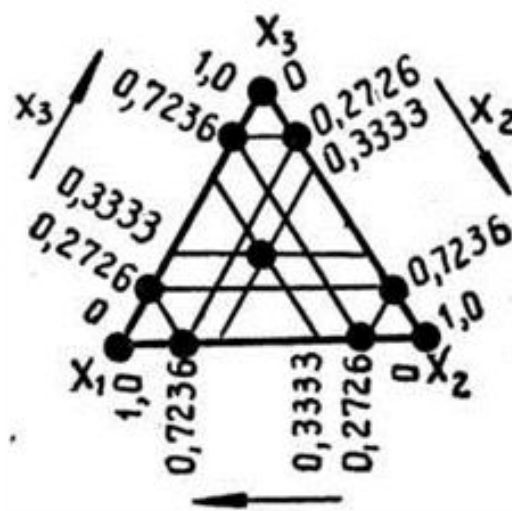
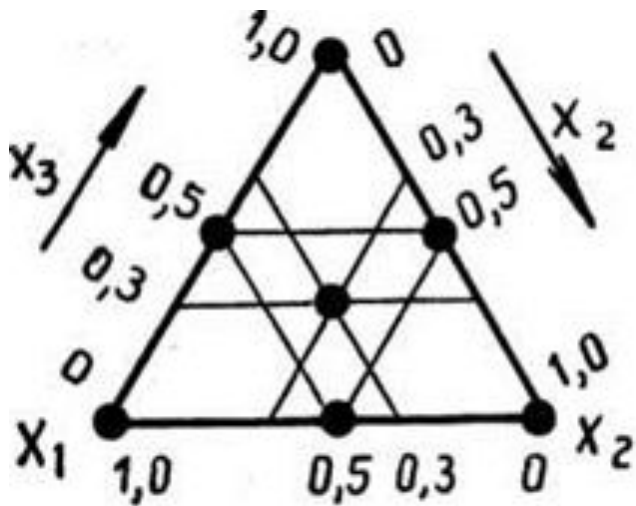
Симплексные планы

D-оптимальные планы для

$q = 3$ и $n = 3$ и 4

Симплекс-
центроидные

$q=3$



Матрицы планов

Матрица линейного плана
на симплексе с $q = 3$

\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	Обозначение свойства
1	0	0	y_1
0	1	0	y_2
0	0	1	y_3

Матрица плана второго порядка
на симплексе с $q = 3$

\tilde{x}_1	x_2	\tilde{x}_3	Обозначение свойства
1	0	0	y_1
0	1	0	y_2
0	0	1	y_3
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	y_{12}
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	y_{13}
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	y_{23}

Матрица плана неполной третьей
степени на симплексе с $q = 3$

\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	Обозначение свойства
1	0	0	y_1
0	1	0	y_2
0	0	1	y_3
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	y_{12}
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	y_{13}
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	y_{23}
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	y_{123}

Матрицы планов третьего и четвертого порядков

Матрица плана третьего порядка на симплексе с $q = 3$

\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	Обозначение свойства	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	Обозначение свойства	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	Обозначение свойства
1	0	0	y_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	y_{122}	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	y_{223}
0	1	0	y_2	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	y_{113}	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	y_{233}
0	0	1	y_3	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	y_{133}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	y_{123}
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	y_{112}								

Таблица 2.33.

Матрица плана четвертого порядка на симплексе с $q = 3$

\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	Обозначение свойства	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	Обозначение свойства	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	Обозначение свойства
1	0	0	y_1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	y_{1112}	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	y_{2223}
0	1	0	y_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	y_{1222}	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	y_{2333}
0	0	1	y_3	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	y_{1113}	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	y_{1123}
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	y_{12}					$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	y_{1123}
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	y_{13}	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	y_{1333}	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	y_{1223}
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	y_{23}	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	y_{1233}

Ненасыщенные планы

- Число экспериментальных точек в них равно числу искомых коэффициентов модели, т.е. ошибки эксперимента однозначно переходят в ошибки поверхности отклика (ошибки модели).
- Для снижения ошибок аппроксимации проводятся повторные опыты в каждой точке плана и расчет коэффициентов модели проводят по соответствующим усредненным значениям.
- Коэффициенты моделей могут вычисляться по общим формулам регрессионного анализа, например в матричной форме, с помощью
- $B = (X^*X)^{-1}X^*Y$
- Могут использоваться и достаточно простые расчетные соотношения, позволяющие производить необходимые расчеты, при насыщенности плана.

Пример

Матрица линейного плана
на симплексе с $q = 3$

\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	Обозначение свойства
1	0	0	y_1
0	1	0	y_2
0	0	1	y_3

$$q = 3$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \beta_1 1 + \beta_2 0 + \beta_3 0 \\ y_2 &= \beta_1 0 + \beta_2 1 + \beta_3 0 \\ y_3 &= \beta_1 0 + \beta_2 0 + \beta_3 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= \beta_1 \\ y_2 &= \beta_2 \\ y_3 &= \beta_3 \end{aligned}$$

Из записанных ранее
таблиц можно
определить расчетные
формулы для оценки
коэффициентов
второго порядка.

Следует учесть

- суммарное число цифр в индексе соответствует числу частей, на которое разбивается основание симплекса используемой симплексной решеткой;
- отсутствие той или иной цифры в индексе указывает на то, что соответствующий компонент введется в сплав в минимальном количестве, соответствующем коду 0;
- число повторений цифры в индексе характеризует относительное содержание данного элемента в сплаве (относительно суммарного числа цифр в индексе).
- Например, индекс 1112 для случая исследования трехкомпонентного сплава означает, что рассматривается состав, содержащий минимальное количество третьего компонента ($x_3 = 0$) и первый и второй компоненты в количествах, соответствующих кодам $x_1 = 3/4$ и $x_2 = 1/4$.

Неполная кубическая модель

а) для $q=3$

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \beta_1 \tilde{x}_1 + \beta_2 \tilde{x}_2 + \beta_3 \tilde{x}_3 + \beta_{12} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + \beta_{13} \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 + \beta_{23} \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 + \beta_{123} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 \\ \beta_1 &= y_1, \beta_2 = y_2, \beta_3 = y_3 \\ \beta_{12} &= 4y_{12} - 2y_1 - 2y_2 \text{ и т. д. см. (2.31)} \\ \beta_{123} &= 27y_{123} - 12(y_{12} + y_{13} + y_{23}) + 3(y_1 + y_2 + y_3) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\hat{y}} \right\} (2.33)$$

б) в общем случае

$$\begin{aligned} \beta_i &= y_i \\ \beta_{ij} &= 4y_{ij} - 2y_i - 2y_j \\ \beta_{ijk} &= 27y_{ijk} - 12(y_{ij} + y_{ik} + y_{jk}) + 3(y_i + y_j + y_k) \\ & \quad i, j, k = 1, 2, 3, \dots, q; \quad i < j < k. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\beta_i} \right\} (2.34)$$

Мера оценки пригодности модели

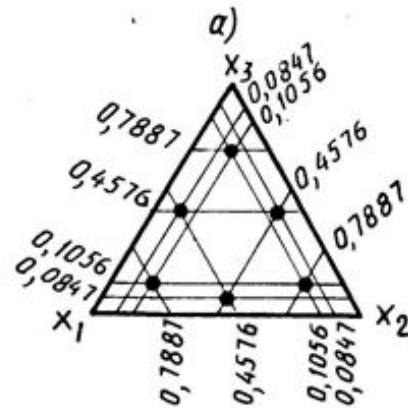
$$t = \frac{\Delta y \sqrt{r}}{S_y \cdot \sqrt{1 + \xi}} \quad \Delta y = |y_{\text{расч.}} - y_{\text{факт.}}|$$

- r – число повторных опытов в точках плана.
- ξ – численная характеристика, заданная на специальных диаграммах.
- S_y – средняя квадратичная ошибка эксперимента
- Уровень значимости критерия Стьюдента зависит от:
 - $f = N(2 - 1)$ и α/k – доверительная вероятность (k – количество проверяемых точек).

МСС-план

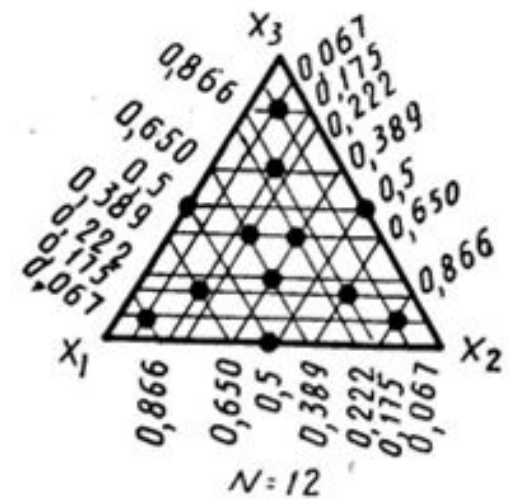
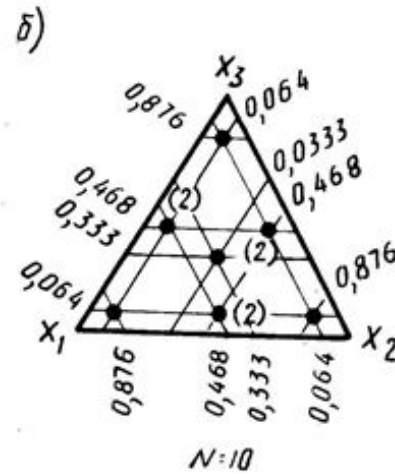
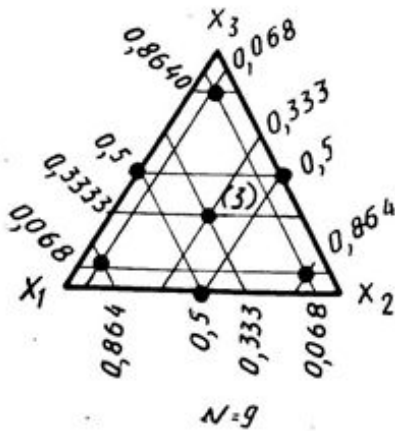
- Это планы, минимизирующие систематическое смещение.
- С точки зрения статистических свойств и, в частности, с позиций D-оптимальности все линейные МСС-планы, приведенные ниже, по существу, равноценны, и для практического использования может быть рекомендован, например, план с минимальным числом точек.

Экспериментальные точки МСС-планов



$Q=3$
 $n=1$ (a)

$n=2$ (б)



Статистические характеристики плана

Таблица 2.35.

Матрица линейного МСС-плана с шестью
опытами ($q = 3$)

\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3
0,7887	0,1056	0,1056	0,0847	0,4576	0,4576
0,1056	0,7887	0,1056	0,4576	0,0847	0,4576
0,1056	0,1056	0,7887	0,4576	0,4576	0,0847

Таблица 2.36.

Матрица МСС-плана второго порядка
с девятью опытами ($q = 3$)

\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3
0,068	0,068	0,864	0	0,500	0,500
0,068	0,864	0,068	0,333	0,333	0,333
0,864	0,068	0,068	0,333	0,333	0,333
0,500	0,500	0	0,333	0,333	0,333
0,500	0	0,500	0,333	0,333	0,333

Таблица 2.37.

Матрица МСС-плана второго порядка
с $N = 10$ ($q = 3$)

\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3
0,062	0,062	0,876	0,064	0,468	0,468
0,062	0,876	0,062	0,468	0,468	0,064
0,876	0,062	0,062	0,468	0,064	0,468
0,468	0,468	0,064	0,064	0,468	0,468
0,468	0,064	0,468	0,333	0,333	0,333

Таблица 2.38.

Матрица МСС-плана второго порядка
с $N = 12$ ($q = 3$)

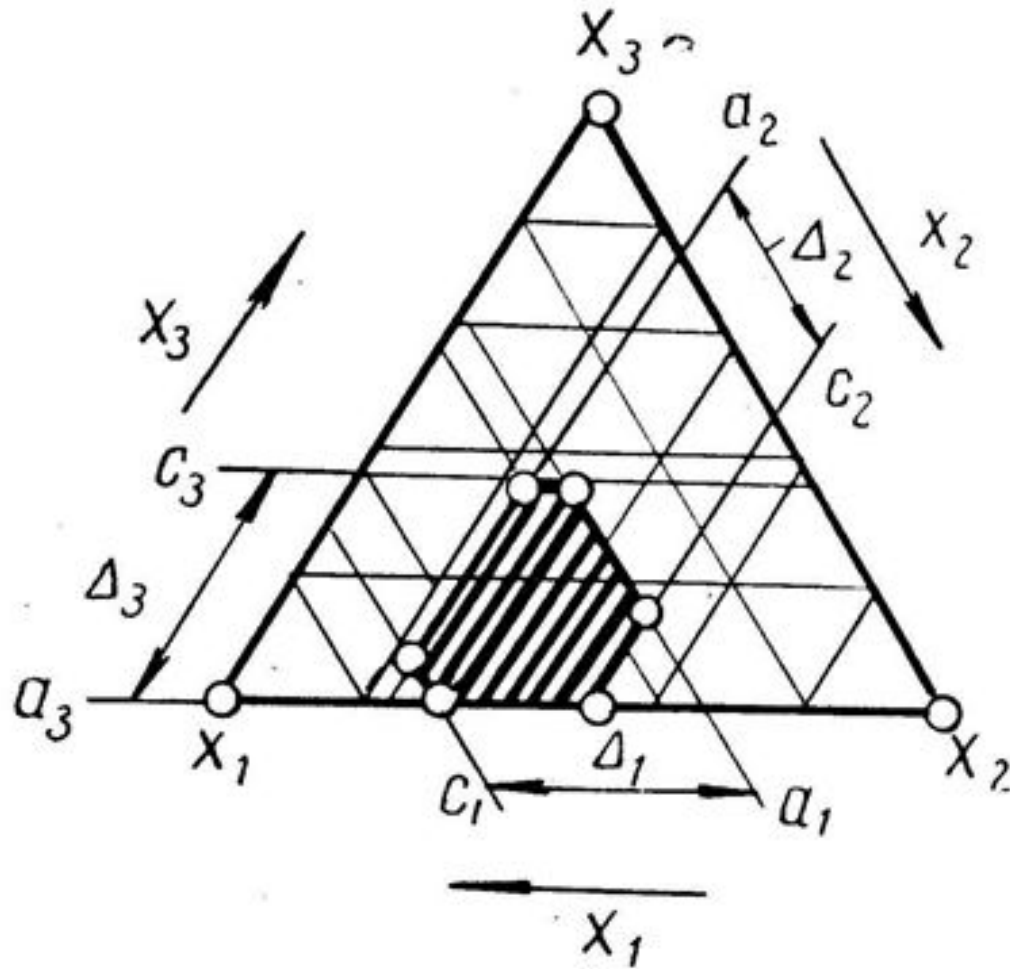
\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3
0,067	0,067	0,866	0,5	0,5	0
0,067	0,866	0,067	0,5	0	0,5
0,866	0,067	0,067	0	0,5	0,5
0,175	0,175	0,650	0,389	0,389	0,222
0,175	0,650	0,175	0,389	0,222	0,389
0,650	0,175	0,175	0,222	0,389	0,389

Статистические характеристики D -оптимальных и МСС-планов для линейных и квадратичных моделей на симплексе $q = 3$

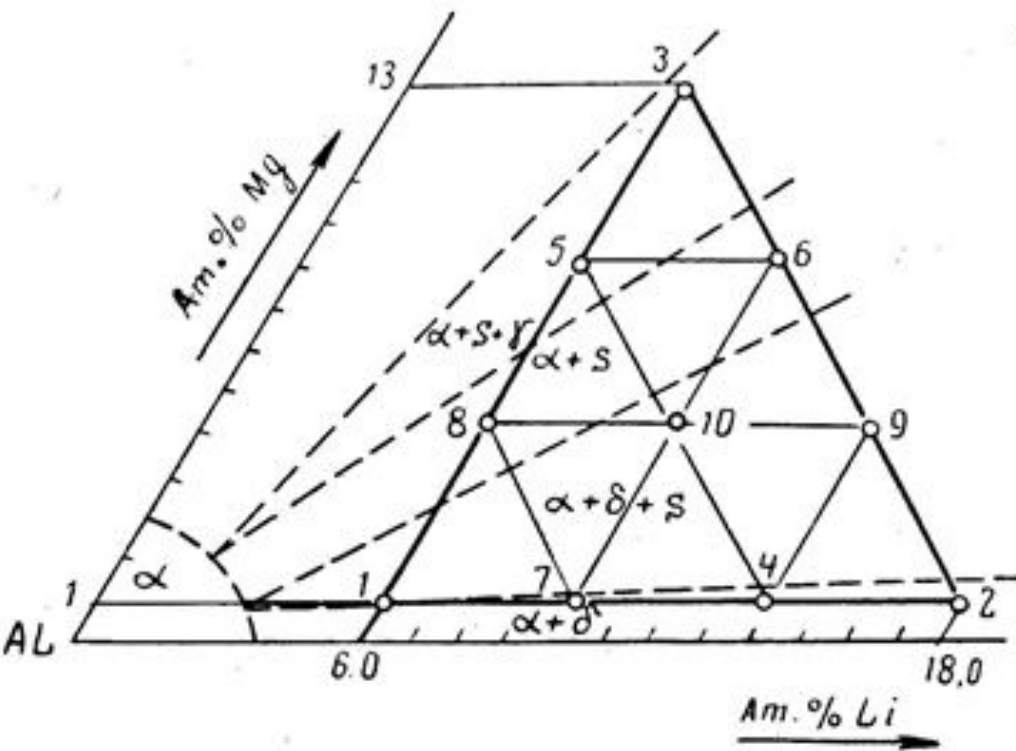
Модель	План	Число точек плана, N	Статистические характеристики плана		
			величина определителя инф. матрицы $ M $	$d_{\text{ср}}$	d_{max}
Линейная: $n = 1$	D -оптимальный	3	$0,37 \cdot 10^{-1}$	0,75	3,0
	МСС-план	6	$0,339 \cdot 10^{-2}$	1,33	7,6
Квадратичная: $n = 2$	D -оптимальный	6	$0,523 \cdot 10^{-8}$	1,90	6,0
	МСС-план	9	$0,109 \cdot 10^{-10}$	2,26	21,7
	МСС-план	10	$0,918 \cdot 10^{-9}$	2,30	23,3
	МСС-план	12	$0,788 \cdot 10^{-10}$	2,39	23,9

$d_{\text{ср}}$, d_{max} — средняя интегральная и максимальная дисперсии предсказываемого значения исследуемого свойства.

Общий случай расположения области



Пример плана для 1420



Исследовали механические свойства сплавов системы Al—Li—Mg—Zr в зависимости от содержания в них лития и магния при постоянном содержании циркония ($Zr = 0,13\%$) [25] для области концентраций, задаваемых пределами: Li = 6,0 и 18,0 ат. % , Mg = 1,0—13,0 ат. % ($\Sigma x = 100\%$).

План эксперимента и результаты

Таблица 2.42.
План эксперимента

№№ сплава	Матрица плана			Составы экспериментальных слитков (в атомн. %)		
	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	x_1	x_2	x_3
	1	1	0	0	93,0	6,0
2	0	1	0	81,0	18,0	1,0
3	0	0	1	81,0	6,0	13,0
4	1/3	2/3	0	85,0	14,0	1,0
5	1/3	0	2/3	85,0	6,0	9,0
6	0	1/3	2/3	81,0	10,0	9,0
7	2/3	1/3	0	89,0	10,0	1,0
8	2/3	0	1/3	89,0	6,0	5,0
9	0	2/3	1/3	81,0	14,0	5,0
10	1/3	1/3	1/3	85,0	10,0	5,0

Таблица 2.43.
Механические свойства экспериментальных сплавов

№№ сплава	$\bar{\sigma}_b, \frac{кг}{мм^2}$ после закалки и старения	$\bar{\delta}, \%$ после закалки и старения	$\overline{НВ}$ после закалки	$\overline{НВ}$ после закалки и старения	$\Delta \overline{НВ}$
1	22,9	15,2	52,1	54,7	2,6
2	31,4	1,4	87,7	143,2	55,6
3	43,9	1,05	112,8	170,4	57,6
4	40,3	3,8	82,1	134,6	52,5
5	48,6	5,9	98,5	138,4	39,9
6	49,5	3,9	129,0	169,0	40,0
7	46,2	5,3	71,8	123,2	51,4
8	37,4	15,2	77,1	107,0	29,9
9	44,6	0,8	119,2	164,4	45,2
10	53,4	5,1	101,9	150,2	48,3

Линии уровня

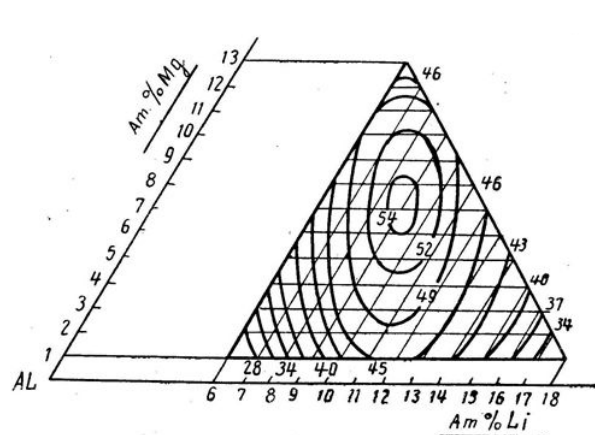


Рис. 2.29. Линии уровня для предела прочности сплавов системы Al—Li—Mg—Zr в закаленном и состаренном состоянии.

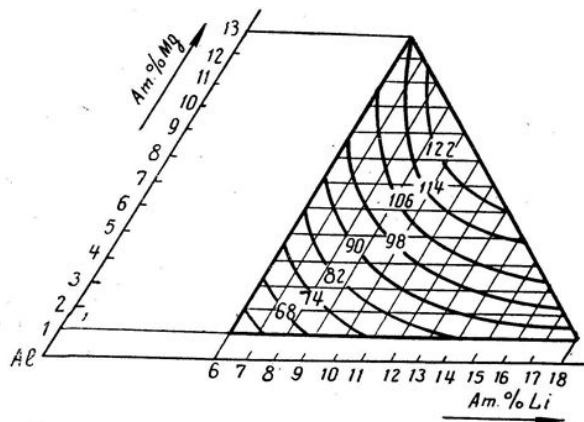


Рис. 2.31. Линии уровня для твердости сплавов системы Al—Li—Mg—Zr в состоянии после закалки.

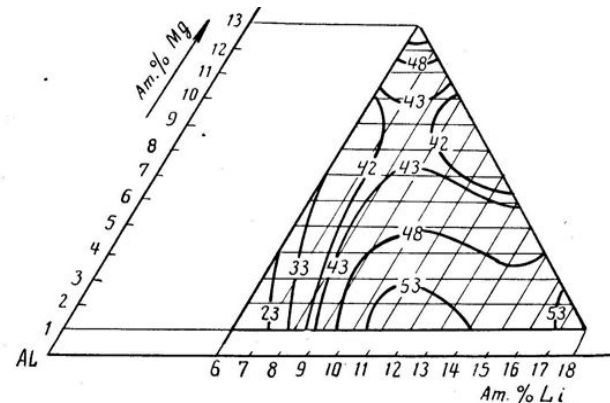


Рис. 2.33. Линии уровня для величины эффекта упрочнения (приращения твердости) при старении для сплавов системы Al—Li—Mg—Zr

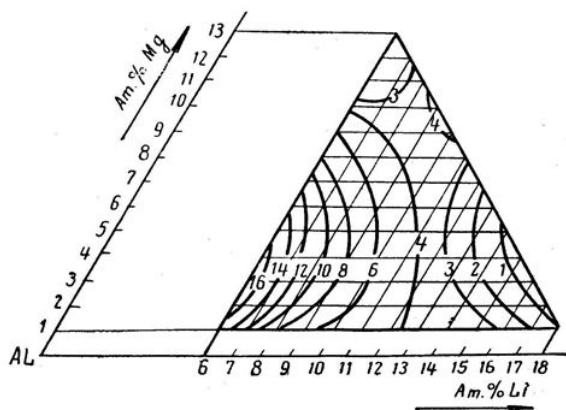


Рис. 2.30. Линии уровня для относительного удлинения сплавов системы Al—Li—Mg—Zr в закаленном и состаренном состоянии.

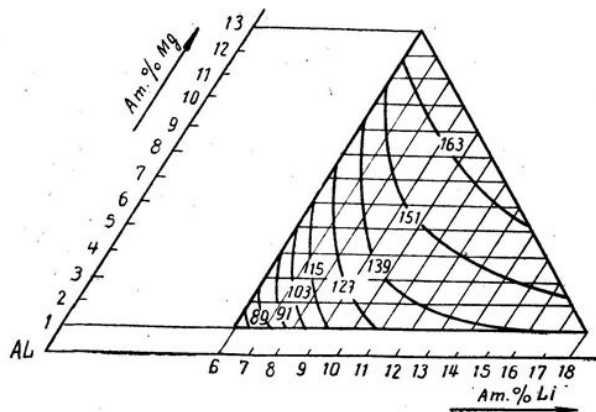


Рис. 2.32. Линии уровня для твердости сплавов системы Al—Li—Mg—Zr в закаленном и состаренном состоянии.

Уравнение регрессии

$$\hat{y} = \beta_1 \tilde{x}_1 + \beta_2 \tilde{x}_2 + \beta_3 \tilde{x}_3 + \beta_{12} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + \beta_{13} \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 + \beta_{23} \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 + \\ + \gamma_{12} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + \gamma_{13} \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_3) + \gamma_{23} \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3) + \beta_{123} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3.$$

Коэффициенты моделей свойств

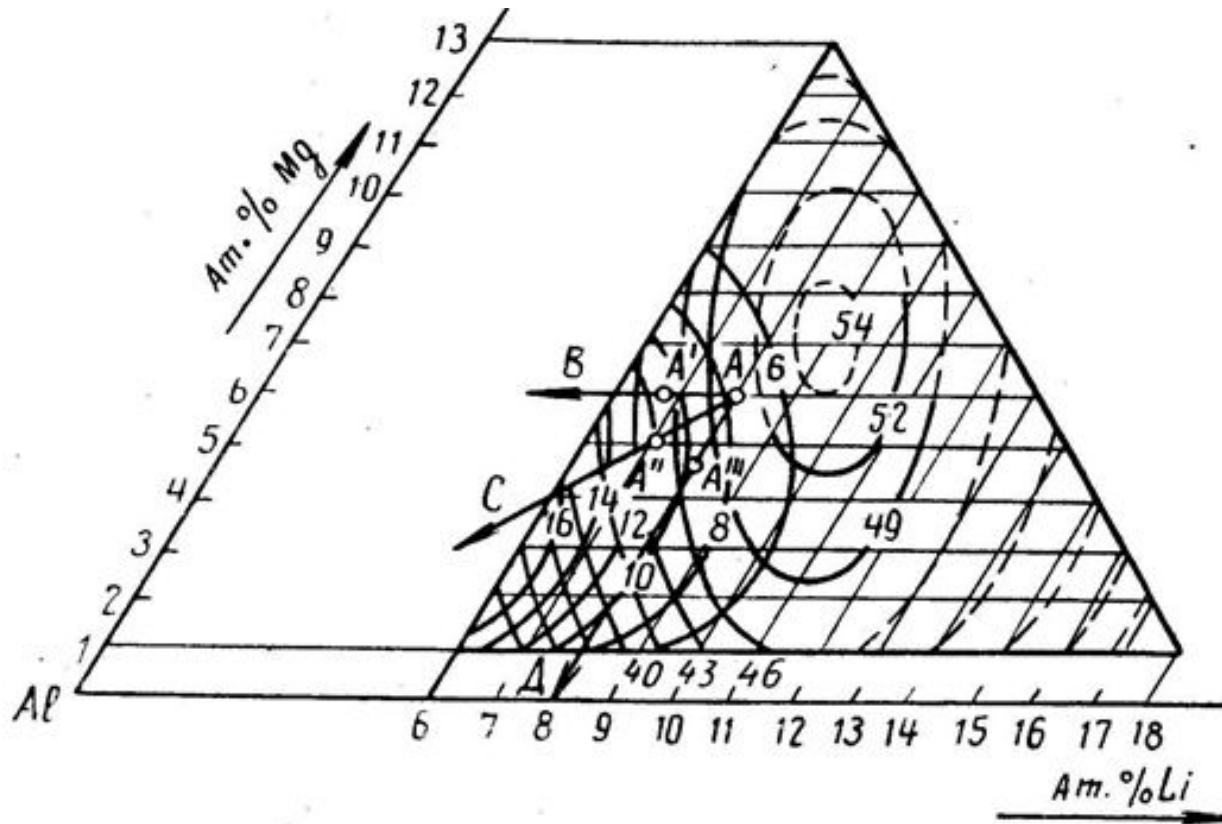
Таблица 2.44.

Свойство сплава	Значения коэффициентов									
	β_1	β_2	β_3	β_{12}	β_{13}	β_{23}	γ_{12}	γ_{13}	γ_{23}	β_{23}
σ_b	22,9	31,4	43,9	72,4	43,2	42,3	59,0	-28,4	-5,0	84,2
δ	15,2	1,4	1,05	-16,8	10,9	5,0	-21,0	30,9	-21,6	-18,4
$HВ(z)$	52,1	87,7	112,4	31,7	24,1	107,3	10,6	-7,9	-9,7	-11,5
$HВ(z + c)$	54,7	143,2	170,4	134,8	45,7	44,6	122,2	48,4	30,2	65,7
$\Delta HВ$	2,6	55,5	57,6	103,0	21,6	-62,8	111,6	56,2	39,8	77,2

Выводы:

- После проверки адекватности модели установлено.
- Характер изменения твердости в закаленном и состаренном состояниях примерно одинаков, однако полной аналогии здесь не наблюдается: поверхность для $HV(z)$ является более монотонной и симметричной, чем для $HV(z+c)$.
- В результате поверхность ΔHV , характеризующая эффект упрочнения при старении, оказывается достаточно сложной, и на поле исследованной области выделяются три отдельные области с максимальным эффектом упрочнения. Две из этих областей расположены в углах с максимальным содержанием соответственно лития и магния; третья — находится в области минимального содержания Mg и некоторого «среднего» содержания Li.

Рекомендации по корректировке состава сплава



Направления
корректировки
состава сплава
01420
обозначены
векторами AB ,
 AC и AD , и
выделенные
составы
соответствуют
точкам A' , A'' , A''' .