

**ЛЕКЦІЯ 9.**  
**Засоби розв'язання задач**  
**оптимізації**

# План лекції:

1. Основні поняття оптимізації
2. Параметри та фактори оптимізації технологічного процесу
3. Оцінка погрешностей при вимірах і обчисленнях
4. Елементи математичного планування експерименту

## Розділи планування експерименту

```
graph TD; A[Розділи планування експерименту] --> B[Планування експерименту для вивчення механізму складних процесів]; A --> C[Планування експерименту для оптимізації технологічних процесів і властивостей багатокomпонентних систем];
```

Планування експерименту для вивчення механізму складних процесів

Планування експерименту для оптимізації технологічних процесів і властивостей багатокomпонентних систем

**Планування експерименту** – це вибір числа дослідів і умов їх проведення, необхідних і достатніх для розв'язання поставленого завдання з необхідною точністю.

Експеримент, що ставиться для розв'язання задач оптимізації, називається **екстремальним експериментом**.

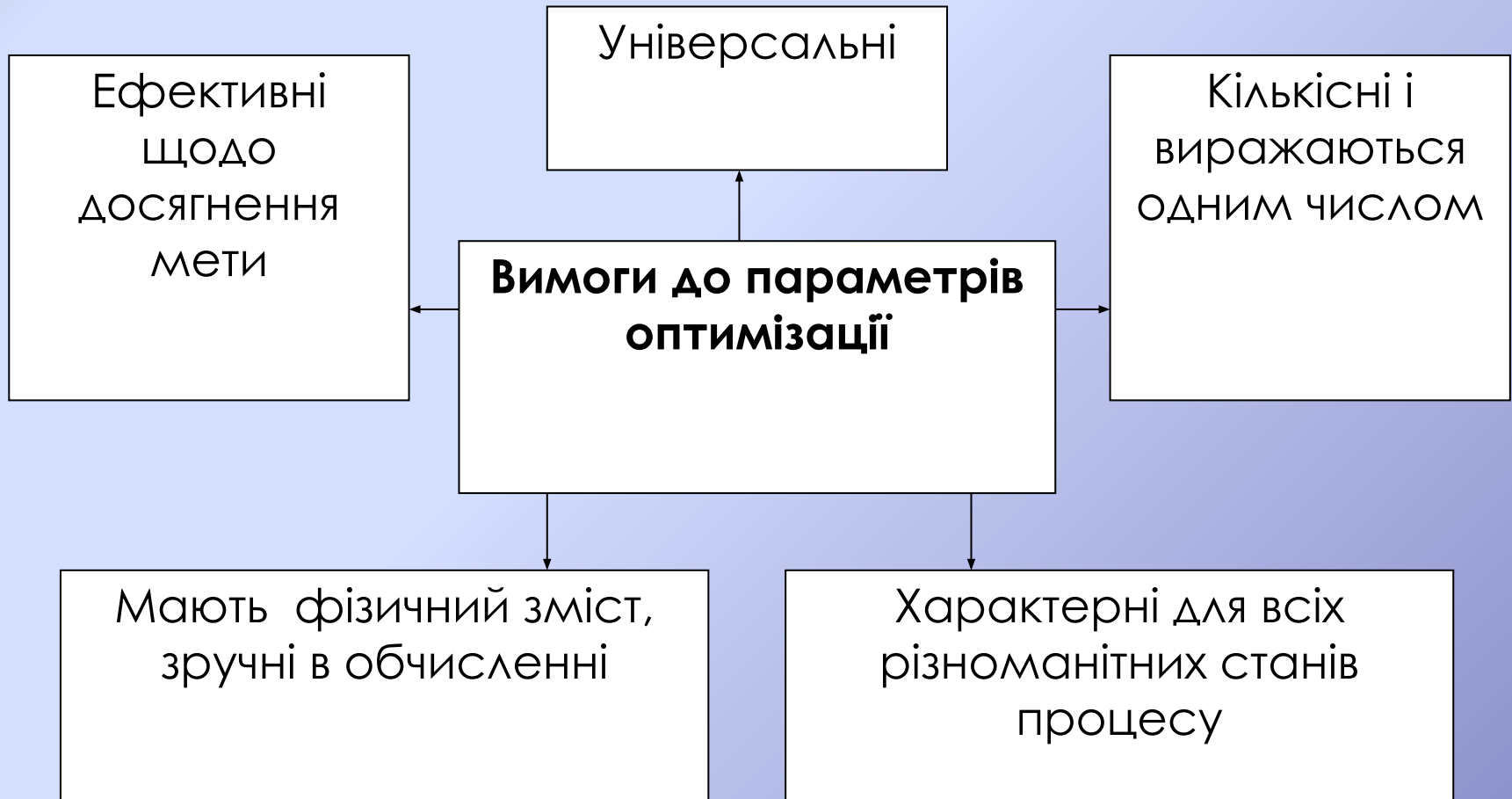
Під час планування експерименту об'єкта дослідження слід дотримуватися таких двох умов:

- результати експерименту повинні бути відтворюваними;
- об'єкт повинен бути керованим.

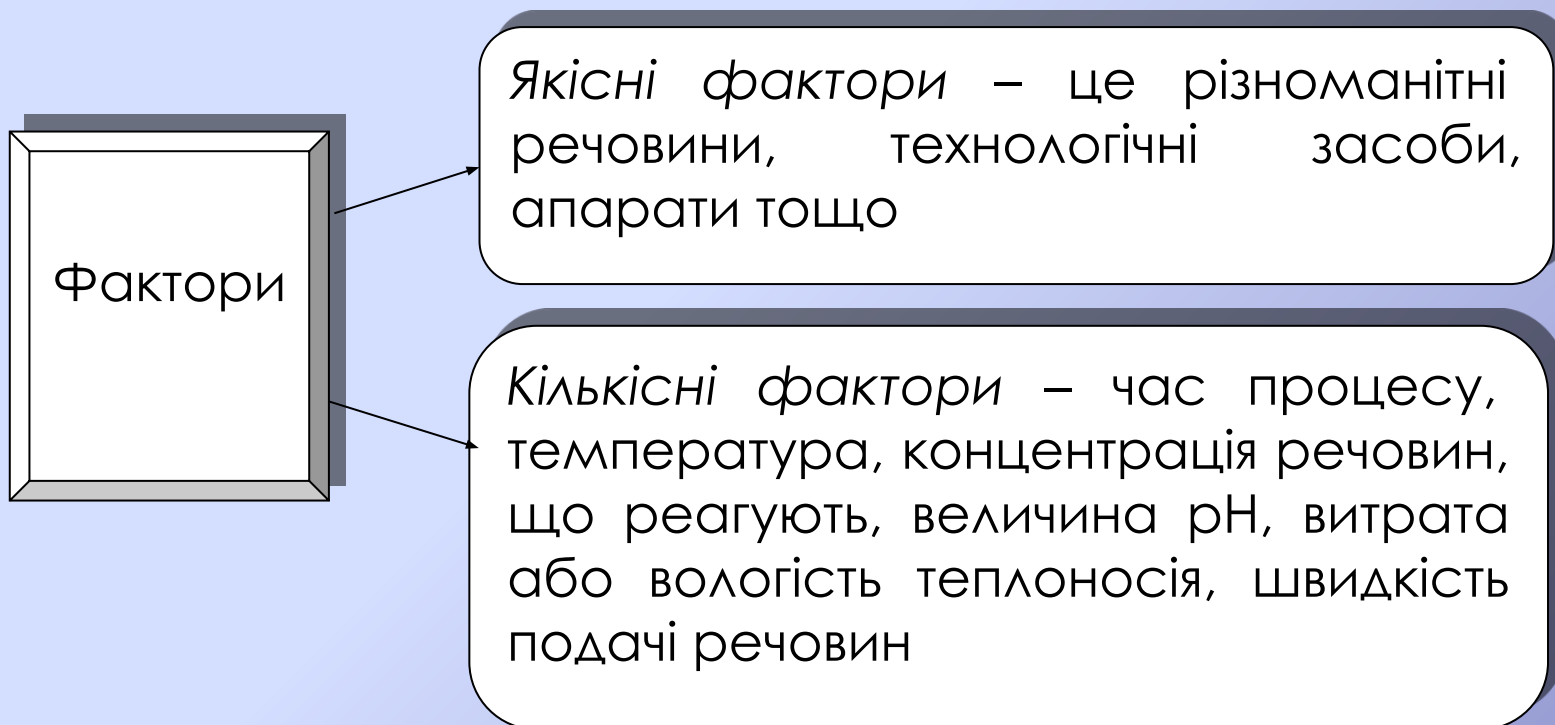
Якщо експеримент зводиться до одержання результатів спостереження за поведінням системи при випадкових (стохастичних) змінах вхідних параметрів, він називається **пасивним**.

Якщо ж під час проведення експерименту вхідні параметри змінюються за заздалегідь складеним планом, що залежить від бажання експериментатора, то він називається **активним**. Об'єкт, на якому можливе проведення активного експерименту, називається **керованим**.

# **Параметр оптимізації** – показник процесу, за яким буде проводитися оптимізація



# Фактори оптимізації – це змінні величини, що відповідають засобам впливу зовнішнього середовища на об'єкт



1

Фактори повинні бути керованими, що означає можливість їх одночасного запровадження на обраних рівнях і підтримки цих значень протягом дослідю

2

Фактори повинні бути однозначними і безпосередньо впливати на об'єкт дослідження. У плануванні експерименту можуть брати участь складні фактори, такі як логарифми концентрацій, співвідношення між компонентами та ін.

3

Точність виміру факторів повинна бути найбільш високою, але з урахуванням поставленого завдання. Наприклад, якщо вивчається процес, що триває десять годин, немає необхідності враховувати секунди. Під час реакцій, що тривають хвилини, варто підрахувати і секунди

**Виміром** називають розрахунок значення величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних засобів та вимірів

Метою виміру є розрахунок істинного значення вимірюваної величини. Ця задача є складною, тому що будь-який вимір завжди містить погрішність. Тому замість точного значення вдається знайти лише **інтервал**, що називають **довірчим**, усередині якого з деякою вірогідністю або імовірністю знаходиться істинне значення вимірюваної величини. Задачею експериментатора є визначення довірчого інтервалу на підставі розрахунку погрішностей, з якими проводилися виміри.



**Абсолютною погрішністю** даного виміру називається різниця між фактичним значенням вимірюваної величини і результатом даного виміру. Нехай  $A_0$  – фактичне значення величини й  $A_1$  – результат даного виміру, тоді абсолютна погрішність цього виміру:

$$\Delta A_1 = A_0 - A_1$$

**Відносною погрішністю** виміру величини  $L$  називають відношення абсолютної погрішності цієї величини до її значення.

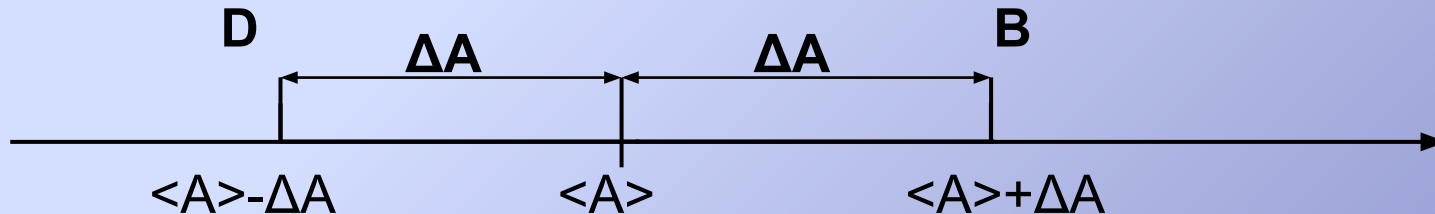
$$\delta_L = \frac{\Delta A_1}{A_0}$$

Відносна погрішність – величина безрозмірна і звичайно виражається у відсотках.

Середнє значення вимірюваної величини визначають за формулою:

$$\langle A \rangle = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{n}$$

Довірчим інтервалом називається інтервал, у який з обраної (заданої) надійністю знаходиться істинне значення вимірюваної величини. Ширина довірчого інтервалу дорівнює  $2\Delta A$ , а абсолютна погрішність  $\Delta A$  складає половину ширини довірчого інтервалу, або, як говорять, абсолютна погрішність дорівнює напівширині довірчого інтервалу.



Таким чином, при вимірах важливий не тільки результат, але й оцінка інтервалу, у якому з відомою імовірністю знаходиться істинне значення вимірюваної величини.

Інструментальна (приладова) помилка визначається на основі паспортних даних приладу, його класу точності, ціни розподілу. Найбільша величина помилки приладу може бути визначена за його класом точності.

**Клас точності приладу  $k$**  – це його відносна помилка (так називана приведена помилка), виражена у відсотках, і рівна відношенню абсолютної помилки приладу  $\Delta A_{pr}$  до максимального значення величини  $A_{max}$ , що може бути обмірювана даним приладом тобто:

$$k = \frac{\Delta A_{pr} \cdot 100}{A_{max}}$$

# Визначення абсолютної випадкової похибки виміру

1. Знайти абсолютні похибки окремих вимірів. Абсолютні похибки окремих вимірів знаходять як різницю між середнім арифметичним і результатом даного виміру:

$$\Delta A_n = \langle A \rangle - A_n$$

де  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – результати вимірів.

Тобто, абсолютна похибка  $i$ -го виміру визначається за формулою:

$$\Delta A_i = \langle A \rangle - A_i$$

2. Розрахують середньоквадратичне відхилення середнього арифметичного (стандартну помилку) за формулою:

$$S_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n A_i^2}{n \cdot (n-1)}}$$

Таким чином, абсолютна випадкова похибка прямого виміру обчислюється за формулою:

$$\Delta A_{сл} = t_s \cdot S_A$$

Повна абсолютна похибка прямого виміру (напівширина довірчого інтервалу), що враховує як приладову, так і випадкову похибки визначається за формулою:

$$\Delta A = \sqrt{(t_s \cdot S_A)^2 + \Delta A_{np}^2}$$

**Відносною похибкою** виміру називають відношення абсолютної похибки до середнього арифметичного значення вимірюваної величини:

$$\delta_A = \frac{\Delta A}{\langle A \rangle} \cdot 100\%$$

Результат виміру прийнятий записувати в такий спосіб

$$\Delta A_i = (\langle A \rangle \pm \Delta A \text{ од.вим.}; P = \dots; \delta = \dots$$

# Елементи математичного планування експерименту

**Планування експерименту** – розділ математичної статистики, що вивчає раціональну організацію вимірів, підданих випадковим помилкам.

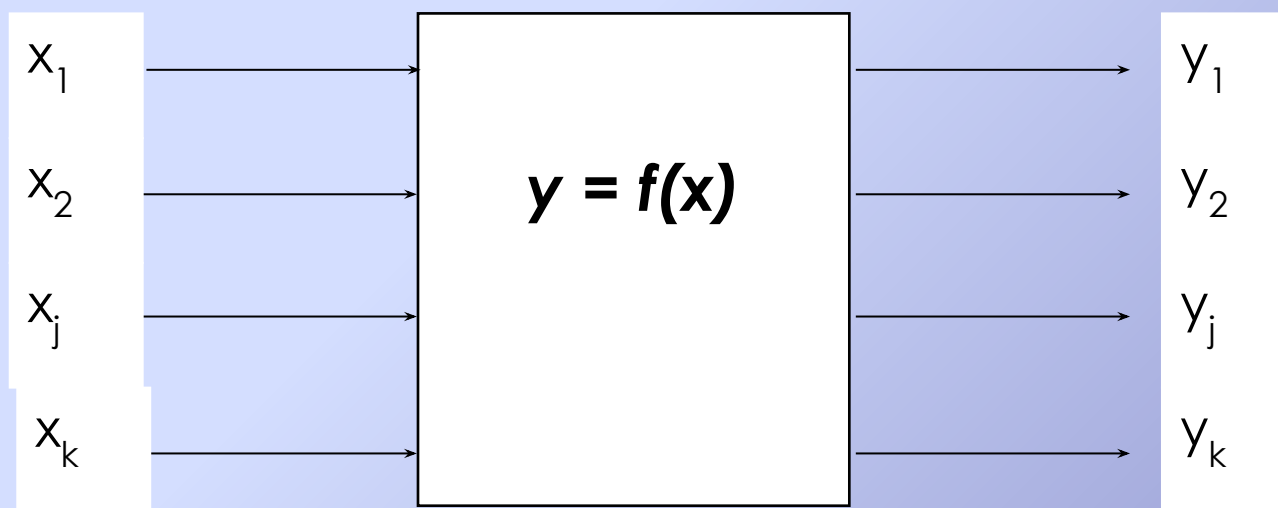
**Експеримент** – вивчення залежності цільової функції (або функції відгуку) у від декількох факторів  $x_1 \dots x_n$ .

## **Мета планування експерименту:**

- теоретична: вивчення характеру залежності, ступінь впливу різних факторів на цільову функцію, прогнозування значення цільової функції при визначених значеннях факторів.
- практична: пошук оптимальних умов (набору значень факторів), при яких цільова функція досягає екстремуму (мінімуму або максимуму). наприклад: пошук умов виміру, щоб погрішність була мінімальна. або: оптимізація умов хроматографічного поділу для досягнення максимальних піків.

Експеримент може безпосередньо проводитись на об'єкті чи на його моделі. Останнім часом поряд з фізичними моделями все більш поширеними стають абстрактні математичні моделі.

Для опису поняття «об'єкт дослідження» можна використовувати уявлення про кібернетичну систему, яка схематично зображена



Кількість дослідів при повному факторному експерименті при варіюванні кожного фактора на 2-х рівнях підраховується за формулою:

$$N = 2^n$$

де  $N$  – кількість дослідів,  
 $n$  – кількість факторів.

### Матриця планування

| Номер дослідів, $n$ | Перемінні |       | Функція відгуку, $Y_n$ |
|---------------------|-----------|-------|------------------------|
|                     | $x_1$     | $x_2$ |                        |
| 1                   | -1        | -1    | $Y_n$                  |
| 2                   | +1        | -1    | $Y_n$                  |
| 3                   | -1        | +1    | $Y_n$                  |
| 4                   | +1        | +1    | $Y_n$                  |

В плануванні експерименту використовуються кодовані значення факторів (+1) і (-1) (часто одиниця опускається). Задавши нульову точку  $C_{i0}$  і величину інтервалу варіювання  $\lambda_i$ , значення факторів в натуральній розмірності можна розрахувати за таким залежностями:

$$C_i^+ = C_{i0} + \lambda_i$$

$$C_i^- = C_{i0} - \lambda_i$$

У відповідності з рівнянням при переході від натуральних змінних до кодованих отримаємо для обох факторів на верхньому рівні:

$$x_1^+ = \frac{C_1^+ - C_{10}}{C_1^+ - C_{10}} = +1 \quad x_1^+ = \frac{C_2^+ - C_{20}}{C_2^+ - C_{20}} = +1$$

а на нижньому рівні:

$$x_1^- = \frac{C_1^- - C_{10}}{C_{10} - C_1^-} = -1 \quad x_2^- = \frac{C_2^- - C_{20}}{C_{20} - C_2^-} = -1$$

За наступними формулами визначаємо коефіцієнти рівняння:

$$\beta_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \quad \beta_2 = \frac{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4}{4}$$

$$\beta_1 = \frac{-y_1 + y_2 - y_3 + y_4}{4} \quad \beta_{12} = \frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{4}$$

рівняння регресії, що отримане в результаті ПФЕ  $2^2$ , повинно бути записано в наступному вигляді:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$$



## Задача 1.

Потрібно визначити оптимальний склад суміші, критерій оптимальності – її мінімальна вартість.

Для складання суміші біологічно активної добавки використовують два продукти – М і N. Необхідно, щоб біологічно активна добавка несла в собі не менше 200 ккалорій, причому споживана при цьому кількість жиру не повинна перевищувати 14 одиниць.

Підраховано, що в 1 кг кожного продукту міститься: у продукті М – 150 ккалорій і 14 одиниць жиру; у продукті N – 200 ккалорій і 4 одиниці жиру.

Розробити максимально дешеву біологічно активну добавку, що відповідає цим умовам, якщо вартість 1 кг продукту М складає 1,5 грн, а 1 кг продукту N – 2,3 грн.

### **Рішення.**

Складемо економіко-математичну модель:  $x_1$  – кількість продукту М в раціоні;  
 $x_2$  – кількість продукту N в раціоні.

Обмеження по кількості ккалорій:  $150x_1 + 200x_2 \geq 200$

Обмеження по кількості жиру:  $14x_1 + 4x_2 \leq 14$

Позитивність змінних:  $x_1 \geq 0$ ;  $x_2 \geq 0$

Цільова функція – мінімум вартості біологічно активної добавки:  
 $1,5x_1 + 2,3x_2 \rightarrow \min$