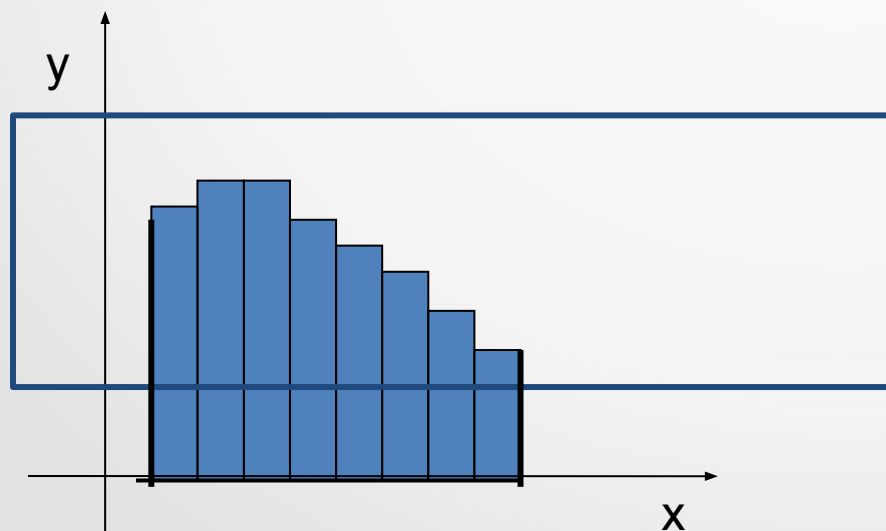


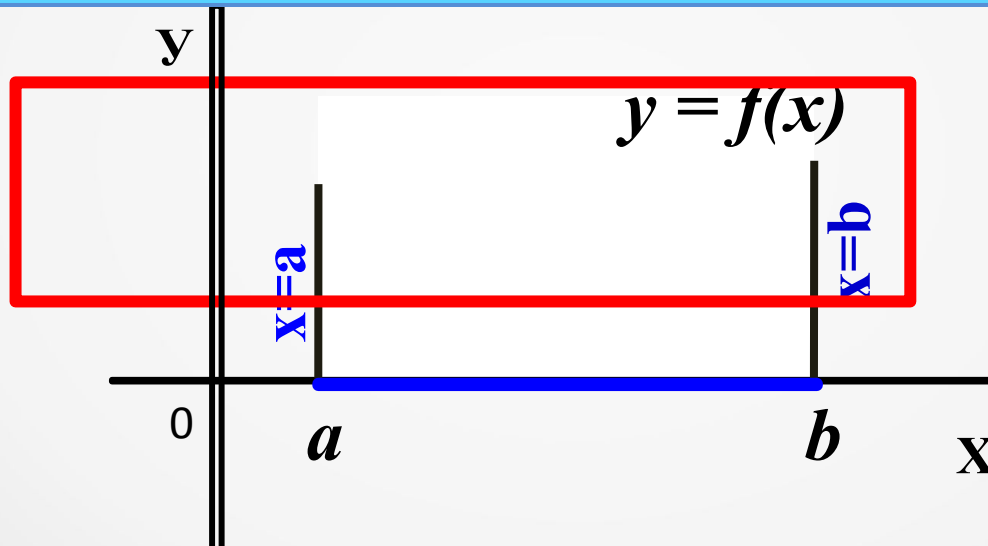
Площадь криволинейной трапеции и интеграл.



▫ Найти первообразную функции:

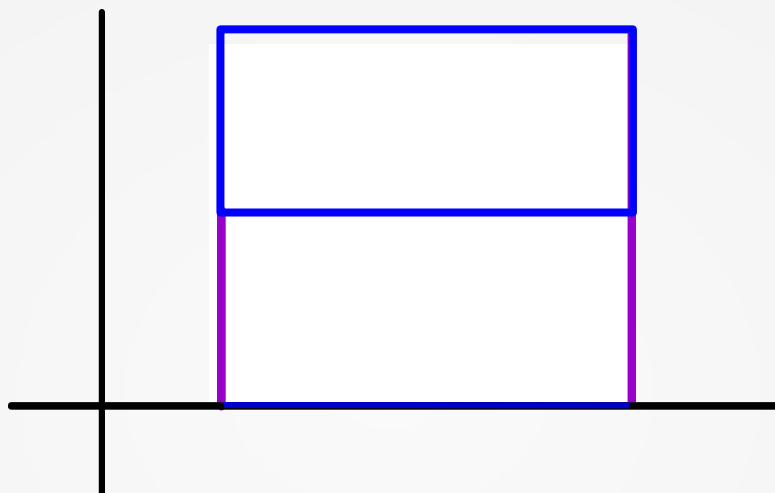
Криволинейная трапеция

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке $[a;b]$ знака функции $f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;b]$.



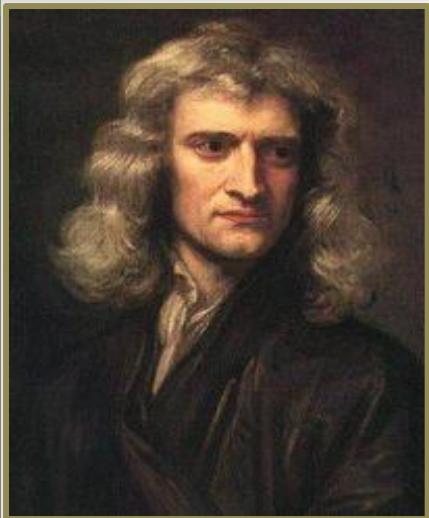
Отрезок $[a;b]$ называют *основанием* этой криволинейной трапеции

Площадь криволинейной трапеции.



где $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$.

Формула Ньютона-Лейбница

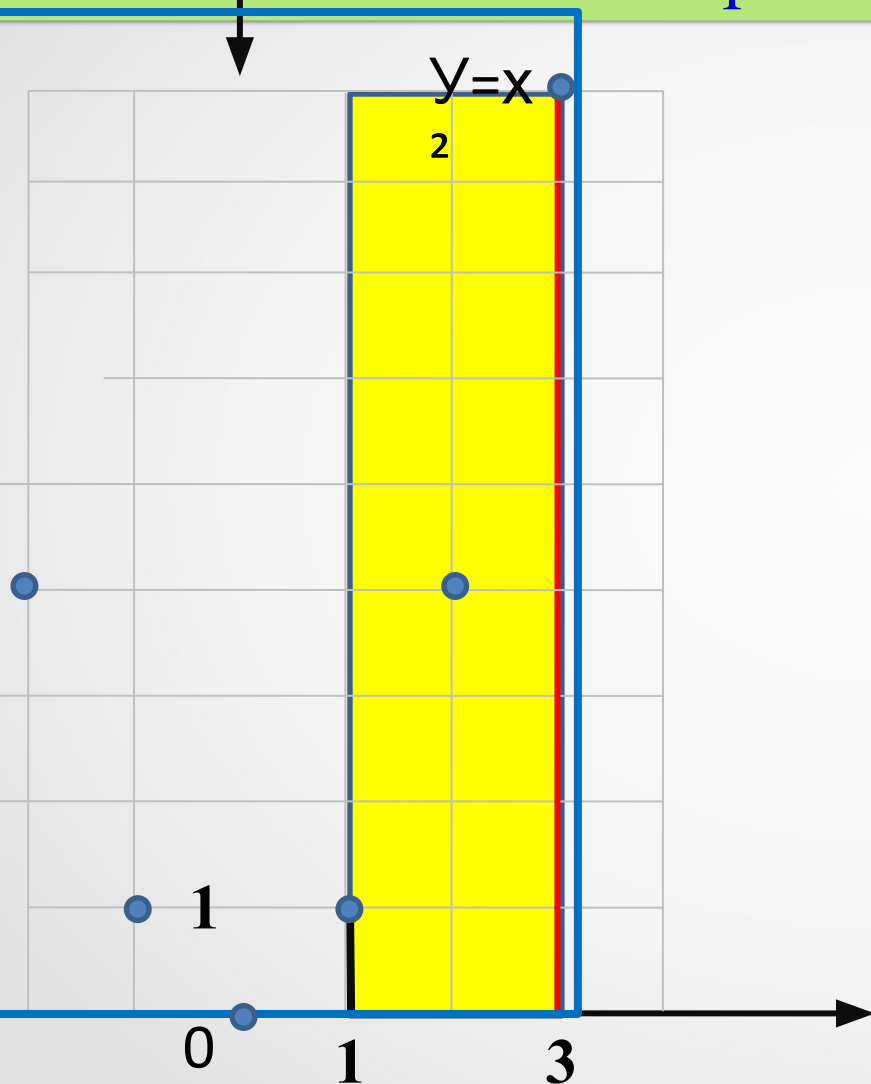


1643—1727



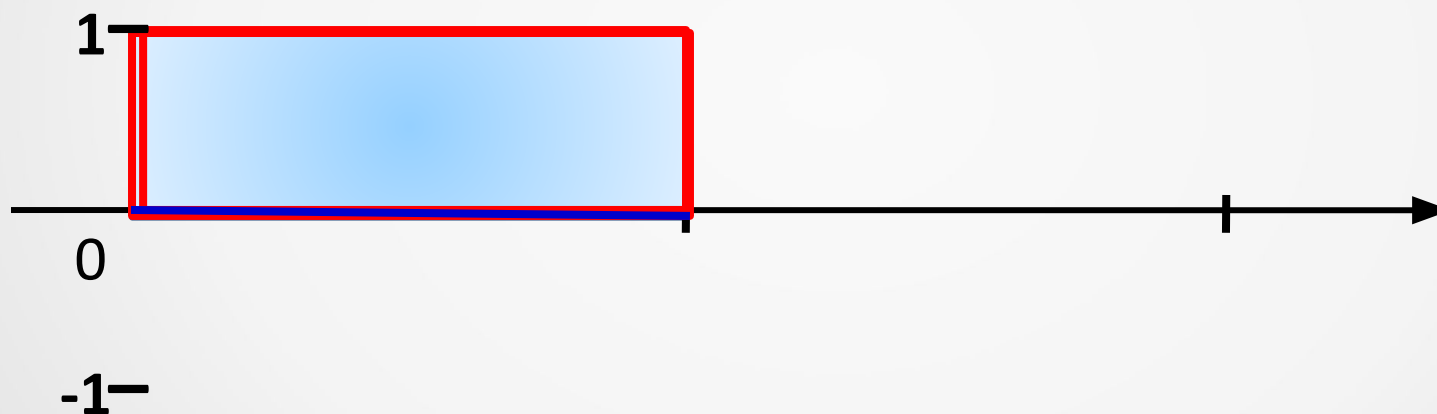
1646—1716

Найти площадь криволинейной трапеции,
изображенной на рисунке



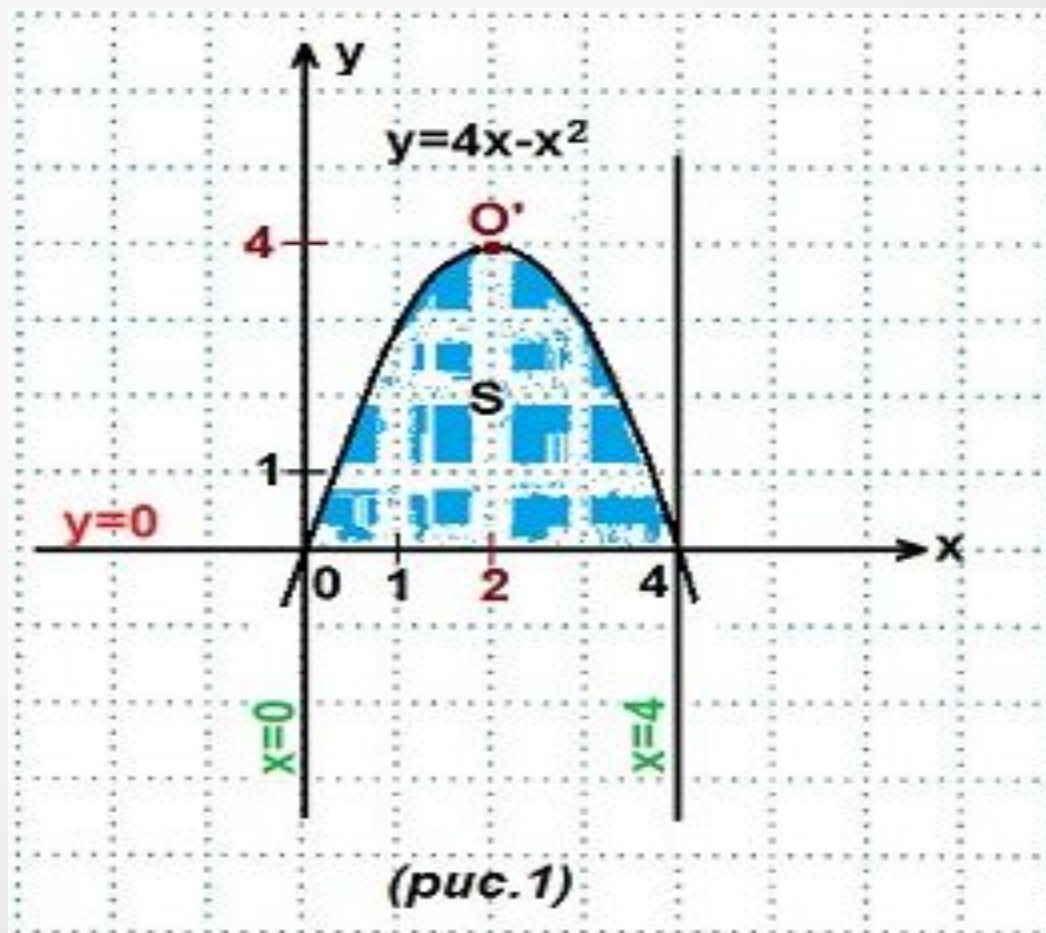
Найти площадь криволинейной трапеции,
изображенной на рисунке

$$y = \sin x$$



градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0
ctg x	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	0	—

Найти площадь криволинейной трапеции,
ограниченной линиями: $y=4x-x^2$; $y=0$; $x=0$; $x=4$.



Решение. Строим графики данных линий.

1) $y=4x-x^2$ — парабола (вида $y=ax^2+bx+c$). Запишем данное уравнение в общем виде: $y=-x^2+4x$. Ветви этой параболы направлены вниз, так как первый коэффициент $a=-1<0$.

Вершина параболы находится в точке $O'(m; n)$, где

$O'(2; 4)$. Нули функции (точки пересечения графика с осью Ox) найдем из уравнения: $4x-x^2=0$.

Выносим x за скобки, получаем: $x(4-x)=0$. Отсюда, $x=0$ или $x=4$.

Абсциссы точек найдены, ордината равна нулю — искомые точки: $(0; 0)$ и $(4; 0)$.

2) $y=0$ — это ось Ox ;

3) $x=0$ — это ось Oy ;

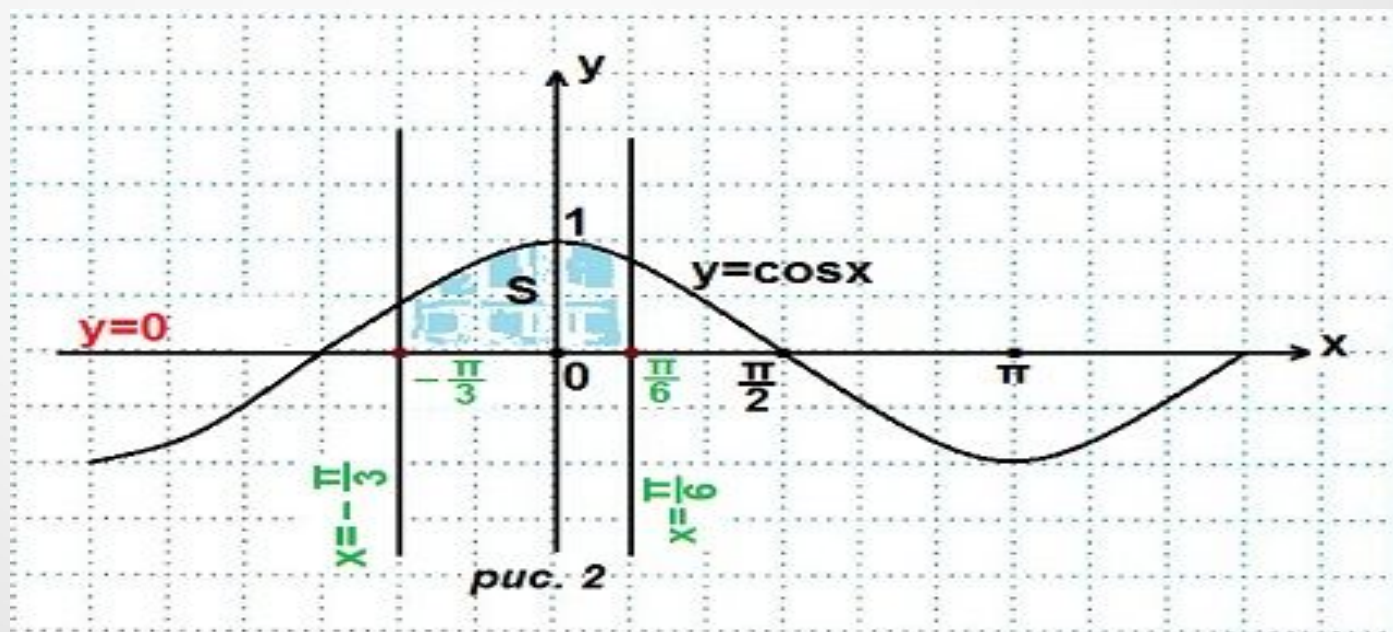
4) $x=4$ — прямая, параллельная оси Oy и отстоящая от нее на 4 единичных отрезка вправо.

Площадь построенной криволинейной трапеции находим по (ф. Н-Л).

У нас $f(x)=4x-x^2$, $a=0$, $b=4$.

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$$y = \cos x; y = 0; x = -\frac{\pi}{3}; x = \frac{\pi}{6}.$$



Решение:

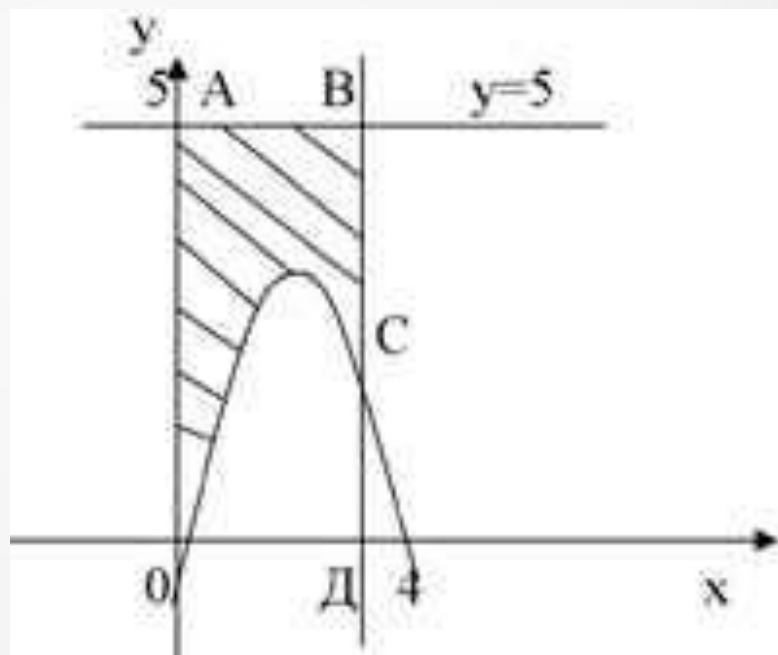
$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

Ответ: $S = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ (кв. ед.)

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 4x - x^2, y = 5, x = 3$$

$$X_0 = 2, Y_0 = 4$$



$$S_{\phi} = S(OABD) - S(OCД)$$

$$S_{\text{прям.}} = a \cdot b = 5 \cdot 3 = 15$$

$$S(OCД) = F(3) - F(0),$$

где $F(x)$ первообразная для функции

$$f(x) = 4x - x^2$$

$$F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} \quad ; \quad S_{OCД} = 2 \cdot 3^2 - \frac{8}{3} = 9$$

$$S_{\phi} = 15 - 9 = 6.$$