МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Индуктивное умозаключение — метод рассуждения от частного к общему.

Метод доказательства, при котором проверяется утверждение для конечного числа случаев, исчерпывающих все возможности, называют **полной индукцией.**

Этот метод применим сравнительно редко, поскольку математические утверждения касаются, как правило, не конечных, а бесконечных множеств объектов.

- Например, утверждение: «Каждое двузначное чётное число является суммой двух простых чисел» – следует из серии равенств, которые вполне реально установить:
- 10=5+5   12=5+7   14=7+7   16=5+11
- 92=3+89   94=5+89   96=7+89   98=19+79.
- НО утверждение о четных двузначных числах является лишь частным случаем теоремы: «Любое четное число является суммой двух простых чисел».
- Эта теорема до сих пор ни доказана, ни опровергнута.
- **Проблема Гольдбаха** (*гипотеза Гольдбаха, проблема Эйлера, бинарная проблема Гольдбаха*) — одна из классических аддитивных проблем в теории чисел.

Способ доказательства методом математической индукции заключается в следующем:

1) база индукции:
доказывают или непосредственно проверяют справедливость утверждения для n=1 (иногда n=0 или $n=n_0$);
2) индукционный шаг (переход):
предполагают справедливость утверждения для некоторого натурального n=k
и, исходя из этого предположения, доказывают справедливость утверждения для n=k+1.

Доказать , что при любом натуральном n число $3^{2n+1}+2^{n+2}$ делится на 7.

Обозначим $A(n)=3^{2n+1}+2^{n+2}$.

База индукции. Если n=1, то $A(1)=3^3+2^3=35$ и, очевидно, делится на 7.

Предположение индукции. Пусть A(k) делится на 7.

Индукционный переход. Докажем, что A(k+1) делится на 7, то есть справедливость утверждения задачи при n=k.

$$A(k+1)=3^{2(k+1)+1}+2^{(k+1)+2}=3^{2k+1}\cdot 3^2+2^{k+2}\cdot 2^1=3^{2k+1}\cdot 9+2^{k+2}\cdot 2=$$
$$=3^{2k+1}\cdot 9+2^{k+2}\cdot(9-7)=(3^{2k+1}+2^{k+2})\cdot 9-7\cdot 2^{k+2}=9\cdot A(k)-7\cdot 2^{k+2}.$$

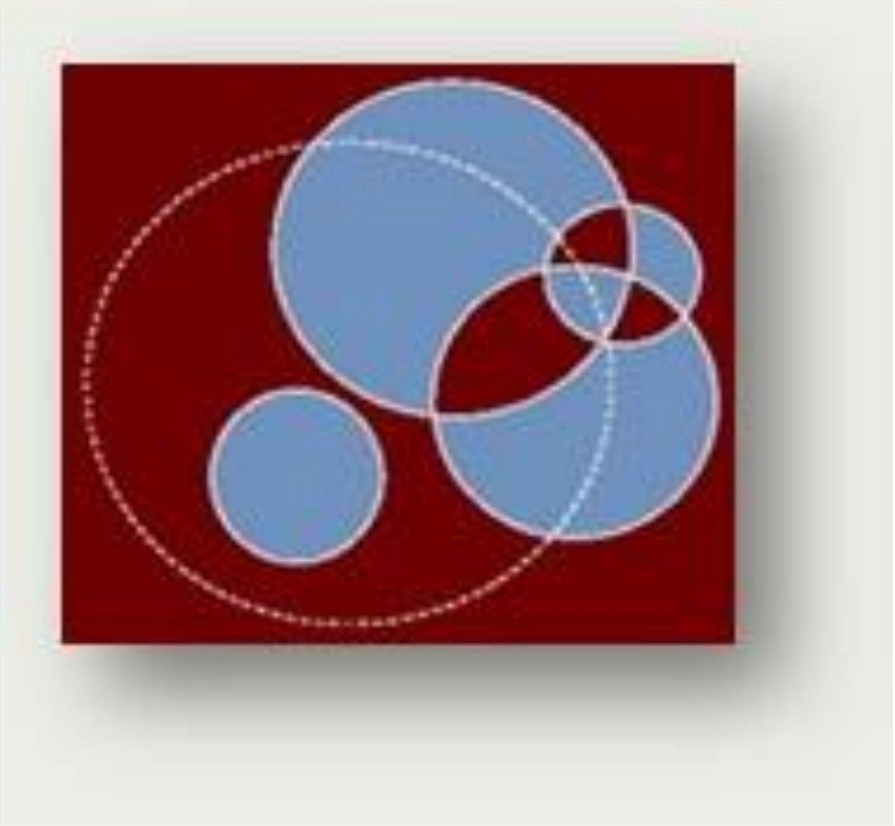
Последнее число делится на 7, так как представляет собой разность двух целых чисел, делящихся на 7.

Следовательно, $3^{2n+1}+2^{n+2}$ делится на 7 при любом натуральном n.

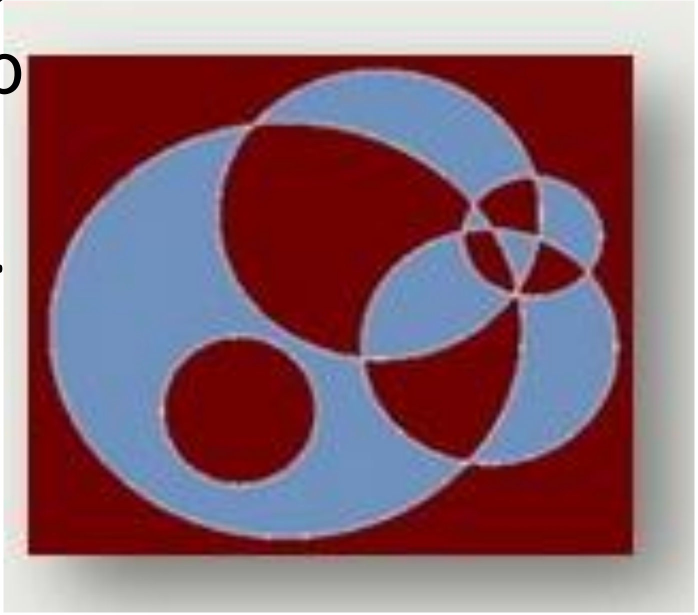
На плоскости дано n окружностей. Доказать, что при любом расположении этих окружностей образуемую ими карту можно правильно раскрасить двумя красками.

При n=1 утверждение очевидно.

Предположим, что утверждение справедливо для любой карты, образованной n окружностями, и пусть на плоскости задано n+1 окружностей.
Удалив одну из этих окружностей, мы получим карту, которую в силу сделанного предположения можно правильно раскрасить двумя красками

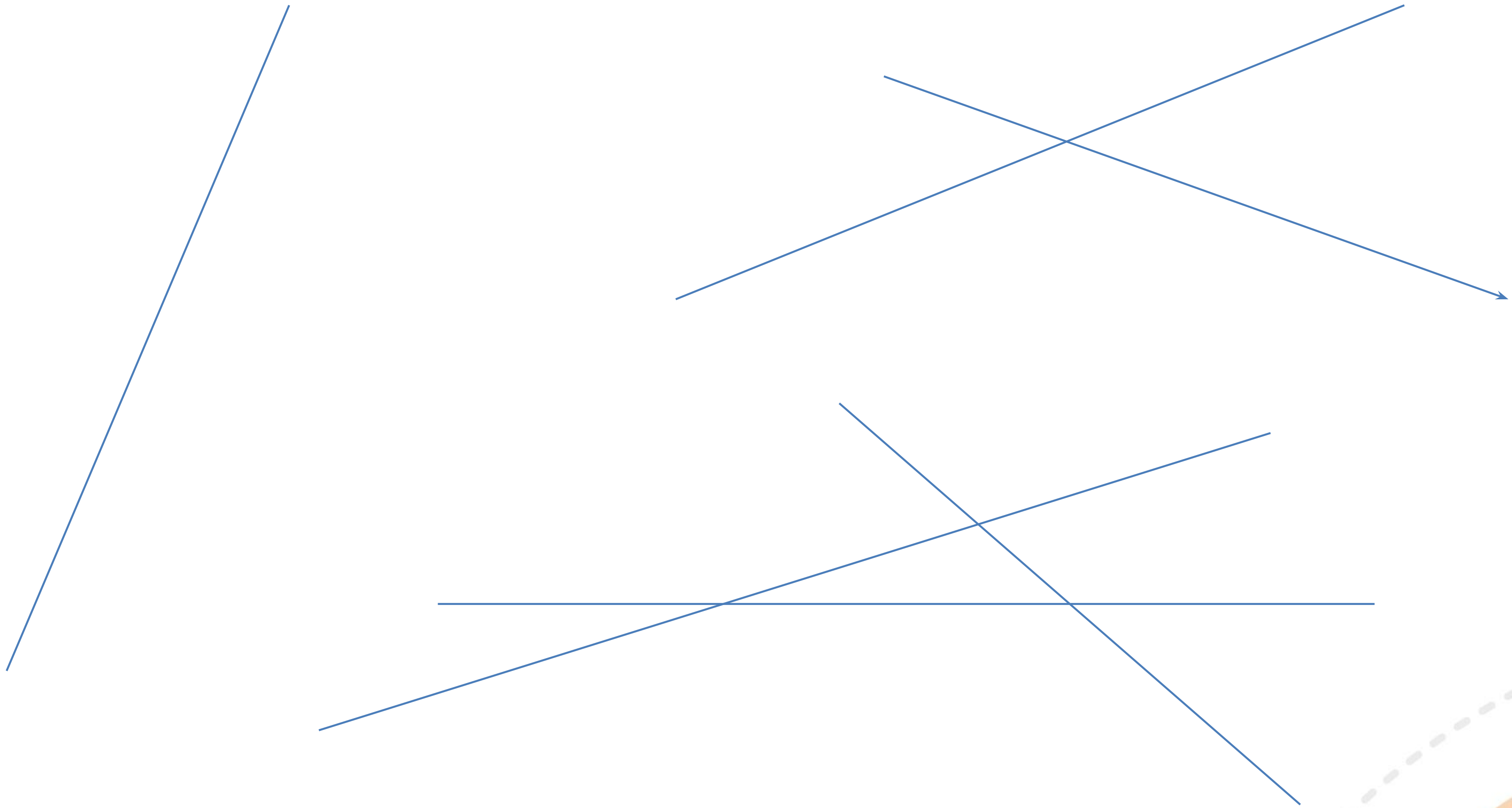


Восстановим затем отброшенную окружность и по одну сторону от нее, например внутри, изменим цвет каждой области на противоположный.



Легко видеть, что при этом мы получим карту, правильную раскрашенную двумя красками, но только теперь уже при n+1 окружностях, что и требовалось доказать.

В плоскости проведено n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей разбивают плоскость эти прямые.



$$N(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Сделав предположение индукции рассмотрим k+1 прямых, удовлетворяющих условию задачи. Выделим из них произвольным образом k прямых. По предположению индукции они разобьют плоскость на 1+ k(k+1)/2 частей. Оставшаяся (k+1)-я прямая разобьётся выделенными k прямыми на k+1 частей и, следовательно, пройдёт по (k+1)-й части, на которые плоскость уже была разбита, и каждую из этих частей разделит на 2 части, то есть добавится ещё k+1 часть. Итак,

$$N(k)+k+1=1+\frac{k(k+1)}{2}+k+1=1+\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

что и требовалось доказать.

В любой момент времени число людей на земле , сделавших нечётное число рукопожатий , чётно.

Назовём людей, сделавших нечётное число рукопожатий «плохими», а остальных «хорошими».
После рукопожатия с номером 1 стало два «плохих» человека, т.е. чётное число.
Пусть после рукопожатия с номером k число «плохих» людей чётно.

Пусть происходит рукопожатие номер к+1. При этом может быть 3 случая:

1. Пожимают руки двое «хороших»,
2. двое «плохих»,
3. «хороший» и «плохой».

В первом случае двое «хороших» прибавляют к своему чётному числу рукопожатий ещё одно, т.е. становятся «плохими» ;

Во втором случае двое «плохих» становятся «хорошими».

И в третьем - «хороший» становится «плохим» , а «плохой» -«хорошим».

Т.о. , число «плохих» людей либо увеличивается на два, либо уменьшается на два, либо не меняется, т.е. в любом случае остаётся чётным.

Доказать методом математической индукции формулу:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Доказать, что любое число рублей, большее 7, можно уплатить без сдачи, имея только купюры 3 и 5 рублей.