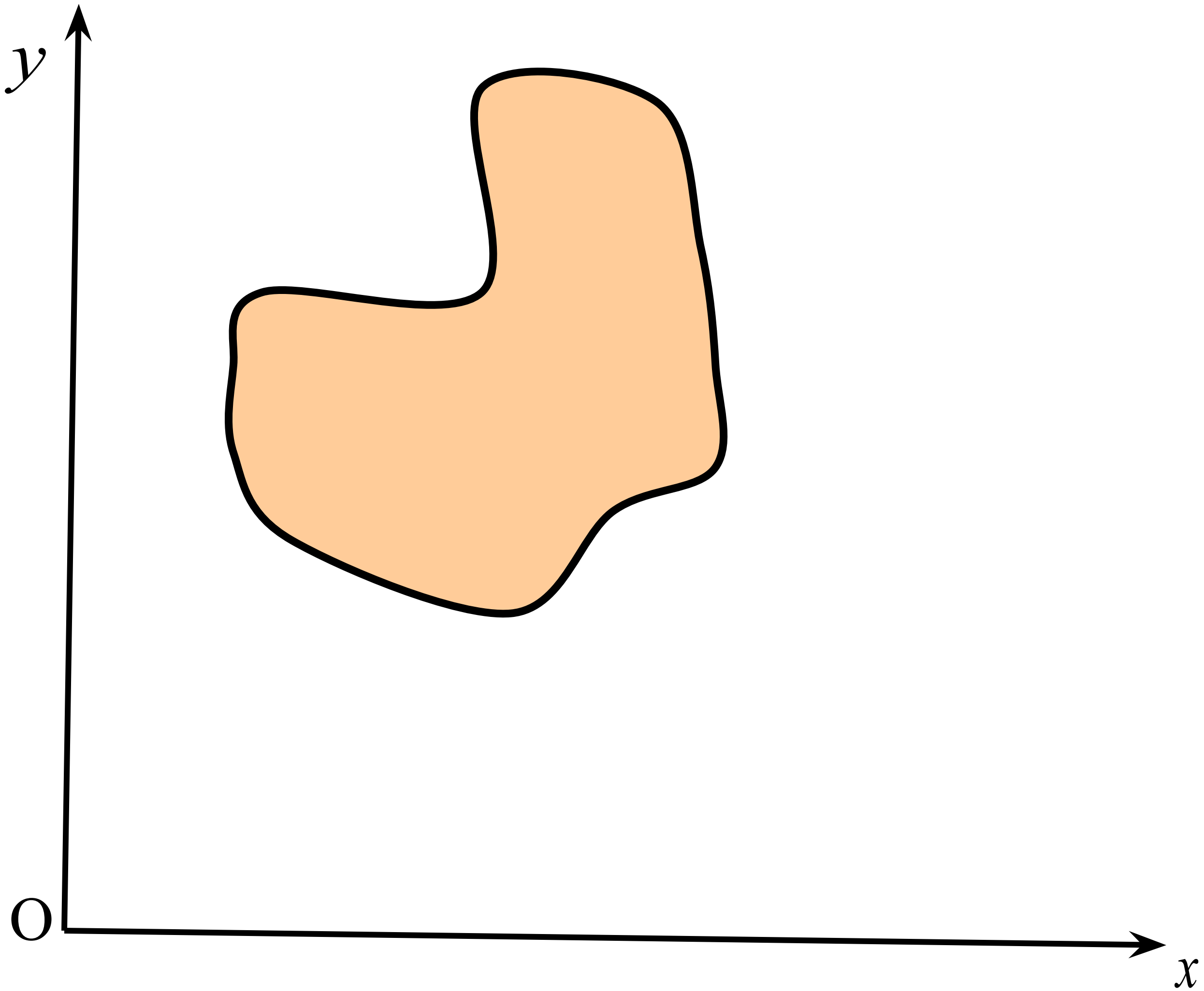
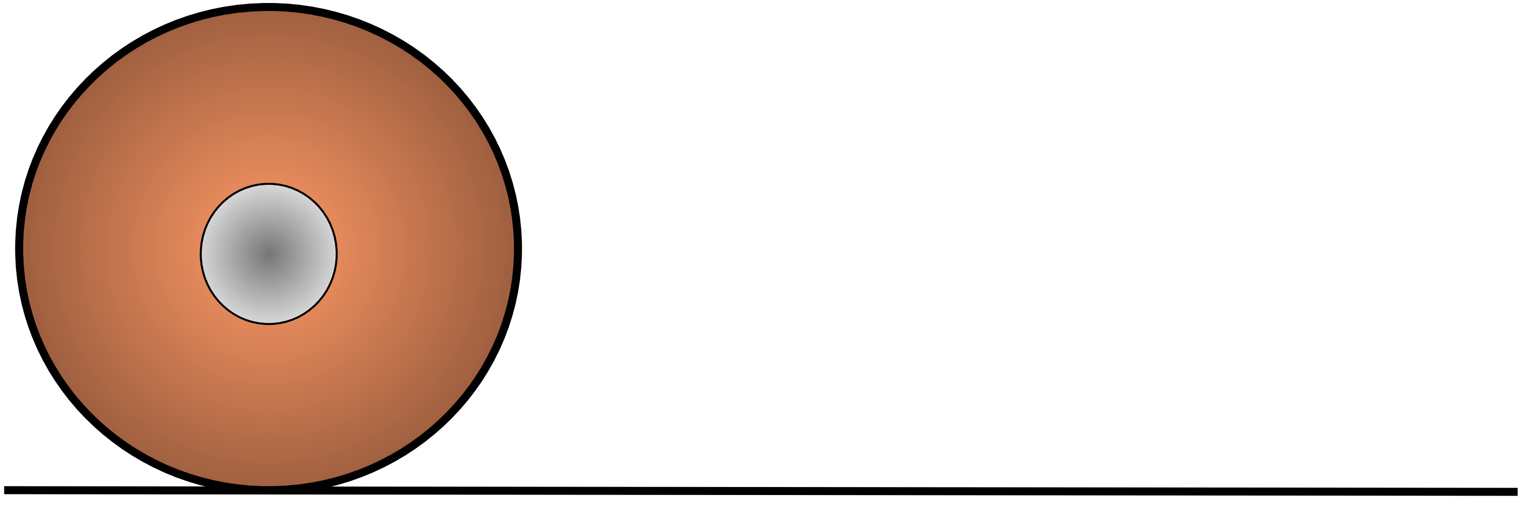
§8. Плоскопараллельное движение твердого тела (плоское)

Плоскопараллельным *(плоским) движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных одной неподвижной плоскости, которая называется* ***основной*** *плоскостью.*

Общий случай плоскопараллельного движения



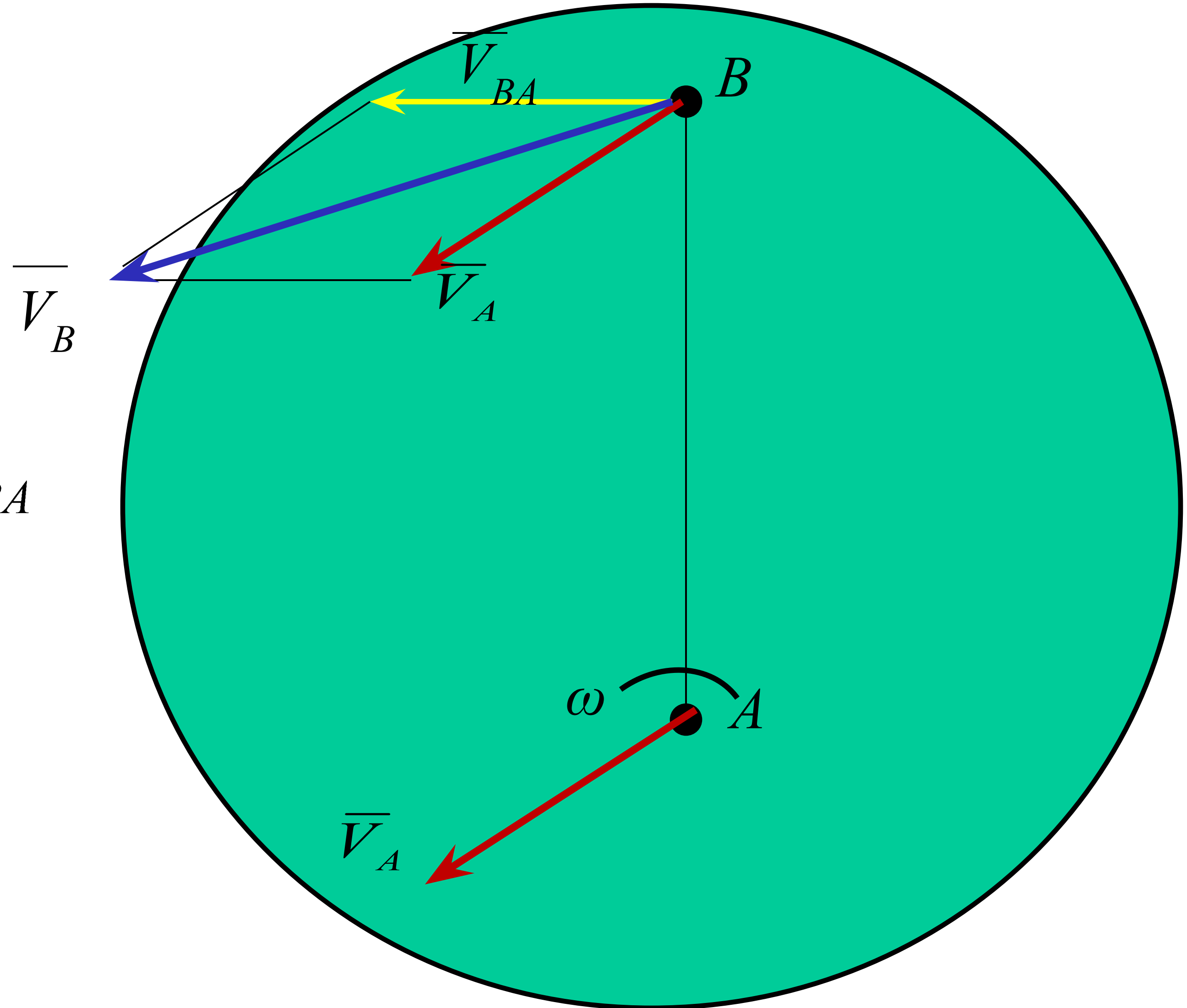


Теорема *о скоростях точек тела при плоскопараллельном движении*

$$\overline{V}_{\mathrm{B}} = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$$

Скорость произвольной точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости этой точки вокруг оси, проходящей через полюс .

Геометрическая интерпретация теоремы

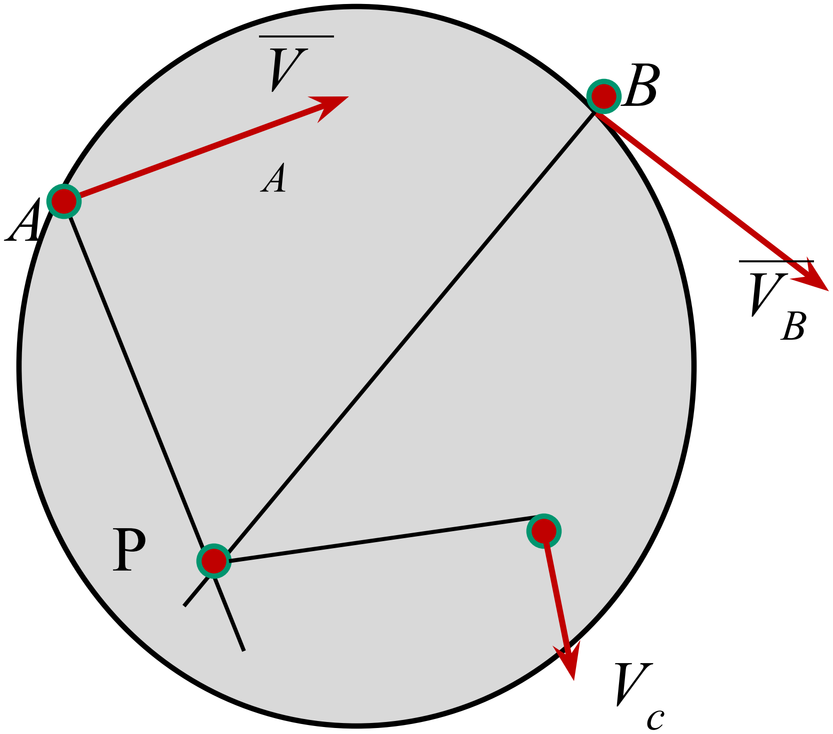


$$\overline{V}_{\mathrm{B}} = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$$

$$\overline{V}_{BA} \perp A\overline{B}$$

8.5. Мгновенный центр скоростей

- ***Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка связанная с телом, скорость которой в данный момент времени равна нулю.***



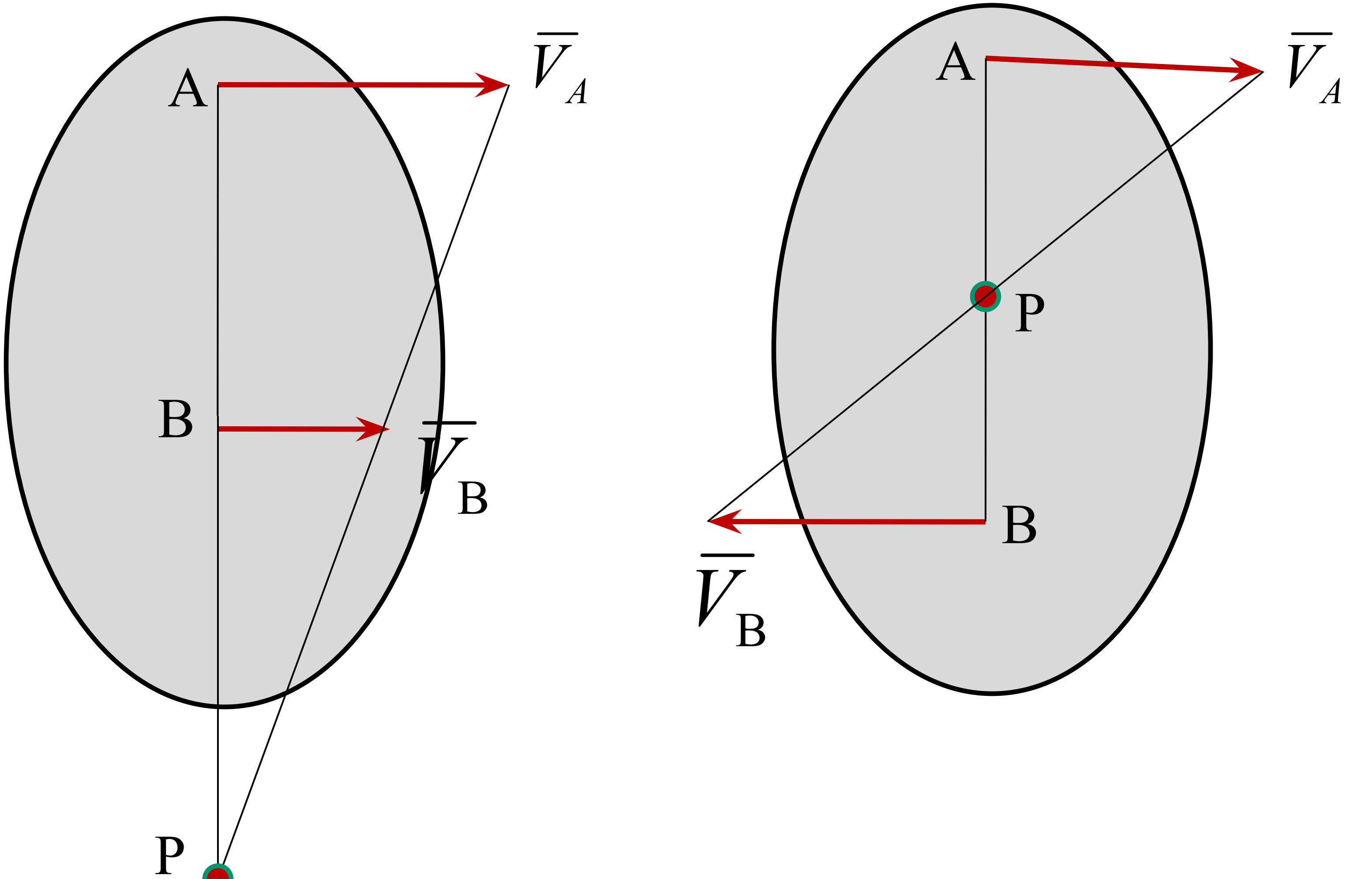
$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP} = \omega$$

Точка Р – МЦС;

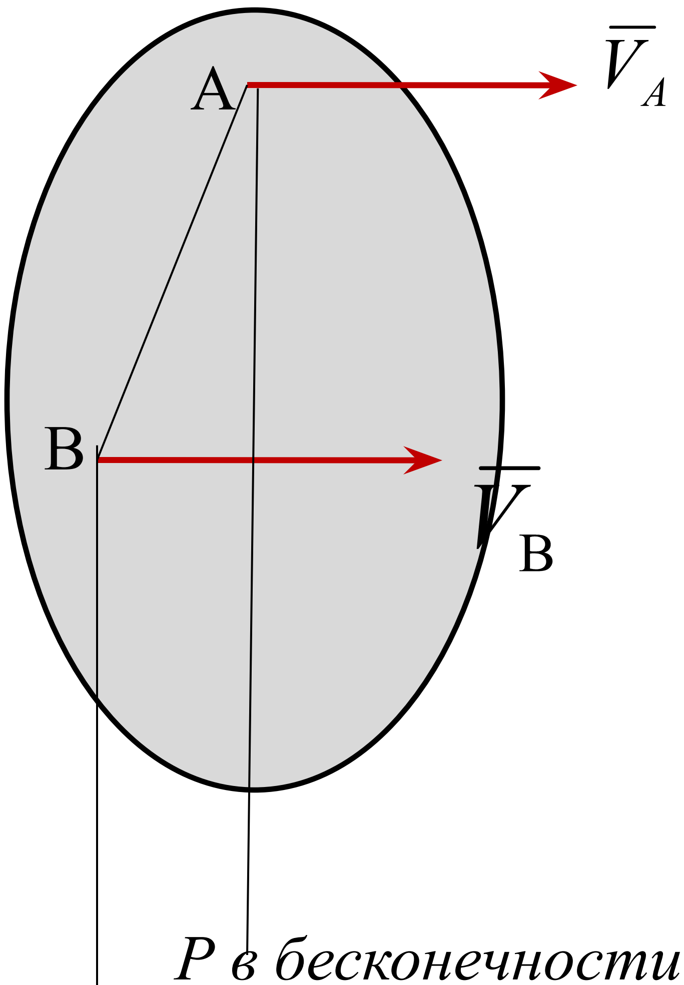
МЦС находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям в 2х точках («А» и «В»)

Плоскопараллельное движение можно рассматривать как мгновенное вращение вокруг мгновенной оси (ось, проходящая через МЦС).

Скорости двух точек тела параллельны друг другу, не равны между собой и перпендикулярны прямой соединяющей эти точки.



Скорости двух точек параллельны, но не перпендикулярны прямой, соединяющей эти точки.

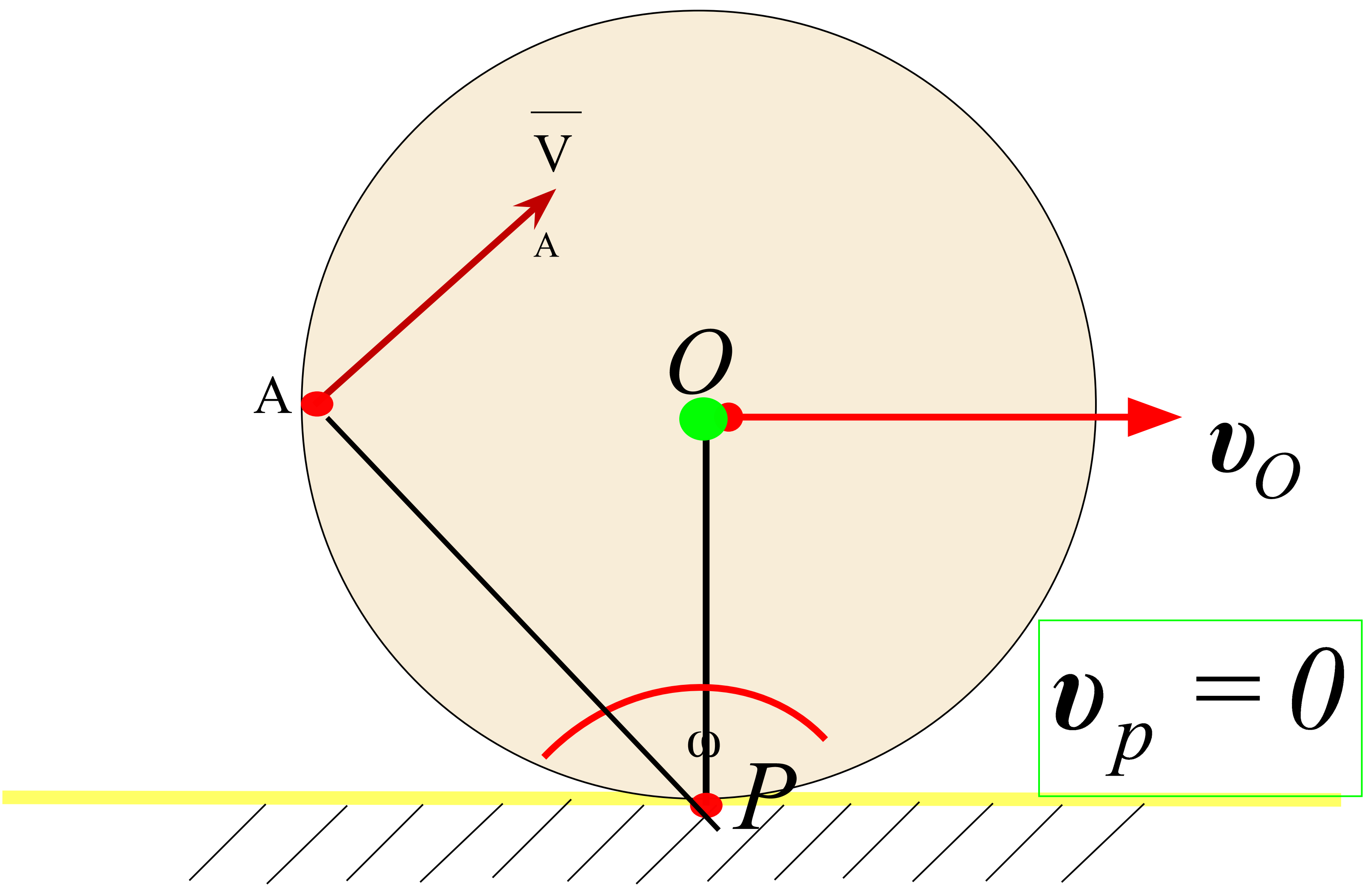


$$\omega = \frac{V_A}{AP} = 0$$

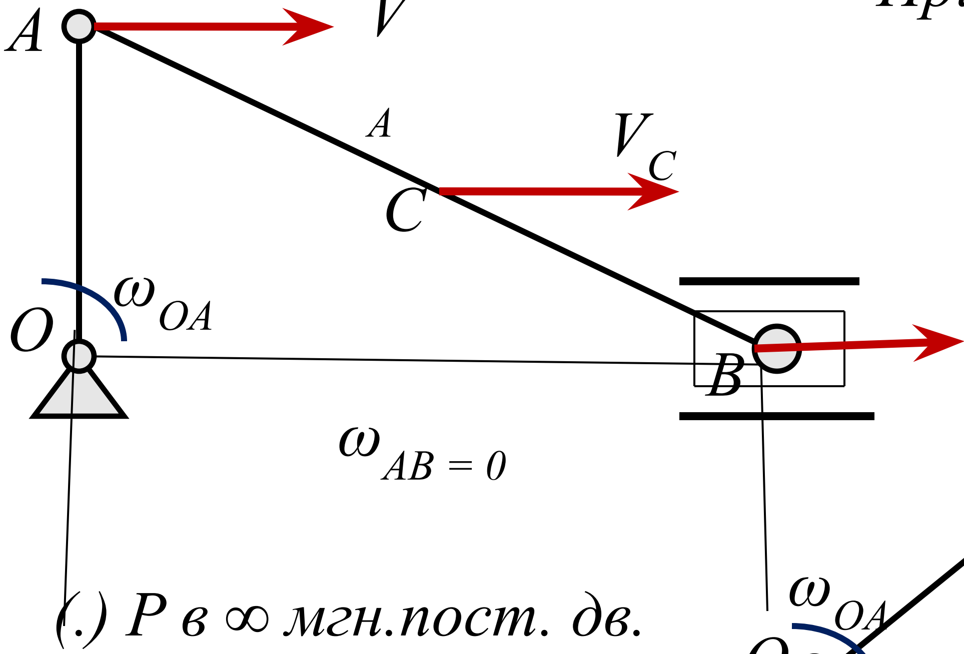
Движение тела поступательное

$$V_A = V_B$$

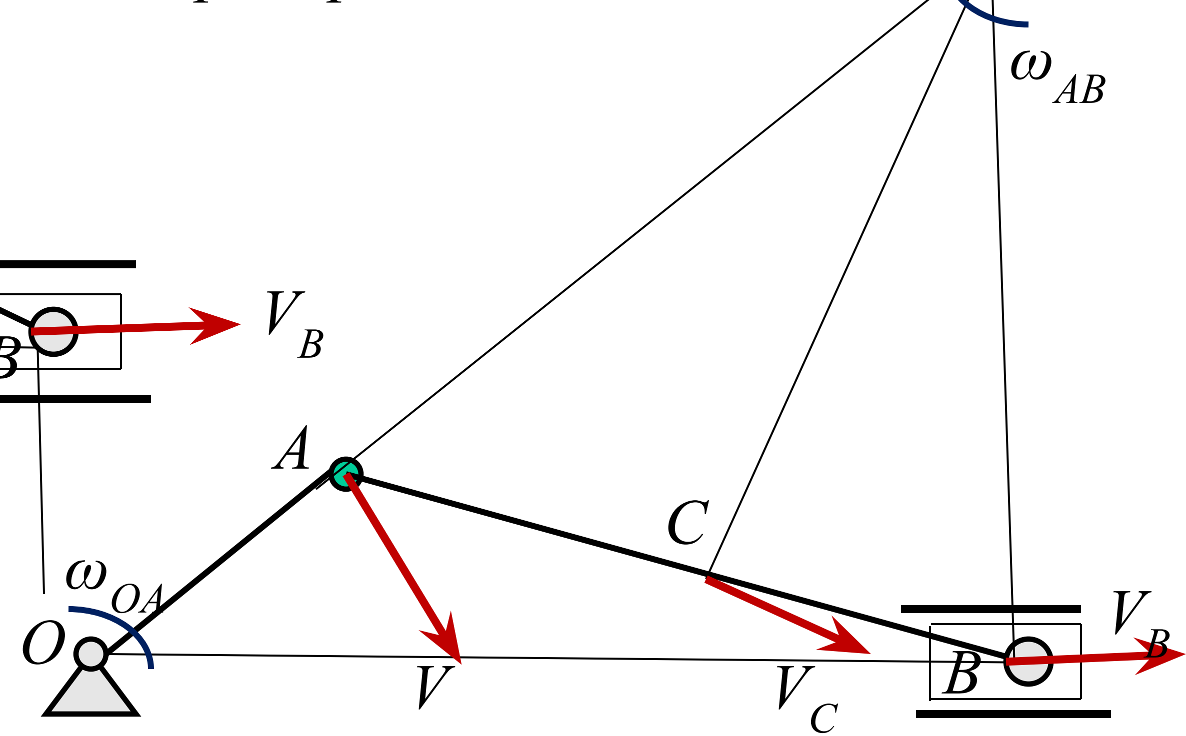
Тело катится без скольжения по неподвижной поверхности.



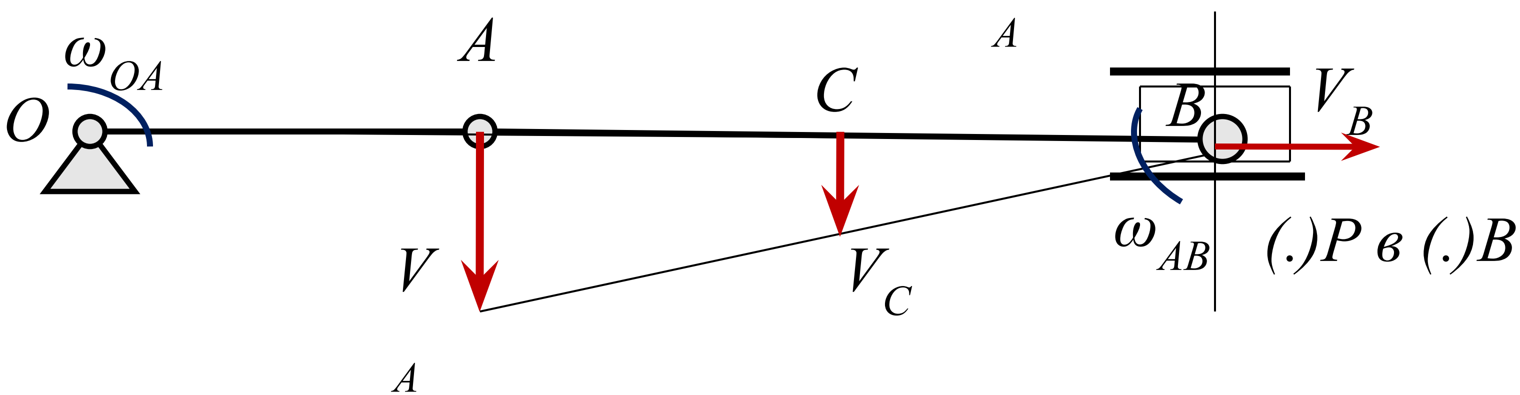
Пример 1



A
V
A
V
C
C
ω
OA
O
B
V
B
ω
AB = 0
(.) P в ∞ мгн.пост. дв.



P
ω
AB
A
C
ω
OA
O
V
V
C
B
V
B



ω
OA
O
A
C
A
B
V
B
V
V
C
ω
AB
(.)P в (.)B
A

Теорема о сложении ускорений точек при плоскопараллельном движении тела

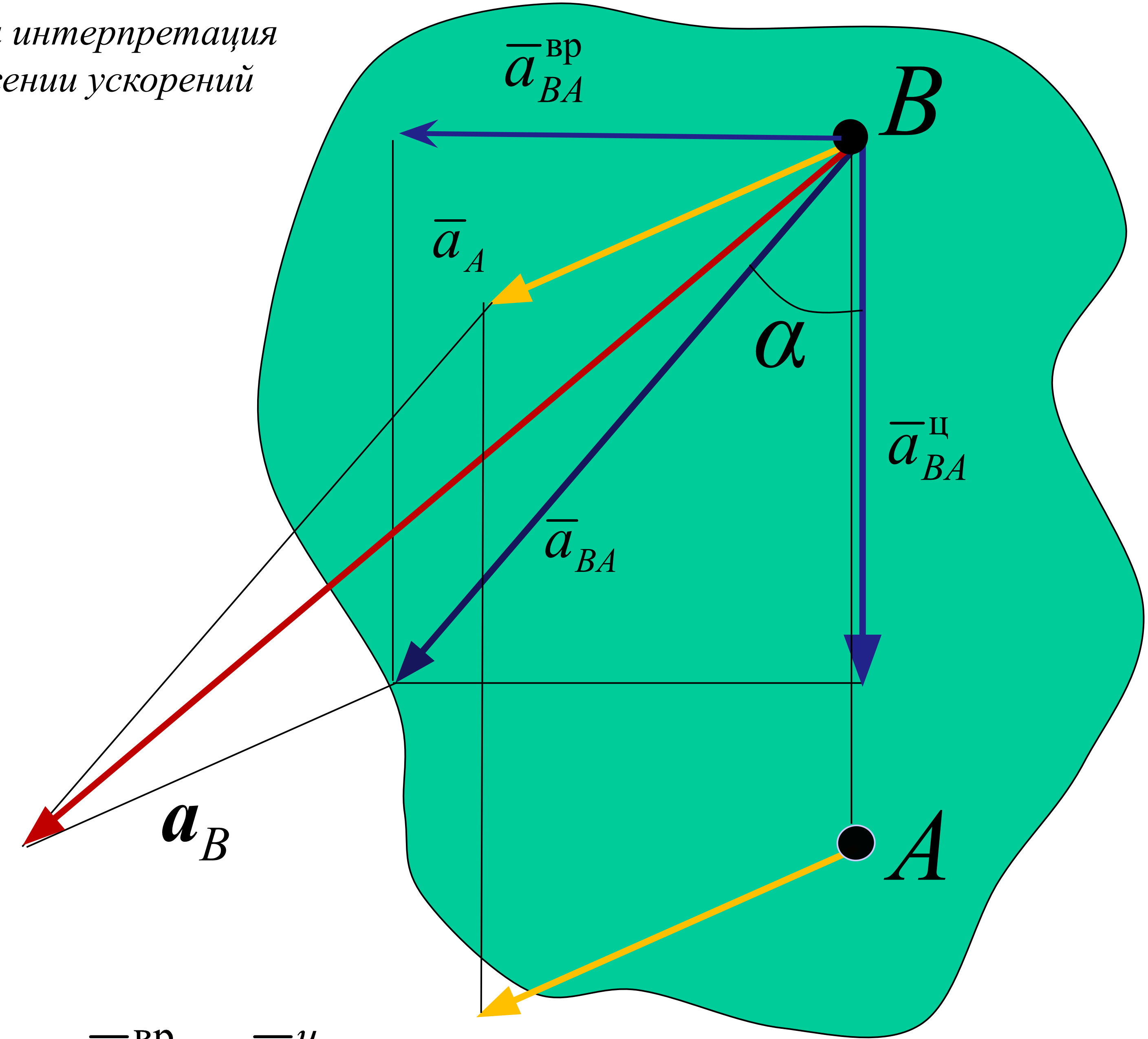
$$\overline{a}_{\text{B}} = \overline{a}_{A} + \overline{a}_{BA}^{\text{в}} + \overline{a}_{BA}^{ц}$$

Ускорение произвольной точки тела при его плоскопараллельном движении равно векторной сумме ускорения полюса, вращательного и центростремительного ускорений этой точки при вращении вокруг полюса.

$$\overline{a}_{\text{BA}} = \overline{a}_{BA}^{\text{в}} + \overline{a}_{\text{BA}}^{\text{ц}}$$

$$a_{BA}^{в} = \varepsilon \times AB \qquad a_{BA}^{ц} = \omega^{2} \times AB$$

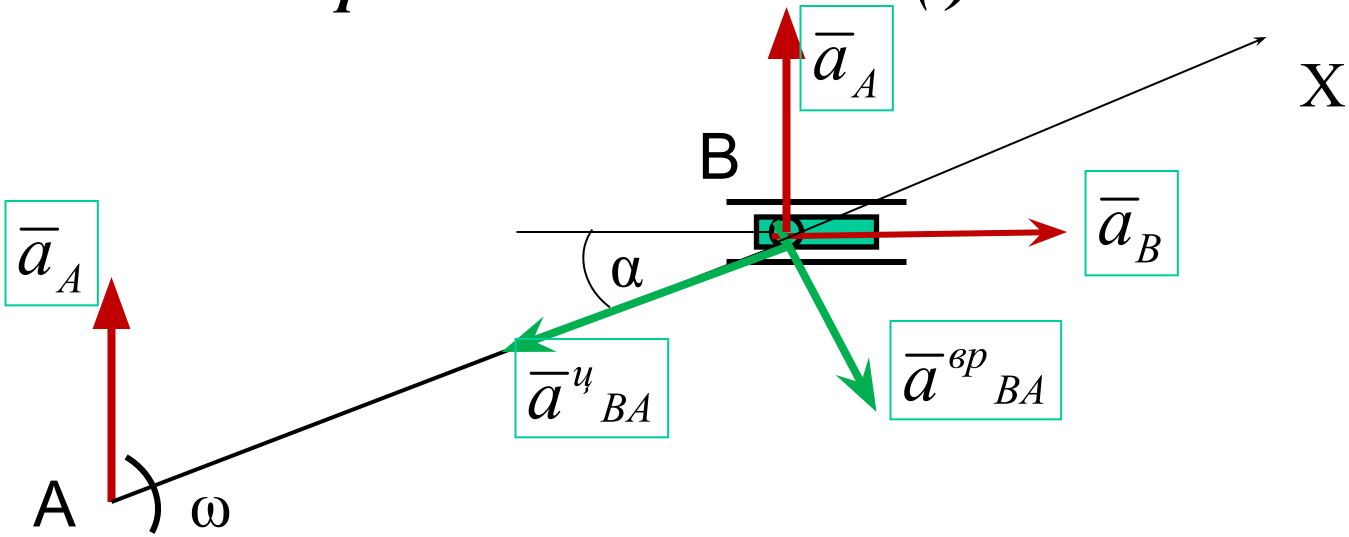
Геометрическая интерпретация
Теоремы о сложении ускорений



$$\bar{a}_{\text{B}} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\text{вр}} + \bar{a}_{BA}^{ц}$$

Аналитическое определение ускорений

1. Направление движения (.) В известно.



Дано:

$\omega = 2c^{-1}$

$AB = 1м$

$a_A = 2м/c^2$

$\alpha = 30^0$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^{ц}{}_{BA} + \bar{a}^{вр}{}_{BA}$$

$$a^{ц}{}_{BA} = \omega^2 \cdot AB = 4м/c^2$$

Проецируем на ось X:

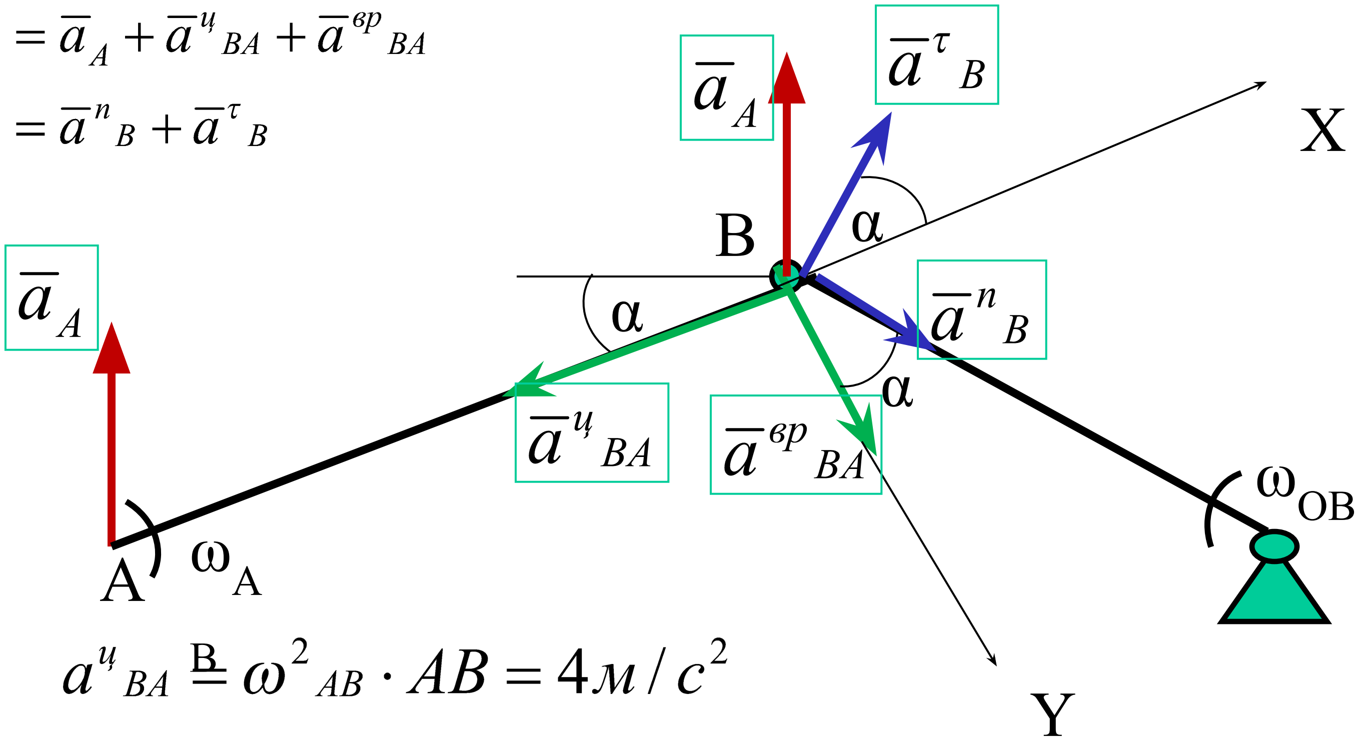
$$a_B \cos\alpha = a_A \sin\alpha - a^{ц}{}_{BA};$$

$$a_B = -3{,}5м/c^2$$

2. Направление $\overline{a}_B$ не известно.

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}^{ц}{}_{BA} + \overline{a}^{вр}{}_{BA}$$

$$\overline{a}_B = \overline{a}^{n}{}_{B} + \overline{a}^{\tau}{}_{B}$$



Дано :

$\omega_{AB} = 2c^{-1}$

$\omega_{OA} = 1c^{-1}$

$AB = 1м$

$OB = 0{,}8м$

$a_A = 2м/c^2$

$\alpha = 30^0$

$$a^{ц}{}_{BA} \stackrel{\text{B}}{=} \omega^2{}_{AB} \cdot AB = 4м/c^2$$

$$a^{n}{}_{B} = \omega^2{}_{OB} \cdot OB = 0.64м/c^2$$

Проецируем на ось X:

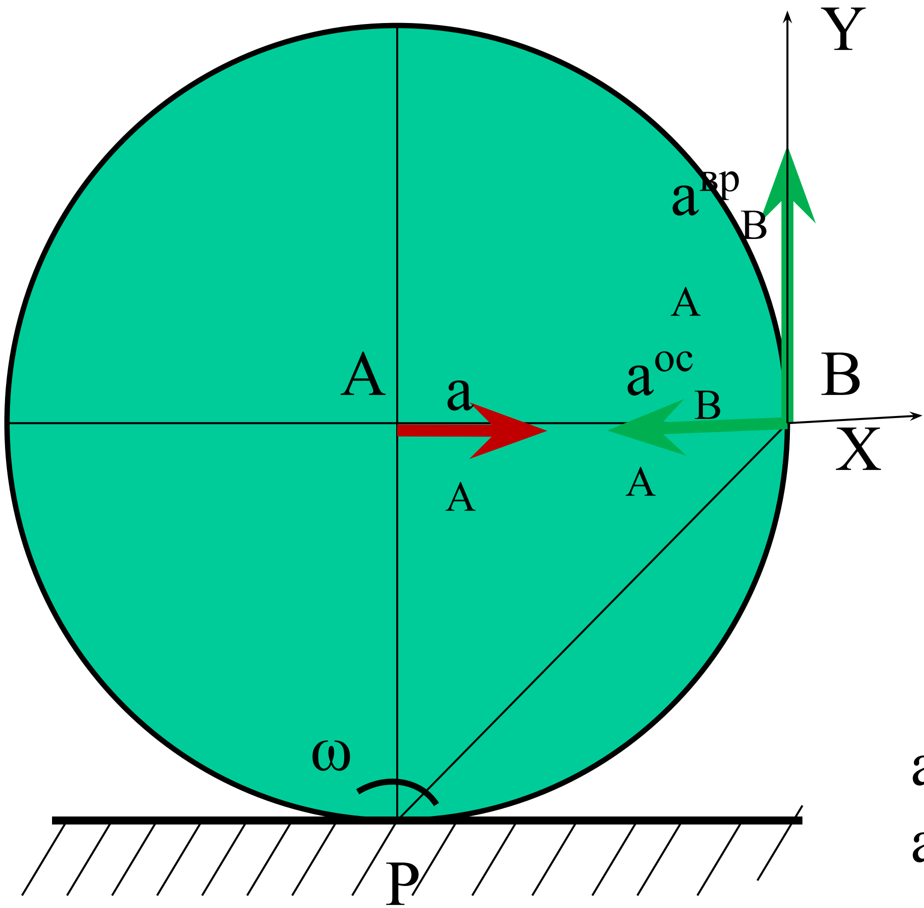
$$a_A \sin\alpha - a^{ц}{}_{BA} = a^{\tau}{}_B \cos\alpha + a^{n}{}_B \sin\alpha$$

$$a^{\tau}{}_B = 3{,}86м/c^2$$

$$a_B = \sqrt{(a^{\tau}{}_B)^2 + (a^{n}{}_B)^2} = 3{,}9м/c^2$$

3. *Движение диска без скольжения.*

$$\overline{a}_В = \overline{a}_A + \overline{a}^{вр}_{BA} + \overline{a}^{oc}_{BA}$$



Дано: R = 0,5м Найти: a_B

$\omega = 2c^{-1}$; $a_A = 4м/c^2$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(V_A)}{dt \cdot R} = \frac{a^{\tau}{}_A}{R} = 8м/c^2$$

$a^{oc}_{BA} = \omega^2 R = 2м/c^2$

$a^{вр}_{BA} = \varepsilon R = 4м/c^2$

$a_{BX} = a_A - a^{oc}_{BA} = 2м/c^2$

$a_{BY} = a^{вр}_{BA} = 4м/c^2$

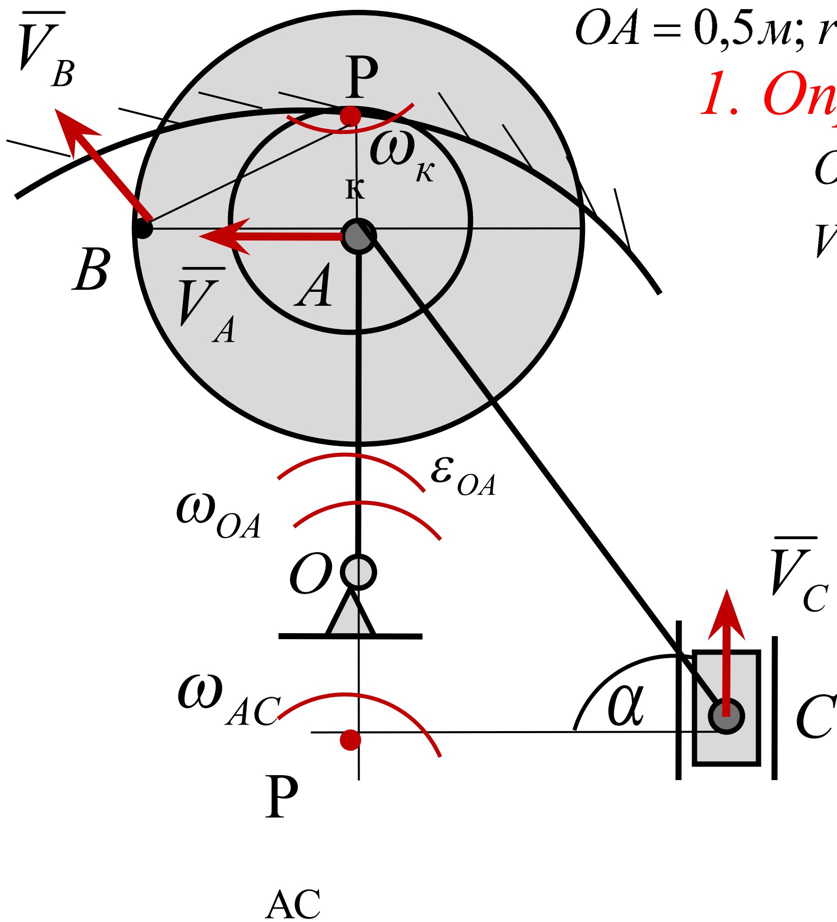
$$a_B = \sqrt{a^2_{BX} + a^2_{BY}} = \sqrt{20} = 4{,}47м/c^2$$

Кинематический анализ плоского механизма.

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек A, B, C, а также угловые скорости и угловые ускорения всех звеньев механизма.

$$Дано: \omega_{OA} = 2c^{-1}; \varepsilon_{OA} = 3c^{-1};$$

$$OA = 0{,}5м;\ r = 0{,}3м;\ R = 0{,}4м;\ AC = 1м;\ \alpha = 60^0$$



1. Определение скоростей:

$$OA - вращательное\ движение$$

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0{,}5 = 1м/с$$

$$Колесо - плоскопарал.\ движение$$

$$\omega_к = \frac{VA}{AP_к} = \frac{VB}{BP_к}; \omega_к = \frac{V_A}{AP_к} = \frac{V_A}{r} = 3{,}3c^{-1}$$

$$V_B = \omega_к \cdot BP = \omega_к \cdot \sqrt{0{,}09 + 0{,}16} = 1{,}65м/с$$

$$AC - плоскопарал.\ движение$$

$$\omega_{AC} = \frac{V_A}{AP_{AC}} = \frac{V_C}{CP_{AC}}$$

$$\omega_{AC} = \frac{VA}{AP_{AC}} = \frac{1}{AC \cdot \sin 60^0} = 1{,}15c^{-1}$$

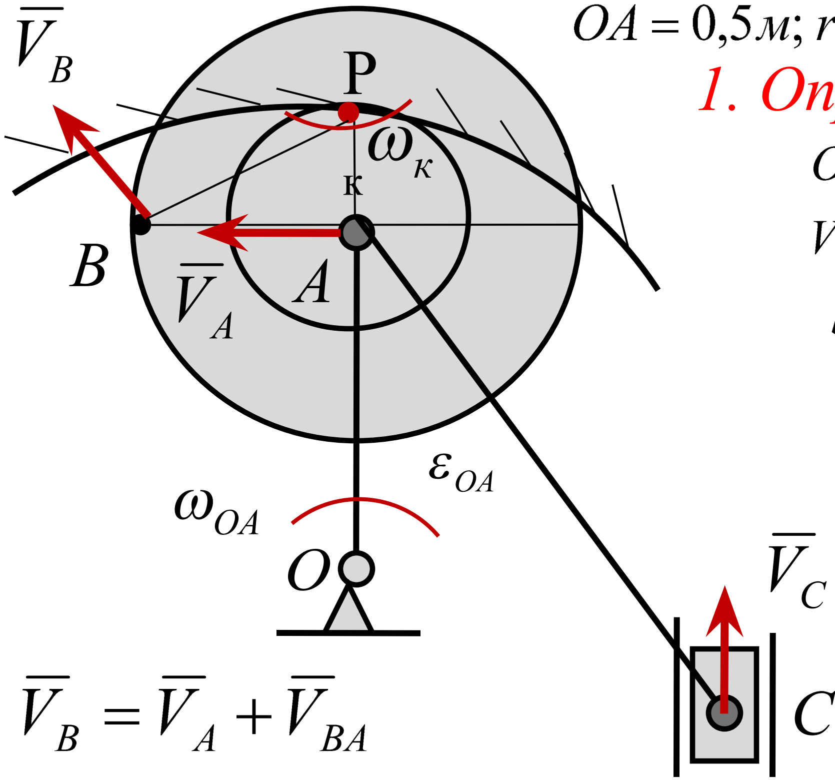
$$V_C = \omega_{AC} \cdot CP = \omega_{AC} \cdot AC \cos 60^0 = 0{,}57м/с$$

Кинематический анализ плоского механизма.

Построение плана скоростей механизма.

$$Дано: \omega_{OA} = 2c^{-1}; \varepsilon_{OA} = 3c^{-1};$$

$$OA = 0{,}5м;\ r = 0{,}3м;\ R = 0{,}4м;\ AC = 1м;\ \alpha = 60^0$$



1. Определение скоростей:

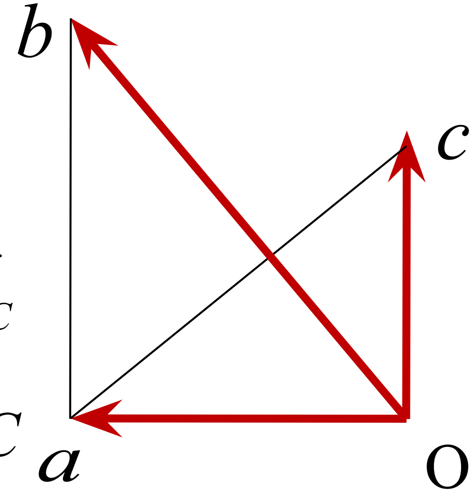
OA – вращательное движение

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0{,}5 = 1м/c$$

Масштабный коэффициент

$$\mu_V = 0{,}2$$

$$oa = \frac{V_A}{\mu_V} = \frac{1}{0{,}2} = 5см$$



$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$$

$$\overline{V}_{BA} \perp \overline{AB}$$

$$V_B = \mu_V \cdot ob = 1{,}65м/c$$

$$\overline{V}_C = \overline{V}_A + \overline{V}_{CA}$$

$$\overline{V}_{CA} \perp \overline{AC}$$

$$V_C = \mu_V \cdot oc = 0.57м/c$$

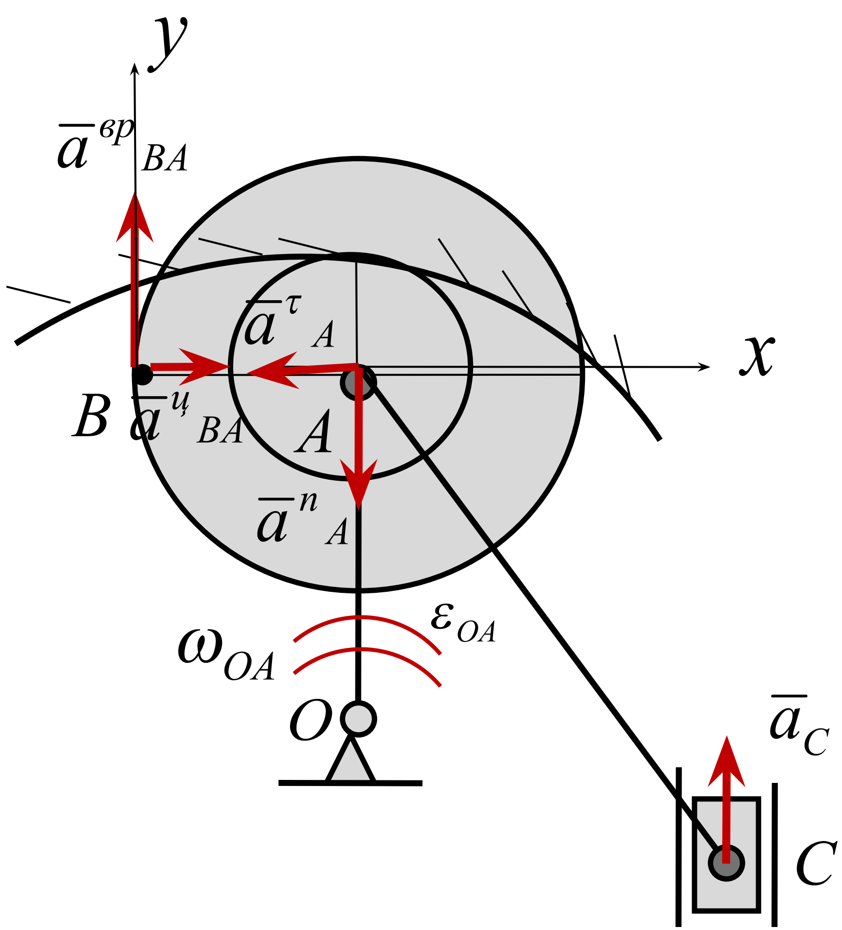
Свойства плана скоростей

1. *Одноименные отрезки плана скоростей и механизма взаимно перпендикулярны.*

2. *Одноименные отрезки плана скоростей и механизма прямо пропорциональны.*

3. *Одноименные фигуры плана скоростей и механизма подобны и повернуты друг относительно друга на угол 90^0*

Аналитическое определение ускорений (для точки A и B):



$OA -$ *вращательное движение*

$$\overline{a}_A = \overline{a}^n{}_A + \overline{a}^{\tau}{}_A$$

$$a^n{}_A = \omega^2{}_{OA} \cdot OA = 4 \cdot 0{,}5 = 2 м/с^2$$

$$a^{\tau}{}_A = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5 м/с^2$$

$$a_A = \sqrt{4 + 2{,}25} = 2{,}5 м/с^2$$

Колесо – плоскопарал. движение

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}$$

$$\omega_к = 3{,}3 с^{-1};\ \varepsilon_к = \frac{a^{\tau}{}_A}{r} = 5 с^{-2}$$

$$a^ц{}_{BA} = \omega^2{}_к \cdot R = 1{,}32 м/с^2$$

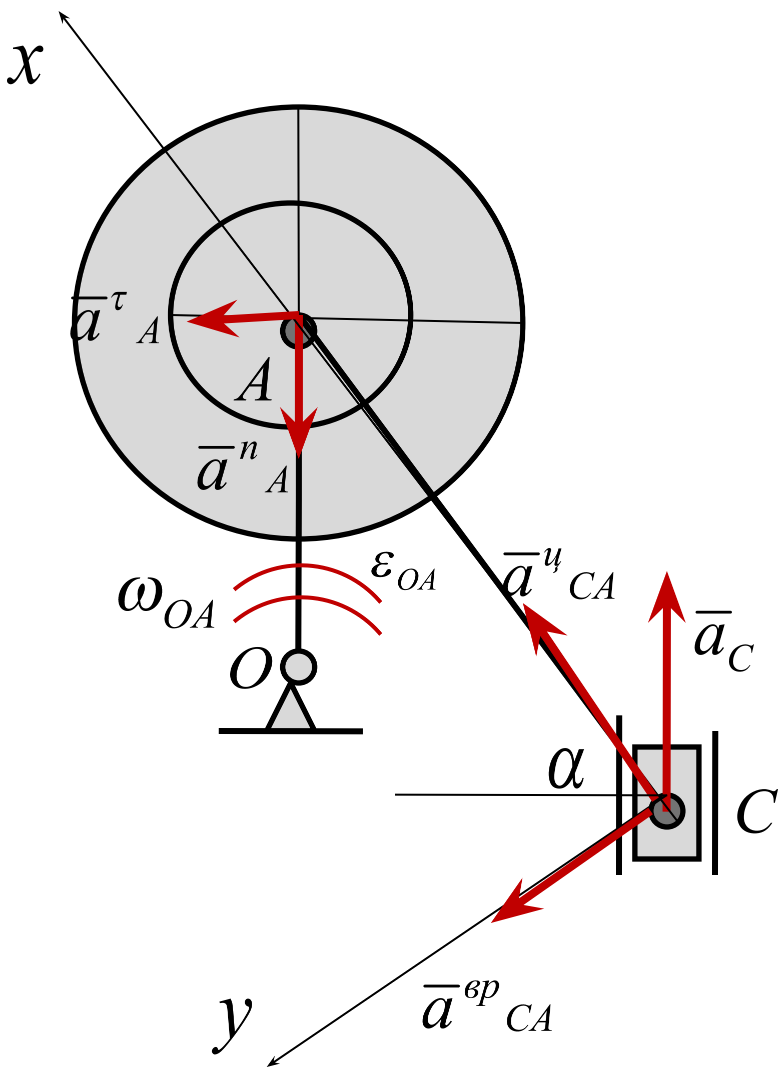
$$a^{вр}{}_{BA} = \varepsilon_к \cdot R = 2 м/с^2$$

$$a_{BX} = a^ц{}_{BA} - a^{\tau}{}_A = 0{,}82$$

$$a_{BY} = a^{вр}{}_{BA} - a^n{}_A = 0$$

$$a_B = a_{BX} = 0{,}82 м/с^2$$

Определение ускорений (для точки С):



AC – плоскопарал. движение

$$\overline{a}_C = \overline{a}^{\tau}{}_A + \overline{a}^{n}{}_A + \overline{a}^{ц}{}_{CA} + \overline{a}^{вр}{}_{CA}$$

$$a^{ц}{}_{CA} = \omega^2{}_{AC} \cdot AC = 1{,}3$$

$$На\ x: a_C \cos 30^0 = a^{\tau}{}_A \cos 60^0 - a^{n}{}_A \cos 30^0 + a^{ц}{}_{CA}$$

$$a_C = 0{,}35 м/c^2$$

$$На\ y: -a_C \cos 60^0 = a^{\tau}{}_A \cos 30^0 + a^{n}{}_A \cos 60^0 + a^{вр}{}_{CA}$$

$$a^{вр}{}_{CA} = -2{,}48 = \varepsilon_{AC} \cdot AC$$

$$\varepsilon_{AC} = -2{,}48 c^{-2}$$

Геометрическое определение ускорения точки С.

$$\overline{a}_A = \overline{a}^n{}_A + \overline{a}^\tau{}_A$$

$$a^n{}_A = \omega^2{}_{OA} \cdot OA = 4 \cdot 0{,}5 = 2\text{м}/\text{с}^2$$

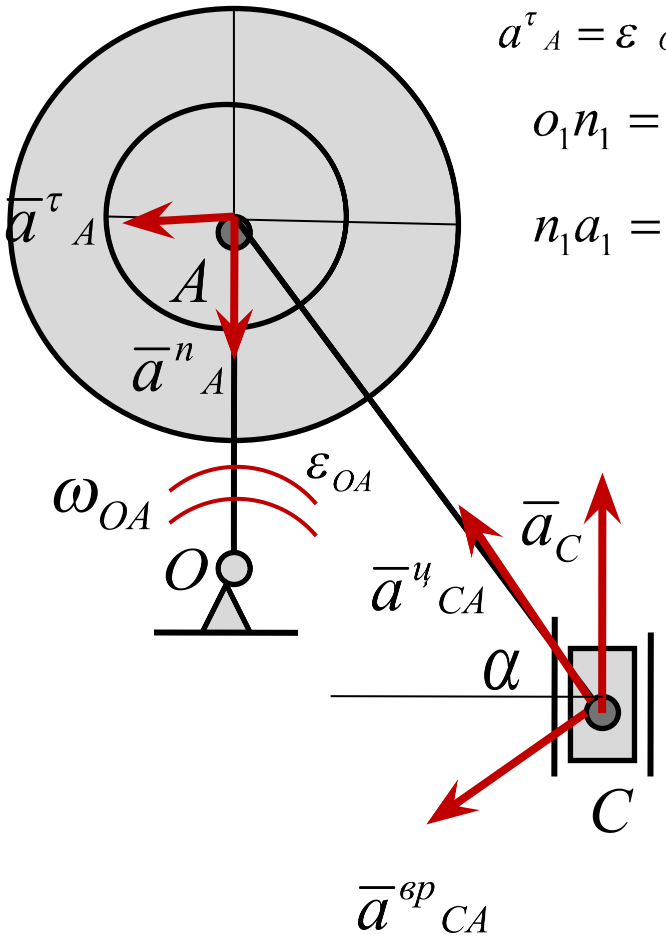
$$a^\tau{}_A = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5\text{м}/\text{с}^2$$

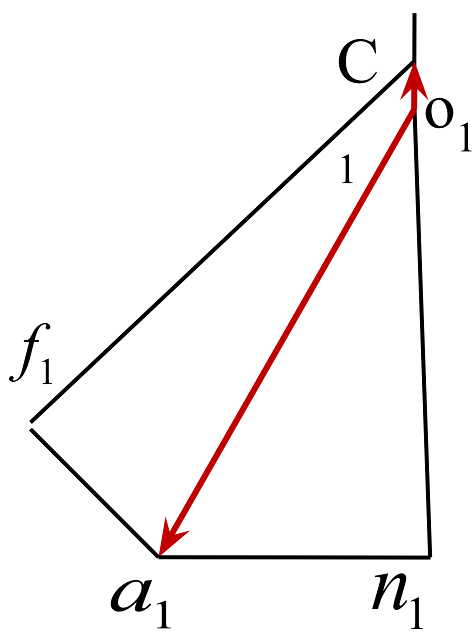
$$o_1 n_1 = \frac{a^n{}_A}{\mu_a} = \frac{2}{0{,}5} = 4\text{см}$$

$$n_1 a_1 = \frac{a^\tau{}_A}{\mu_a} = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3\text{см}$$

Масштабный коэффициент $\mu_a = 0{,}5$

$$a_A = oa \cdot \mu_V = 2{,}5\text{м}/\text{с}^2$$





$$\overline{a}_C = \overline{a}^\tau{}_A + \overline{a}^n{}_A + \overline{a}^ц{}_{CA} + \overline{a}^{вр}{}_{CA}$$

$$a^ц{}_{CA} = \omega^2{}_{AC} \cdot AC = 1{,}3$$

$$a_1 f_1 = \frac{a^ц{}_{CA}}{\mu_a} = \frac{1{,}3}{0{,}5} = 2{,}6$$

$$V_C = \mu_a \cdot O_1 C_1 = 0{,}35\text{м}/\text{с}^2$$