Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Выполнила

учитель математики МОУ «СОШ №17 г.Вольска Саратовской области»
Сметанина Татьяна Евгеньевна

г.Вольск

	Арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \ldots$	Геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \ldots$
Определения	**Арифметической прогрессией** называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом. $a_{n+1} = a_n + d, n = 1, 2, \ldots,$ **d – разность прогрессии**	**Геометрической прогрессией** называется числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же не равное нулю число. $b_{n+1} = qb_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$ $q \neq 0, \quad b1 \neq 0;$ **q – знаменатель прогрессии**
Формулы общего члена	$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1),$ $n = 1, 2, \ldots$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$ $n = 1, 2, \ldots$
Характеристическое свойство	a_{n-1}, a_n, a_{n+1} – последовательные члены арифметической прогрессии тогда и только тогда, когда $$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$ (среднее арифметическое)	b_{n-1}, b_n, b_{n+1} $(b_n > 0)$ – последовательные члены геометрической прогрессии тогда и только тогда, когда $$b_n = \sqrt{b_{n-1} * b_{n+1}}$$ (среднее геометрическое)

Формулы суммы *n* первых членов

Арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$$

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, q \neq 1$$

Задача №1

Четвёртый член арифметической прогрессии равен 4,5, а её двенадцатый член равен -12. Найдите двадцатый член этой прогрессии.

Решение

I способ

Воспользуемся формулой *n*-го члена арифметической прогрессии

$a_n = a_1 + d(n – 1)$ и выразим данные члены прогрессии $a_4 = a_1 + 3d$, $a_{12} = a_1 + 11d$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + 11d = 4{,}5, \\ a_1 + 3d = -12; \end{cases}$$

$-8d = 16{,}5$, $8d = -16{,}5$

Заметим, что $a_{20} = a_{12} + 8d$,

$a_{20} = -12 – 16{,}5$,

$a_{20} = -28{,}5$

II способ

Заметим , что $a_{12} = a_4 + 8d$, $a_{20} = a_{12} + 8d$. ***Найдём 8d.***

$8d = a_{12} – a_4 = –12 – 4{,}5 = –16{,}5$

$a_{20} = a_{12} + 8d = –12 – 16{,}5 = –28{,}5$

Ответ. $–28{,}5$

ЗАДАЧА №2

В геометрической прогрессии $b_{12} = 3^{15}$ и $b_{14} = 3^{17}$.

Найдите b_1.

Решение

По определению геометрической прогрессии

$b_{14} = b_{12} \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{b_{14}}{b_{12}} = \frac{3^{17}}{3^{15}} = 3^2 = 9, \quad q = \pm\sqrt{9}, q = \pm 3$

По формуле n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$$b_{12} = b_1 \cdot q^{11} \Rightarrow b_1 = \frac{b_{12}}{q^{11}}$$

Если q = - 3, то $b_1 = \frac{3^{15}}{-3^{11}} = -3^4 = -81$

Если q = 3, то $b_1 = \frac{3^{15}}{3^{11}} = 3^4 = 81$

***Ответ.** – 81 или 81*

Задача № 3

В арифметической прогрессии $a_5 = -150$, $a_6 = -147$. Найдите номер первого положительного члена этой прогрессии

Решение

По определению арифметической прогрессии

$a_6 = a_5 + d,\ \ d = a_6 - a_5,\ \ d = -147 - (-150),\ d = 3$

По формуле n-го члена арифметической прогрессии

$a_n = a_1 + d(n-1),\ \ a_5 = a_1 + 4d,\ \ a_1 = a_5 - 4d,$

$a_1 = -150 - 12,\ a_1 = -162.$

Так как $a_n > 0$, **то** $a_1 + d(n-1) > 0$, **значит,**

$-162 + 3(n-1) > 0,$

$-162 + 3n - 3 > 0,$

$3n > 165,$

$n > 55,$

$n = 56.$

Ответ. **Первый положительный член этой прогрессии стоит на 56 месте.**

Задача №4

Существует ли геометрическая прогрессия, в которой
$b_2 = -6$, $b_5 = 48$ и $b_7 = 192$

Решение

По определению геометрической прогрессии

$$b_5 = b_2 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{b_5}{b_2} = \frac{48}{-6} = -8, q = -2$$

$$b_7 = b_5 \cdot q^2, \quad b_7 = 48 \cdot 4 = 192.$$

Ответ. Существует.

Задача № 5

Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 160, которые не делятся на 4.

Решение

1. Найдём сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 160.

1, 2, 3, … - арифметическая прогрессия, в которой $a_1 = 1$, $d = 1$,

$a_{160} = 160$. *Воспользуемся формулой* $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

$$S_{160} = \frac{1 + 160}{2} \cdot 160 = 161 \cdot 80 = 12\,880$$

2. Найдём сумму всех натуральных чисел, кратных 4 и не превосходящих 160.

последовательность (c_n) *чисел, кратных 4, задаётся формулой* $c_n = 4n$.

(c_n) *- арифметическая прогрессия, в которой* $c_1 = 4$, $d = 4$, $c_n = 160$, $n = 160 : 4$.

$n = 40$.

$$S_{40} = \frac{4 + 160}{2} \cdot 40 = 164 \cdot 20 = 3280$$

3. Найдём сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 160, которые не делятся на 4. Эта сумма равна сумме всех натуральных чисел, не превосходящих 160, без суммы натуральных чисел, кратных 4, т.е.

$$12\,880 - 3280 = 9600.$$

Ответ. Сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 160, которые не делятся на 4, равна 9600.

Задача № 6

В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 132, а сумма второго и третьего членов равна 110. Найдите первые три члена этой прогрессии.

Решение

По характеристическому свойству геометрической прогрессии

$$b_2 = \sqrt{b_1 \cdot b_3} \Rightarrow b_2^2 = b_1 \cdot b_3.$$

По условию задачи $\begin{cases} b_1 + b_2 = 132, \\ b_2 + b_3 = 110, \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 = 132 - b_2, \\ b_3 = 110 - b_2. \end{cases}$

Перемножив уравнения, получим $b_1 \cdot b_3 = (132 - b_2)(110 - b_2)$.
Полученное уравнение перепишем в виде:

$$b_2^2 = (132 - b_2)(110 - b_2)$$

$$b_2^2 = 14520 - 132b_2 - 110b_2 + b_2^2,$$

$$132b_2 + 110b_2 = 14520,$$

$$242b_2 = 14520,$$

$$b_2 = 60.$$

Тогда $b_1 = 132 - 60 = 72,$

$b_3 = 110 - 60 = 50.$

Ответ. 72, 60, 50

Предостережение.

74% всех участников экзамена не приступали или не смогли решить это задание (наивысший балл получили 23% участников экзамена).

Записав в ответ только два члена прогрессии, можно потерять один балл.

Обратите внимание на критерии проверки: одна арифметическая ошибка – потеря одного балла, а две и более арифметических ошибок – потеря всех баллов за это задание

Задача № 7

Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия. Известно, что $a_5+a_9 = 40$. Найдите $a_3 + a_7 + a_{11}$.

Задача № 8

Сумма третьего и тринадцатого членов арифметической прогрессии равна 11. Найдите сумму первых пятнадцати её членов

Задача № 9

Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии на 200 больше суммы следующих её членов. На сколько сумма первых десяти членов этой прогрессии больше суммы следующих десяти её членов?

Задача № 10

Числа $\sqrt{7}+3$ и $\sqrt{2}$ являются четвёртым и седьмым членами геометрической прогрессии Найдите сумму четвёртого и десятого членов этой прогрессии.

Совет

Формулы арифметической и геометрической прогрессий, используемые для решения, обязательно записывайте и в бланке, и на черновике. Закончив решение, запишите ответ, перечитав вопрос задания. Если останется время, проверьте ещё раз, что полученные числа образуют арифметическую или геометрическую прогрессии, удовлетворяющие условию задачи.

Спасибо за внимание!