

Дисциплина

Моделирование химическо-технологических процессов

Тема №7

ОСНОВЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Воробьев Евгений Сергеевич

Основные понятия

- ▣ **Оптимизация** — это целенаправленная деятельность, заключающаяся о получении наилучших результатов при соответствующих условиях. Постановку задачи оптимизации предполагает наличие объекта оптимизации, будь то человеческая деятельность в течение определенного периода времени или производственный процесс.

Постановка задачи оптимизации

Наиболее сложной проблемой данного решения является постановка задачи оптимизации.

Неправильная постановка приводит к ошибочным результатам или исключает решение данной задачи.

Типичным случаем неправильной постановки задачи оптимизации является распространенная ошибка, когда хотят найти **оптимальные значения нескольких величин одновременно**, например *получить максимальный выход продукции при минимальном расходе сырья*. Поскольку минимальный расход сырья, очевидно, равен нулю, ни о каком максимальном выходе продукции здесь

Постановка задачи оптимизации

Правильная постановка оптимальной задачи в этом случае должна звучать так : **«Получить максимальный выход продукции при заданном расходе сырья»** или **«Для заданного выхода продукции обеспечить минимальный расход сырья»**. В каждой такой формулировке соблюдается требование нахождения оптимального значения **только одной величины**, что является необходимым условием постановки оптимальной задачи.

Когда требуется оптимизировать несколько величин, то надо создавать специальный **критерий**

Постановка задачи оптимизации

Как вариант можно использовать критерий оптимизации, который будет учитывать эти оба параметра одновременно.

Например с использованием суммы конкурирующих параметров с соответствующими весовыми коэффициентами

$$R = \sum_{i=1}^k a_i \cdot Y_i$$

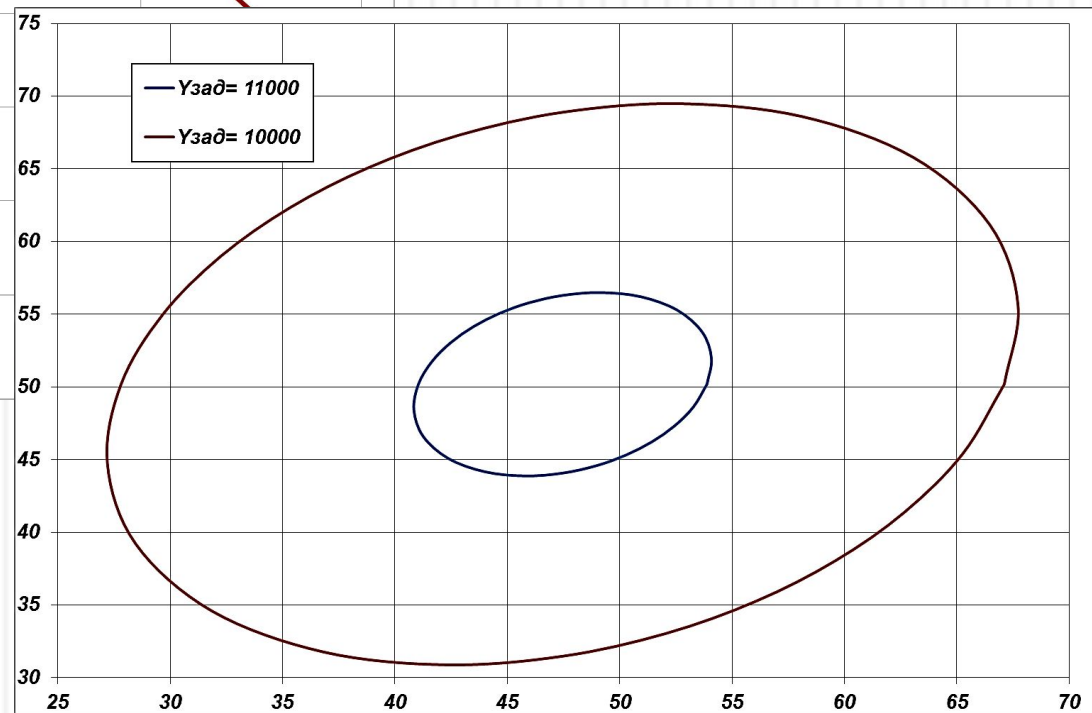
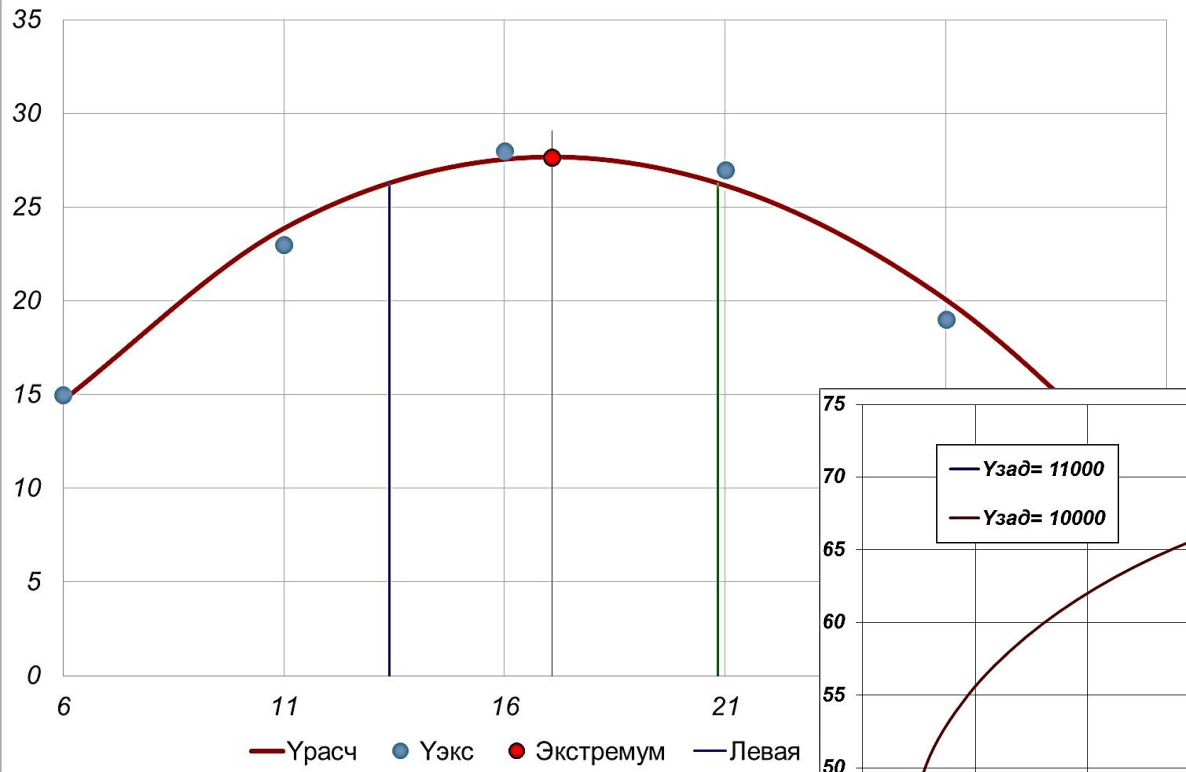
где: a_i – весовые коэффициенты изменяющиеся от 0 до 1, что позволяет учитывать каждый из параметров на определенном уровне.

Математическая постановка

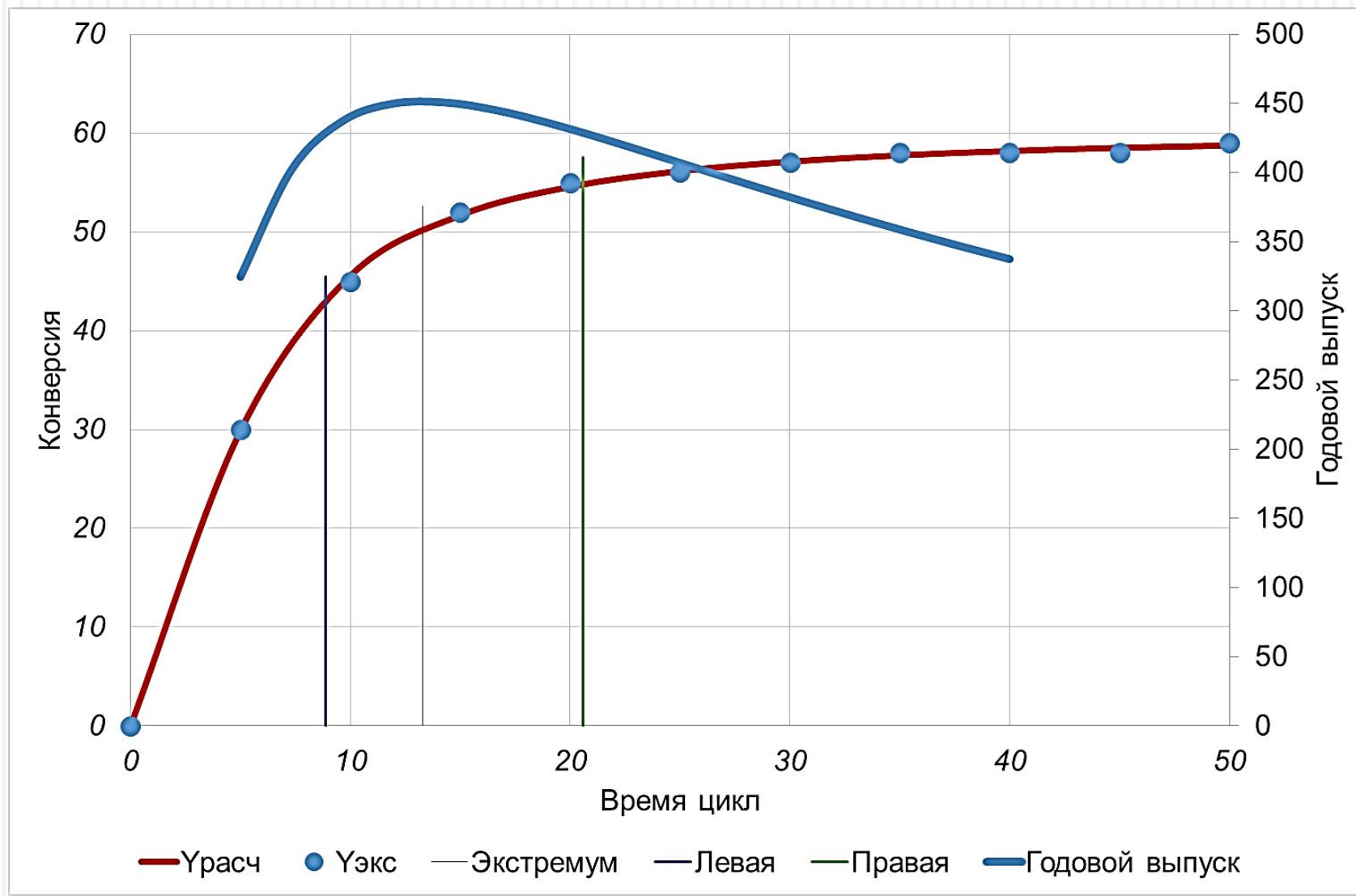
Задачей оптимизации в математике называется задача о нахождении экстремума (минимума или максимума) вещественной функции в некоторой области факторного пространства.

Как правило, рассматриваемая область задается набором ограничений в виде равенств или неравенств по входным параметрам и выходной функции.

Виды оптимумов



Виды оптимумов



Постановка задачи оптимизации

В процессе проектирования ставится обычно задача определения наилучших значения параметров объектов для получения заданного значения исследуемой функции. Такая задача называется оптимизационной. Для ее постановки необходимы:

1. Допустимое множество входных параметров $X (x_1, x_2 \dots x_n)$;
2. Целевая функция $Y=F(X)$;
3. Критерий поиска (минимальное, максимальное или конкретное значение функции).

Классификация методов оптимизации

Методы оптимизации классифицируют в соответствии с задачами оптимизации:

- Локальные методы: сходятся к какому-нибудь локальному экстремуму целевой функции. В случае унимодальной целевой функции, этот экстремум единственен, и будет глобальным максимумом или минимумом.
- Глобальные методы: имеют дело с многоэкстремальными целевыми функциями. При глобальном поиске основной задачей является выявление тенденций глобального поведения целевой функции.

Классификация методов оптимизации

Существующие в настоящее время методы поиска можно разбить на три большие группы функций:

- **Детерминированные** – которые всегда возвращают одно и тоже значение;
- **Случайные (стохастические)** – несут в себе случайную составляющую, которую надо учитывать в расчетах, используя механизмы статистического анализа;
- **Комбинированные** – имеют обе составляющие, часть элементов описываются детерминированными функциями, а другие

Классификация методов оптимизации

По размерности методы оптимизации делят на:

- методы **одномерной оптимизации**, когда функция зависит от одного входного параметра;
- методы **многомерной оптимизации** – функция зависит от нескольких параметров и требует специальных приемов в её оптимизации.

По методам решения делятся на:

- **аналитические методы;**
- **численные методы;**
- **графические методы.**

Классификация методов оптимизации

По вычислительным возможностям делятся на:

- **прямые методы**, требующие только вычислений целевой функции в точках приближений;
- **методы первого порядка**: требуют вычисления первых частных производных функции, через которые определяются пути движения к оптимуму;
- **методы второго порядка**: требуют вычисления вторых частных производных, то есть гессиана целевой функции, что позволяет проводить более детальный анализ поведения исследуемой функции с точках приближения.

Классификация численных методов оптимизации

По виду целевой функции задачи оптимизации и методы их решения можно разделить на классы:

- Задачи оптимизации, в которых целевая функция и ограничения являются линейными функциями и решаются методами **линейного программирования**, используя прямые методы.
- Иначе имеем дело с задачами **нелинейного программирования**, которые применяют методы с вычислениями производных от исследуемой функции. К ним можно отнести методы Лагранжа, Ньютона, Куна-Таккера и др.

Реализация методов оптимизации

Способ нахождения экстремума определяется классом задачи. Но перед тем, как получить математическую модель, нужно выполнить ряд этапов:

- Определяем границы системы оптимизации:
 - Отбрасываем связи объекта оптимизации с внешним миром, которые не могут сильно повлиять на результат оптимизации;
- Выбираем управляемые переменные (те которые будем меняться)
 - «Замораживаем» неуправляемые переменные;
- Определяем ограничения на управляемые переменные:
 - Технологические и экономические ограничения;
- Выбираем целевого критерия оптимизации

Реализация задач линейного программирования

Задача

Предприятие выпускает два вида продукции (Пр1 и Пр2) используя три вида сырья (Ср1, Ср2, Ср3). Требуется обеспечить максимальный выпуск продукции в стоимостной оценке, при заданных запасах сырья, расходных коэффициентах для производства каждого

		Пр1	Пр2
	Зап.	115,25	257,43
Ср1	4000	5	13,3
Ср2	1400	5	3,2
Ср3	1600	6,5	1,2
	Цена	176	152

Надо получить максимальную прибыль

R= 59412,28 Прибыль

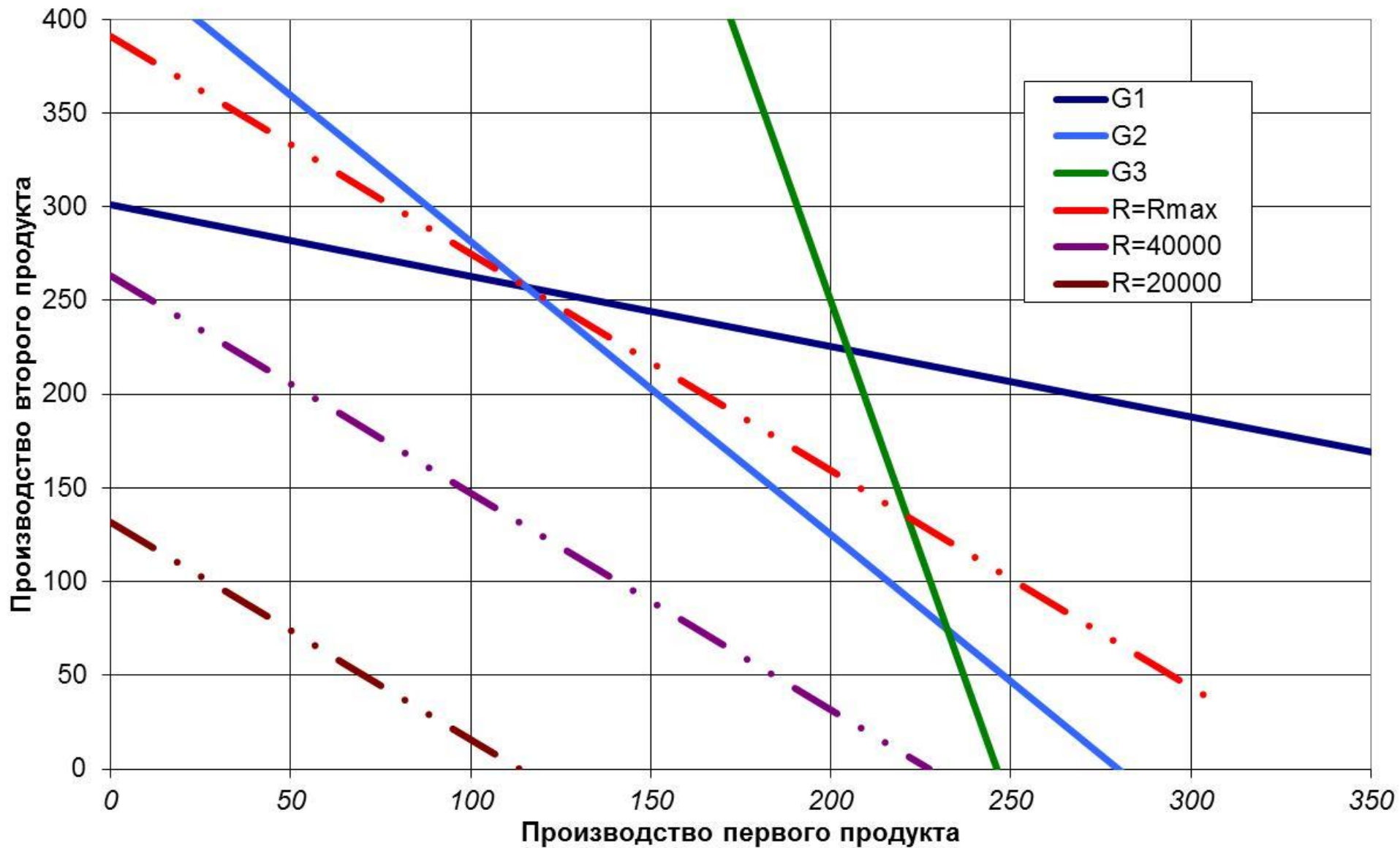
При следующих ограничениях

G1= 4000 ≤ 4000

G2= 1400 ≤ 1400

G3= 1058,02 ≤ 1600

Графическая интерпретация решения



Другие задачи линейного программирования

- Транспортные задачи по доставке сырья и готовой продукции в разные точки (различная стоимость доставки и разная цена продукции) с минимизацией расходов на доставку;
- Оптимальный путь движения от одного пункта к другому с учетом условий дорожного движения (пробки, дорожные работы и др.)
- Маркетинговые операции (область продаж и возможные цены)
- Планирование производства и его вспомогательных отделений и др.

Оптимизация экономических задач

Любая задача оптимизации предполагает наличие конкурирующих процессов:

- Количество и качество продукции;
- Количество продукции – расход сырья.

Существуют и частные случаи оптимальных задач, когда требуется найти экстремальные значения какого-либо параметра:

- Определение оптимального времени пребывания реагентов;
- Нахождение оптимального температурного профиля по длине реактора;

Оптимизация в области экономики исследована наиболее подробно, поэтому рассмотрим пример из этой области.

Оценка эффективности производства

Общую оценку экономической эффективности процесса производят по следующим показателям:

1. **Производительность B** , объем выпускаемой продукции, измеряемый в единицах продукции в единицу времени;
2. **Объем капитальных вложений Φ** в данное производство, исчисляемый в денежных единицах;
3. **Эксплуатационные затраты \mathcal{E}** на ведение процесса, измеряемые в денежных единицах на единицу времени;
4. **Качественные показатели** выпускаемого продукта K , от которых зависит рентабельность производства, так как цена реализованной продукции характеризуется ее качеством.

Получаем критерий оптимальности, как функцию этих параметров:

$$R = R(B, \Phi, \mathcal{E}, K)$$

$$s_{np} = \frac{1}{B} (S_c + S_v + S_n)$$

s_{np} – себестоимость продукции;

$$S_c = B \left[s_c - (1 - \gamma) \cdot s_{om} - \sum_{i=1}^n s_{nni} \beta_i \right] \approx B \cdot s'_c$$

S_c – затраты на сырье, которые пропорциональны производительности и могут учитываться через коэффициент использования сырья, дополнительные доходы от реализации побочных продуктов:

$$S_v = B \cdot \left(\sum_{i=1}^m s_{\varepsilon i} \cdot q_i + s_3 \right) = B \cdot s'_v$$

S_B – затраты на переменные расходы включают стоимость вспомогательных материалов, энергии и т.д. Могут иногда включать и затраты на оплату труда работников. Они так же пропорциональны производительности:

$$S_n = S_a + S_p + S_z$$

S_n – затраты на постоянные расходы включает в себя стоимость основных средств Φ и затраты на ремонт P и оплату труда ремонтников Z . Стоимость основных средств учитывается через амортизацию оборудования;

$$S_a = \frac{\Phi \cdot H_a}{100} = \frac{\Phi + P - L}{T}$$

S_a – затраты на амортизацию;

Φ – стоимость основных средств;

P – затраты на ремонт;

L – ликвидационная стоимость основных средств;

T – срок службы.

Себестоимость продукта

Подставив все сделанные выводы можно получить окончательную формулу для расчета себестоимости продукта, которая и должна лежать в основе расчета оптимальных условий ведения процесса с точки зрения экономики:

$$S_{np} = S'_c + S'_e + \frac{\Phi + P - Л}{B \cdot T} + \frac{S_p + S_3}{B}$$

Анализ решение ОПТИМИЗАЦИОННЫХ задач в ЭКОНОМИКЕ

Важным показателем производства является прибыль:

$$П = B \cdot (s_{ц} - s_{пр})$$

но она не может служить объективной оценкой эффективности производства, рассмотрим это на следующем примере – имеются два производства со следующими показателями:

Показатель	Производство 1	Производство 2
Производительность	1000	2000
Себестоимость	100	120

При цене продукции в 140 ед. оба предприятия имеют одинаковую прибыль в 40000 ед., но первое из них явно рентабельнее, т.к. у него себестоимость продукции ниже.

Для более полной оценки эффективности надо используем норму прибыли согласно формулы:

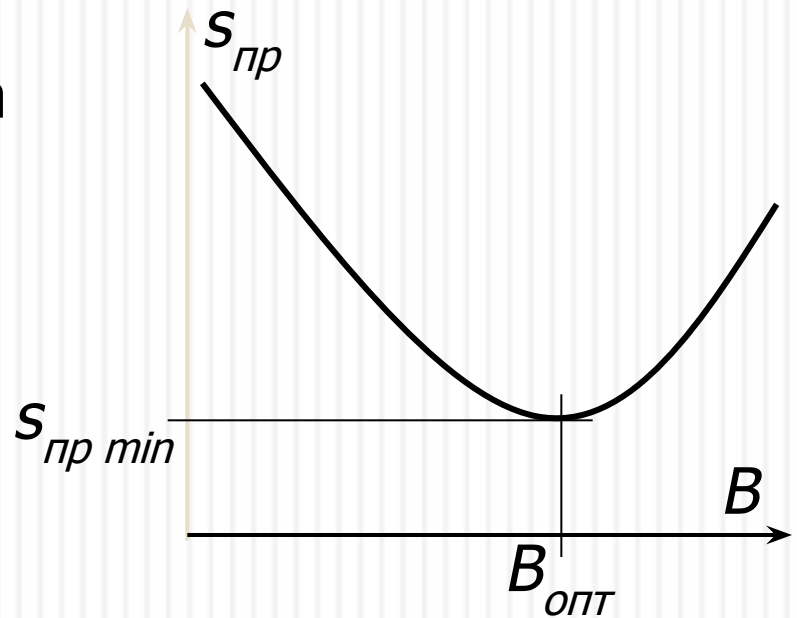
$$H_n = \frac{S_{ц} - S_{пр}}{S_{пр}}$$

по ней мы получим 40% и 16,7% соответственно по каждому из производств, т.е. первое производство в 2,5 раза рентабельнее

Иногда используют подобную формулу и для оценки эффективности капиталовложений:

$$H_n = \frac{B \cdot (S_{ц} - S_{пр})}{\Phi}$$

Обычно для производства известна оптимальная производительность, которая характеризуется минимальной себестоимостью продукции, характерный вид этой зависимости показан на графике:



На графике видно, что в точке оптимума производная равна нулю.

Прибыль в качестве критерия оптимальности

Первоначально выведем формулу критерия оптимальности:

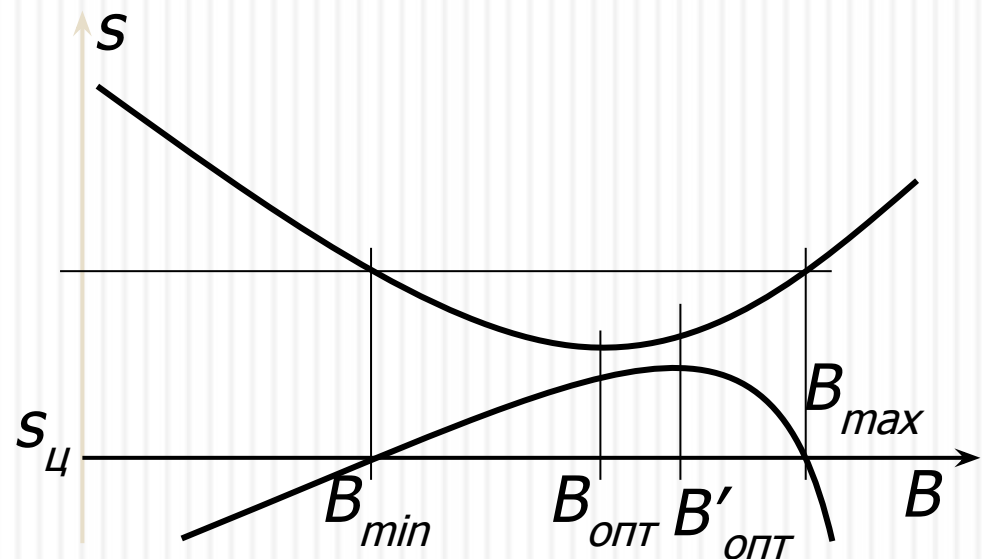
Сам критерий будет иметь вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial B} = s_{\text{ц}} - s_{\text{пр}} - B \frac{\partial s_{\text{пр}}}{\partial B} = 0$$

$$\frac{\partial s_{\text{пр}}}{\partial B} = \frac{s_{\text{ц}} - s_{\text{пр}}}{B}$$

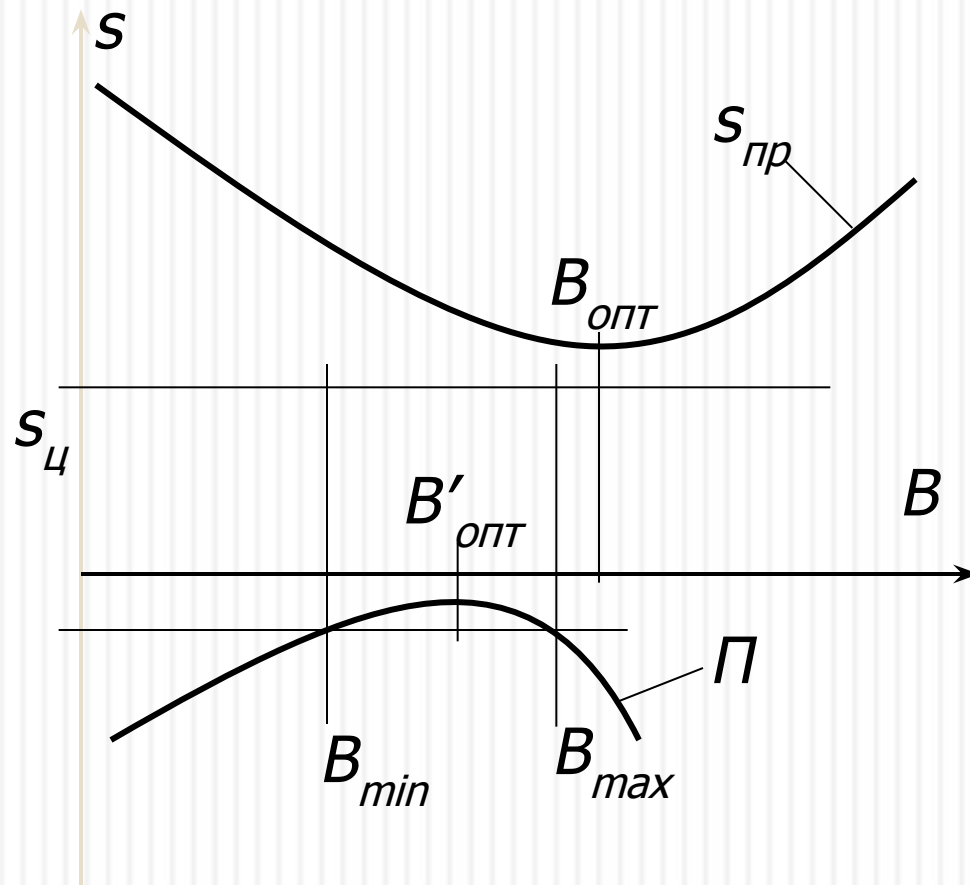
Попробуем делать анализ графически:

У нас существует область положительной прибыли от B_{\min} до B_{\max} , но максимальная прибыль находится в точке $B'_{\text{опт}}$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{s_{\text{ц}} - s_{\text{пр}} \cdot (B'_{\text{опт}})}{B_{\text{опт}}}$$

Могут существовать условия, когда цена продукта ниже себестоимости, но и здесь существует оптимальная производительность, обеспечивающая минимизацию потерь. Точно так же можно построить критерии и для других соотношений.



Так норма прибыли будет иметь вид:
и даст результат как и оптимальная
себестоимость

$$\frac{\partial H_n}{\partial B} = -\frac{1}{s_{np}^2} \cdot \frac{\partial s_{np}}{\partial B} = 0$$

Норма рентабельности
капиталовложений равна:
и будет приводит к уменьшению
показателя относительно
оптимальной прибыли

$$\frac{\partial s_{np}}{\partial B} = \frac{s_{ц} - s_{np}}{B} \cdot \frac{1}{1 + B \frac{\Phi_0}{\Phi'}}$$

Если строить критерий относительно качества продукции,
предположив, что качество падает с увеличением выпуска
продукции, то оптимальное значение выпуска всегда будет
ниже чем в случае с оптимальной прибылью.

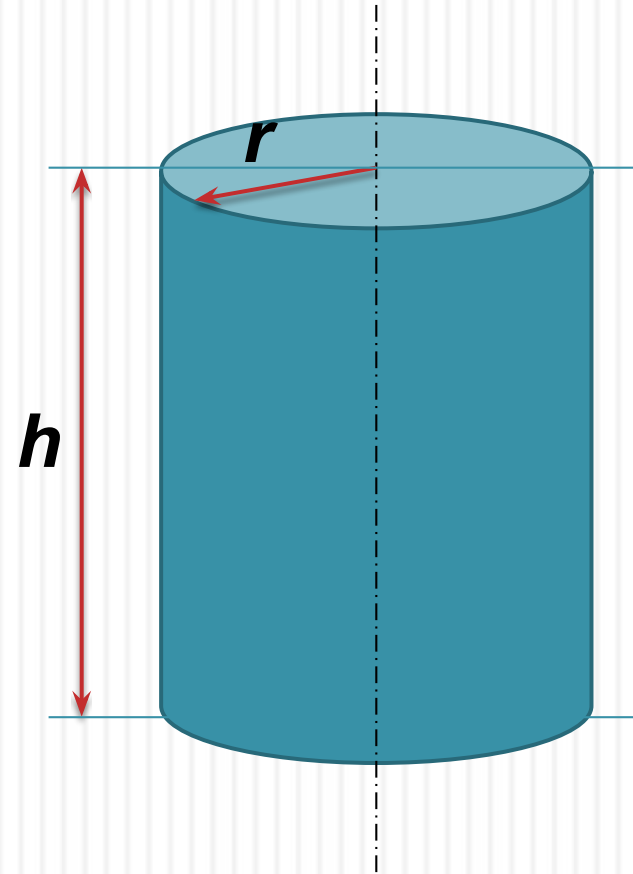
На основании этой же методики можно строить и другие
задачи по нахождению оптимальных условий.

Примеры решения оптимальных задач в технике и жизни

Задача:

Предположим нам надо рассчитать потребности в материале для изготовления реактора (в виде цилиндра) объемом в 1 м^3 . При этом решить задачу оптимизации:

- Расход материала должен быть минимальным;
- Минимальный вес аппарата;
- Внутренние размеры позволяли разместить определенное оборудование (мешалки, теплообменники, катализатор и т.д.)



Решение:

В начале запишем две формулы объема и площади поверхности для реактора:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

где: r – радиус, h – высота цилиндра

Теперь преобразуем эти формулы одну в ограничение, а другую в критерий оптимизации и через какую либо программу подбора решения ищем оптимальные радиус и высоту:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1$$

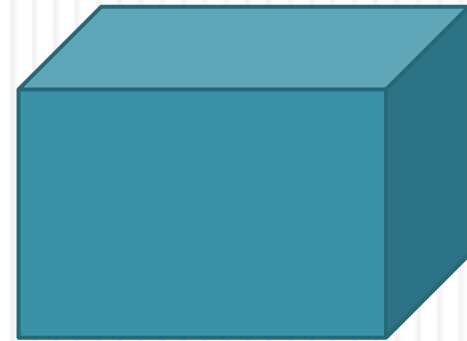
$$S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \Rightarrow \min$$

$$r, h \rightarrow ?$$

Задачи могут усложняться за счет учета более сложной формы реактора и дополнительных ограничений, например требуется определенная теплоотвод или приход для поддержания заданной температуры и др.

Задача:

Имеется лист металла, из которого требуется изготовить коробку максимального объема, минимизирую потери материала или задаваясь другими условиями (коробка с крышкой, с разными соотношениями сторон и др.)



Решение:

Критерием оптимизации будет объем коробки, который стремится к максимуму. Ограничениями должны стать площадь листа и схемы его раскроя с целью получения необходимых элементов коробки.

Задача:

Необходимо попасть из точки А в точку В.

Можно двигаться по дорогам со скоростью $V_1 = 5$ км/ч, а при движении напрямую скорость составить $V_2 = 3$ км/ч. Найти оптимальный путь (при условии что время будет минимальным?)

Решение:

Строим уравнение для нахождения времени движения по пути А-Х-С, как функция от X . Для первого участка А-Х получаем:

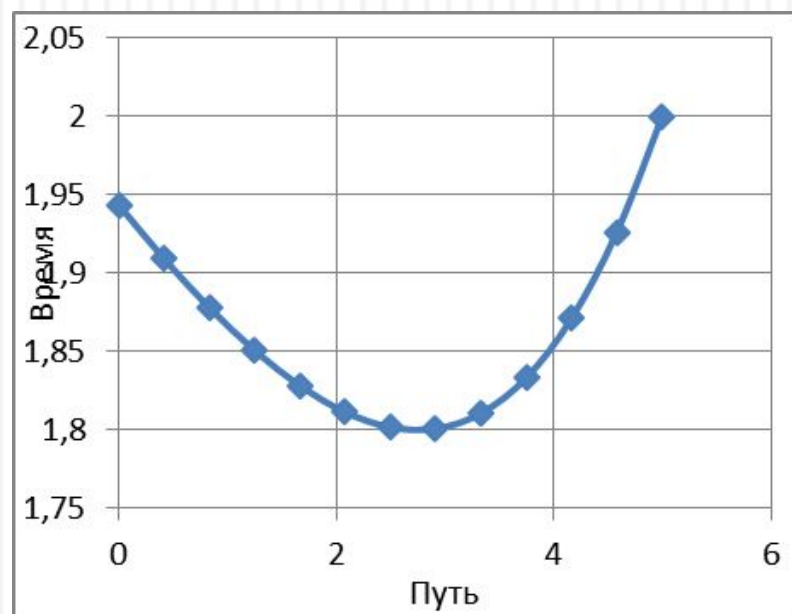
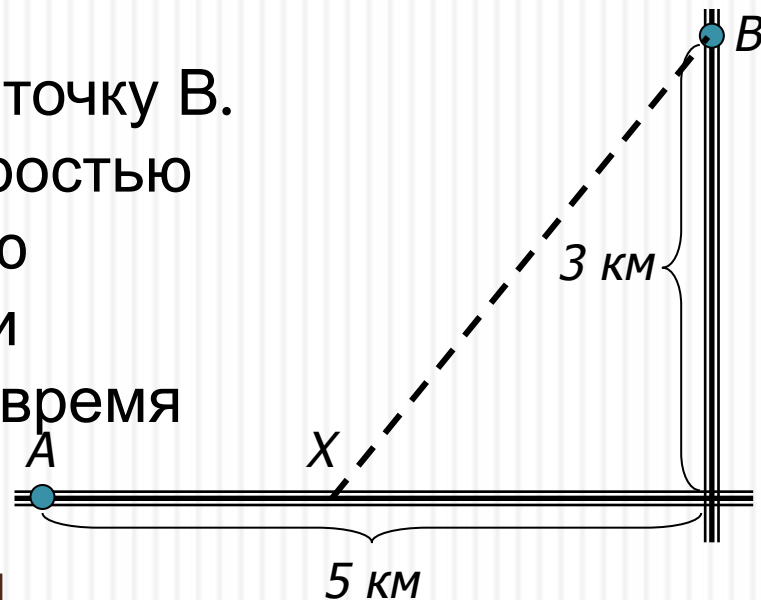
$$\tau_1 = (5 - x) / V_1$$

Для второго участка Х-С через теорему Пифагора находим путь и вычисляем время:

$$L_{XC} = \sqrt{(5 - x)^2 + 3^2}$$

$$\tau_2 = L_{XC} / V_2$$

Складываем эти выражения и ищем минимальное время изменяя



Задача:

Условия предыдущей задачи может быть усложнена. Например можно искать оптимальную стратегию движения по трассе в зависимости от условий дорожной обстановки.

Задание может звучать, например, так: построить оптимальную стратегию движения автомобиля по трассе, минимизирую расход топлива?

Решение:

Для описания процесса движения нам надо использовать интегральное уравнение, описывающее движение автомобиля:

$$S = \int_{\tau=0}^{\tau_{\text{кон}}} V(\tau) \cdot d\tau$$

На основании данных расхода топлива при равномерном движении и ускорениях и замедлениях переходим от скорости движения к расходу топлива при равномерном движении и потом при ускорении (торможении) добавлять лишнее топливо в зависимости от ускорения, которое является первой производной от

Многопараметрические задачи

При оптимизации многопараметрических нелинейных задач возникают проблемы определения направления поиска лучшего значения через частные производные функции. Однако, при наличии ограничений по области поиска оптимума, можно оказаться за границами допустимого пространства. Это требует разработки специальных приемов обхода этих ситуаций, которые представлены разными методами поиска оптимума:

- Метод штрафных функций;
- Комплексный метод;
- Метод случайного поиска и др.

Комплексный метод (основа)

Данный метод позволяет совершить поиск оптимума произвольной функции (как заданной аналитически, так и экспериментальной) в произвольной области при наличии ограничений. В методе не требуется возможность определения производных. В основе метода лежит **комплекс** – геометрическая фигура, имеющая $2n$ вершин, где n – размерность факторного пространства.

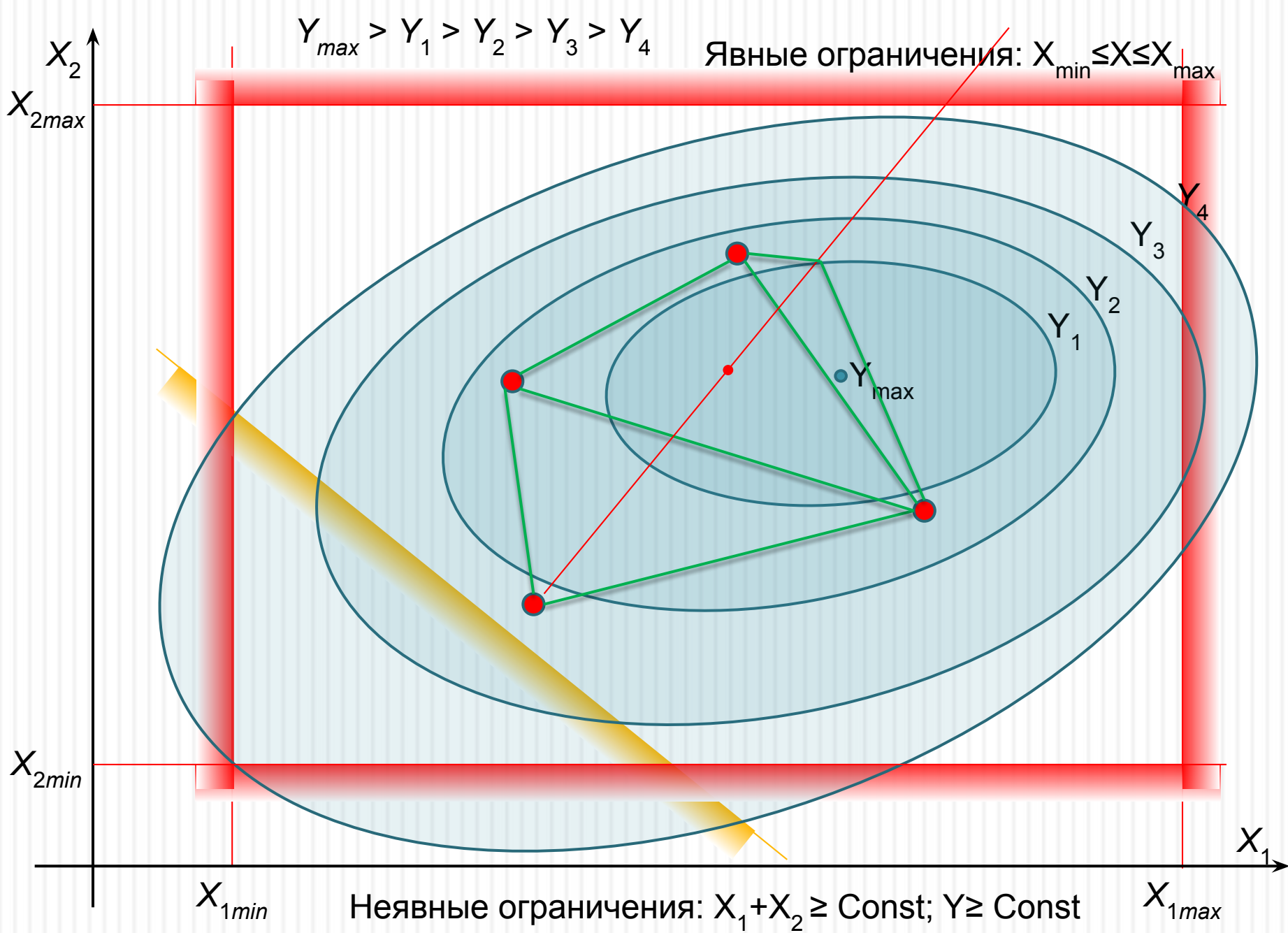
Основным недостатком метода является невозможность его реализации в области с несколькими экстремумами.

Комплексный метод (ограничения)

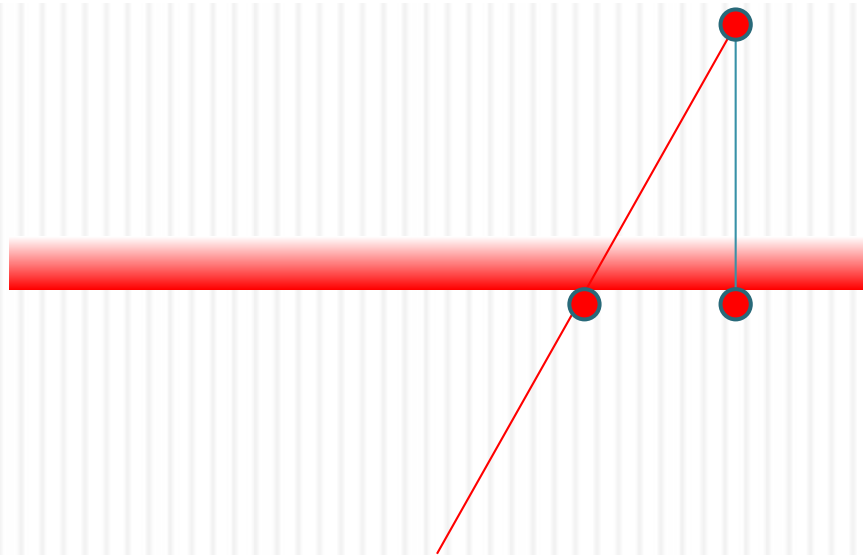
Факторное пространство поиска может иметь следующие ограничения:

- **Явными ограничения** – которые просто вычисляются на основании данных параметров и имеют вид $X \geq X_{max}$ или наоборот;
- **Неявными ограничения** – для вычисления которых требуются дополнительные вычислительные процедуры. Например: $\alpha_1 \cdot X_1 + \alpha_2 \cdot X_2 \geq b_1$ или $Y \geq b_2$

Комплексный метод приводит комплекс в область экстремума и позволяет завершить поиск в нем, когда размер комплекса или разница Y станут

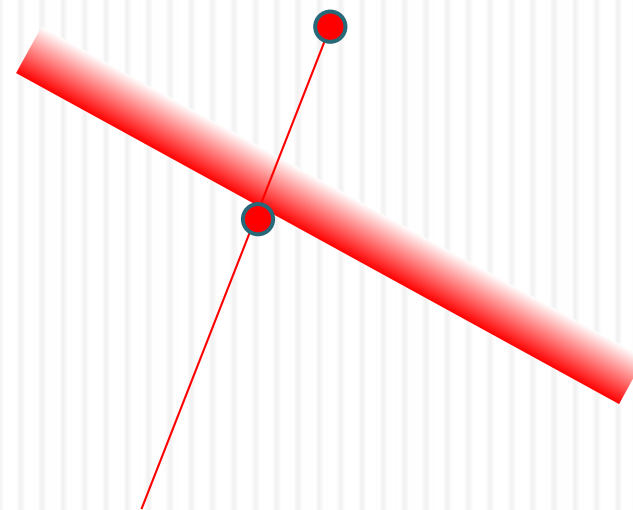


Учет ограничений



Явное ограничение реализуется двумя путями:

- Одна из координат переносится на ограничение;
- Определяется точка пересечения луча с

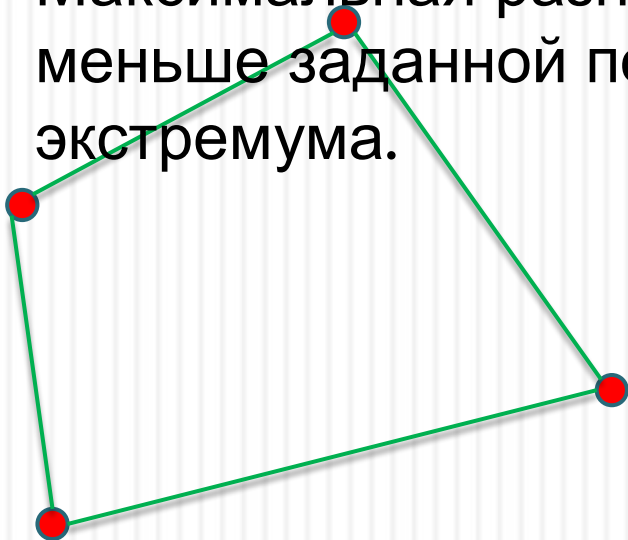


Неявное ограничение реализуется через определение точки пересечения луча и ограничения через определение корня функции, которая вычисляется как

Завершение расчета

Расчет завершается при достижении одного из двух критериев:

- Характерный размер комплекса меньше заданной погрешности работает в области не яркого экстремума (максимальное расстояние между двумя вершинами комплекса);
- Максимальная разница функций в вершинах комплекса меньше заданной погрешности для ярко выраженного экстремума.



Для авто масштабирования погрешностей их можно приводить к нормированным значениям (размер комплекса не более 1-5 % от факторного пространства, разница высот в отношении к

Реализация оптимизационных задач в Excel

Решение оптимизационных задач в MS Excel может быть реализовано двумя путями:

- ✓ Через надстройку «Поиск решения», когда на листе готовим критерий оптимальности и ограничения в виде условных операторам и, заполнив форму надстройки, выполняем поиск оптимального решения;
- ✓ Реализуем процедуру поиска либо на листе Excel или создаем программу в среде VBA.