Стереометрические задачи

Автор: Трофимов Денис Вячеславович.

Класс 11 в

Руководитель проекта: Рубцова Любовь Николаевна

Стереометрия

Стереометрия — раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве. Основными (простейшими) фигурами в пространстве являются точки, прямые и плоскости. В стереометрии появляется новый вид взаимного расположения прямых: скрещивающиеся прямые. Это одно из немногих существенных отличий стереометрии от планиметрии, так как во многих случаях задачи по стереометрии решаются путём рассмотрения различных плоскостей, в которых выполняются планиметрические законы.

Не стоит путать этот раздел с планиметрией, поскольку в планиметрии изучаются свойства фигур на плоскости (свойства плоских фигур), а в стереометрии — свойства фигур в пространстве (свойства пространственных фигур).

Виды задач

- *нахождение расстояния между прямыми и плоскостями;*
- *нахождение расстояния от точки до прямой и до плоскости;*
- *нахождение площади и периметра сечения фигуры;*
- *нахождения угла между плоскостями;*
- *нахождение угла между прямой и плоскостью;*
- *нахождение угла между скрещивающимися прямыми.*

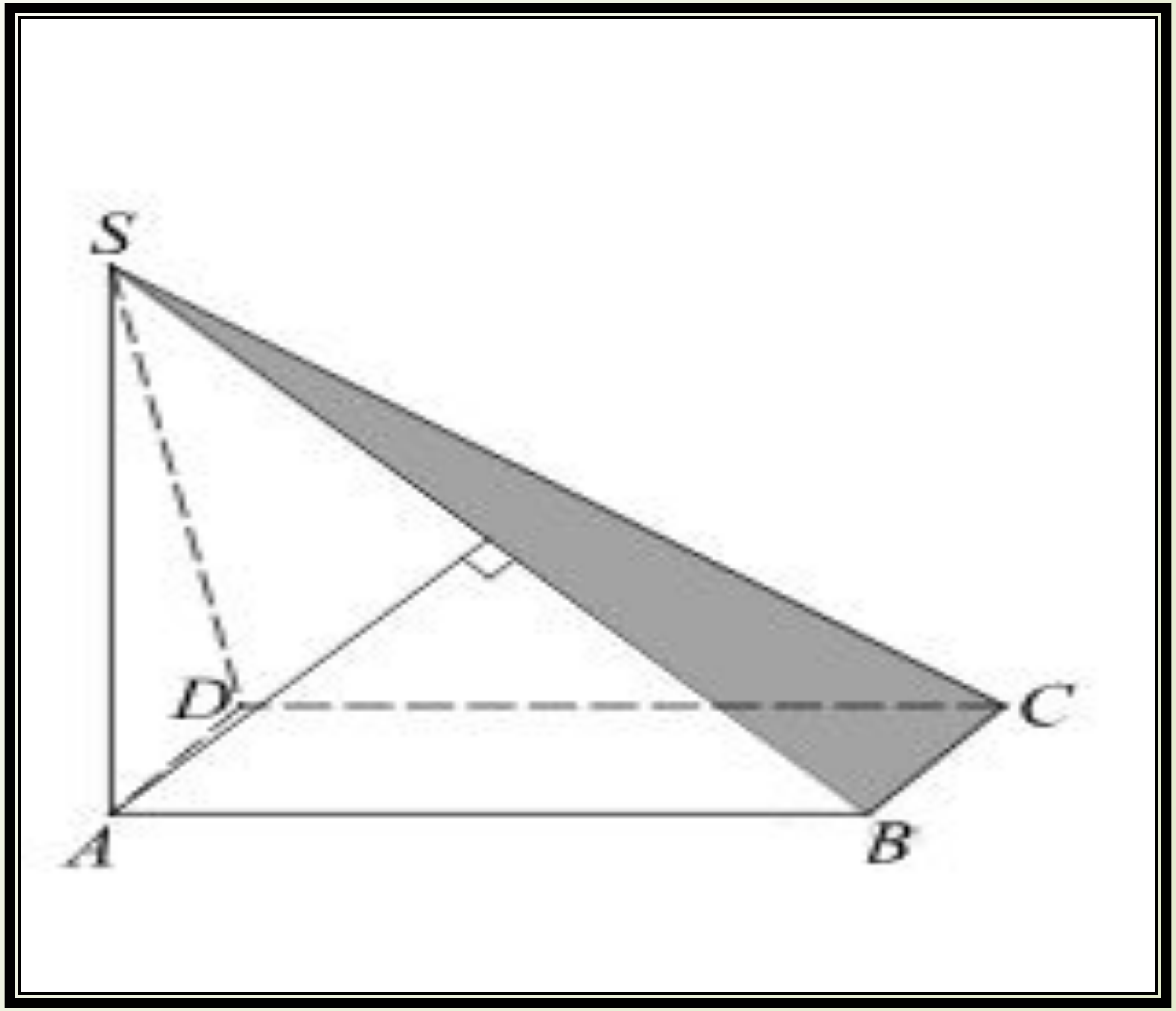
$5\sqrt{3}$

Нахождение расстояния от точки до прямой и до плоскости

В основании четырёхугольной пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со сторонами *AB* = 12 и ВС = $5\sqrt{3}$ Длины боковых рёбер пирамиды *SA* = 5, *SB* = 13, *SD* = 10.

а) Докажите, что *SA* — высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины *A* до плоскости *SBC*.


S
D
C
A
B

Решение

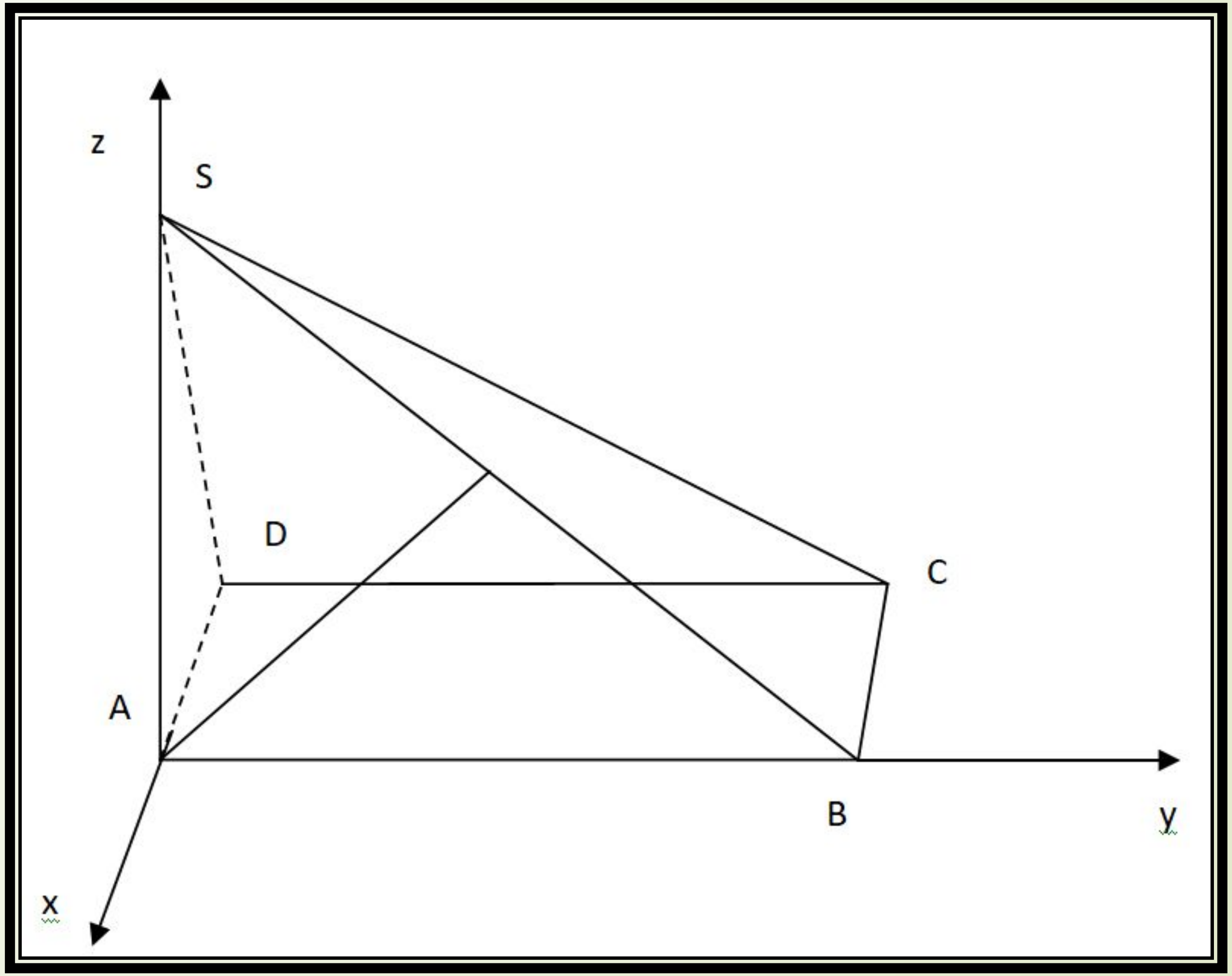
а) Заметим, что $AB^2 + SA^2 = SB^2$ и $SA^2 + AD^2 = SD^2$, поэтому SA ⊥ AB, SA ⊥ AD, значит, SA ⊥ ABC.

б) Опустим из *A* перпендикуляр на *SB*. Он будет перпендикулярен также *BC*, поскольку ASB ⊥ BC $(AS,\ AB \perp BC)$ Поэтому его длина и есть расстояние от *A* до *SBC*. Вычислим ее

d(A,SB) = $\mathrm{d(A,SB)} = \frac{2S_{ASB}}{SB} = \frac{5\times12}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{60}{13}.$

Ответ: $\frac{60}{13}.$

С ПДСК



Решение

1) Найти координаты плоскости точек S, B, C SBC и точки A (0; 0; 0;) S(0; 0; 5), B(0; 12; 0), C(-5; 12; 0), . $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$

2) Найдём расстояние с помощью определителя третьего порядка.

$$\begin{vmatrix} x & y & z-5 \\ 0 & -12 & 5 \\ 5\sqrt{3} & -12 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$-60x + 25\sqrt{3}y + 0 - (-60\sqrt{3} \times (z-5) + 0 - 60x) = -60x + 25\sqrt{3}y + 60\sqrt{3}z - 300\sqrt{3} + 60x =$$

$$25\sqrt{3}y + 60\sqrt{3}z - 300\sqrt{3}$$

Нормаль плоскости $\vec{n}\ \{0;\ 25\sqrt{3};\ 60\sqrt{3}\}$. Расстояние отметим буквой H. n(A; B; C)

$$H = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\ H = \frac{0 \times 0 + 0 \times 25\sqrt{3} + 0 \times 60\sqrt{3} - 300\sqrt{3}}{\sqrt{(25\sqrt{3})^2 + (60\sqrt{3})^2}} = \frac{60}{13}.$$

Ответ: $\frac{60}{13}$.

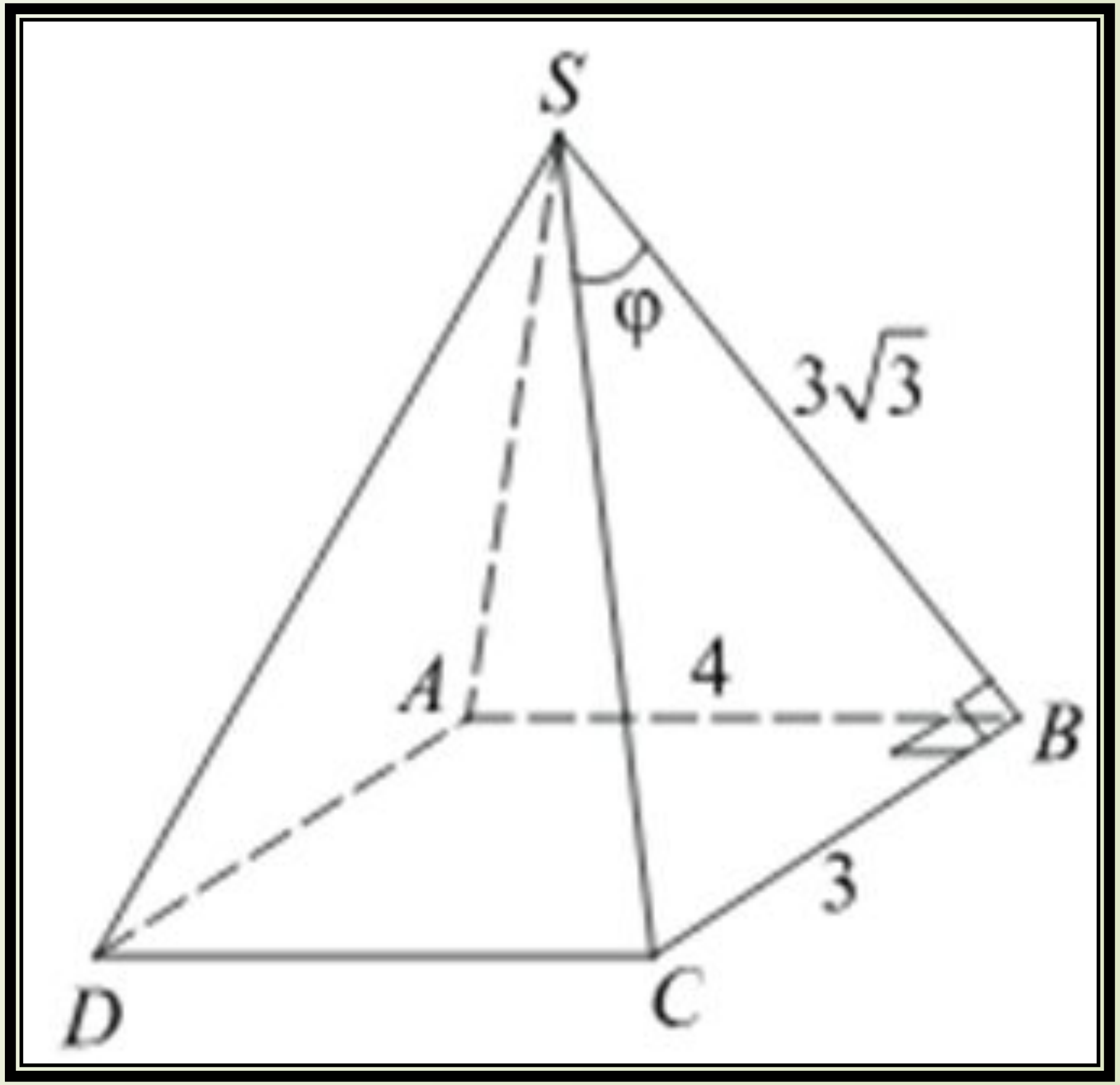
Нахождение угла между прямой и плоскостью

В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами AB = 4 и BC = 3. Длины боковых рёбер пирамиды

$SA = \sqrt{11},\ SB = 3\sqrt{3}, SD = 2\sqrt{5}$

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB



Решение

а) Рассмотрим треугольник SAB, у которого стороны $SA = \sqrt{11}, AB = 4$ и $SB = 3\sqrt{3}$ Значения этих сторон удовлетворяют равенству $SB^2 = SA^2 + AB^2$ следовательно, треугольник SAB прямоугольный, $SA \perp AB$.

Рассмотрим треугольник SAD со сторонами $SA = \sqrt{11}, AD = 3, SD = 3\sqrt{5}$ Длины сторон треугольника удовлетворяют равенству $SD^2 = SA^2 + AD^2$ то есть он является прямоугольным, $SA \perp AD$.

Из перпендикулярности $SA \perp AB$ и $SA \perp AD$ следует, что $SA \perp (ABC)$ и, следовательно, SA — высота пирамиды.

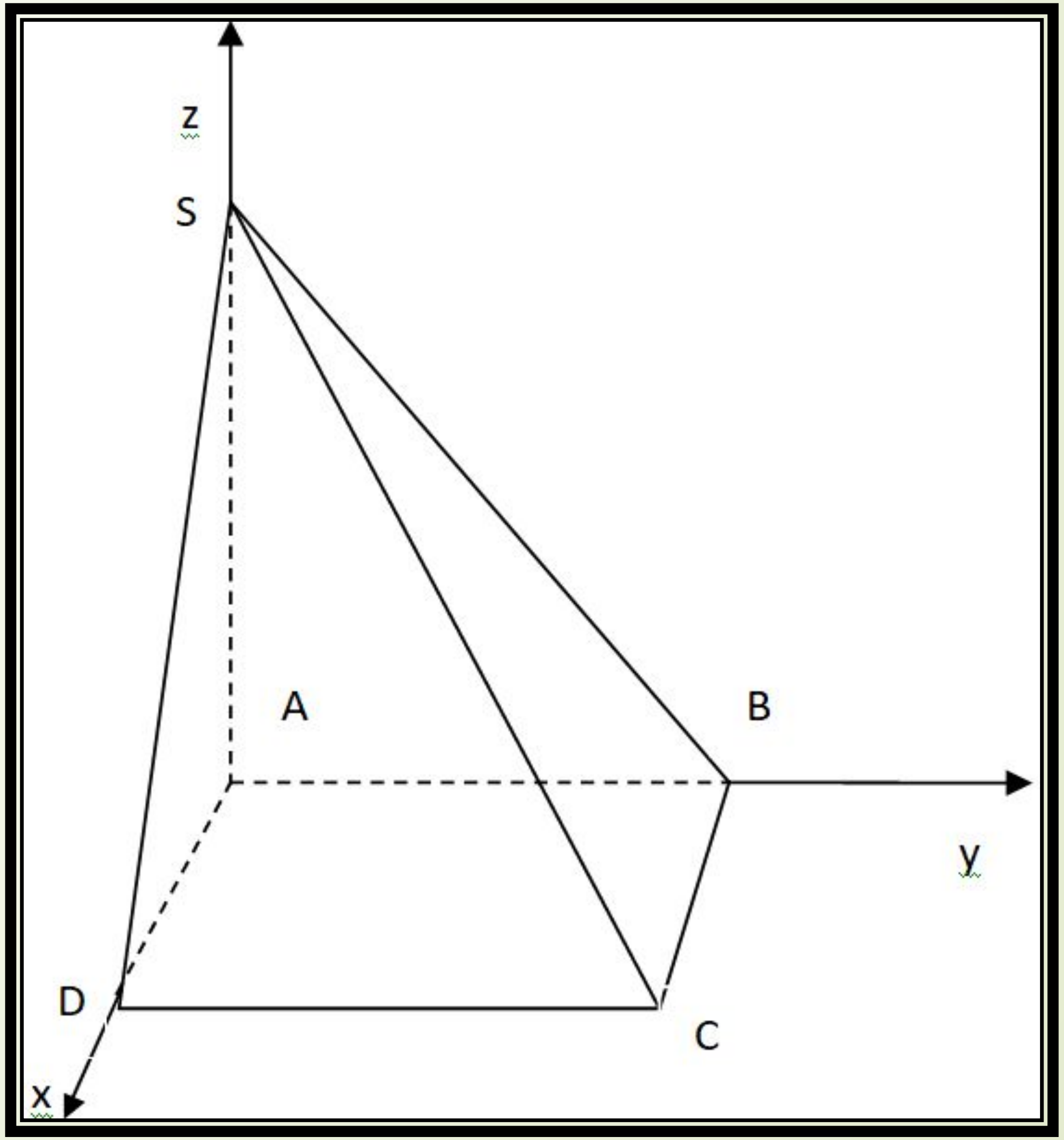
б) Проекция SC на плоскость SAB будет прямая SB. Таким образом, нужно найти угол между прямыми SC и SB (смотри рисунок), то есть угол $\varphi = \angle CSB$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник SCB. Тангенс угла φ равен

$$\tan a = \frac{CB}{SB} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$$

Ответ: 30°.

С ПДСК



Решение.

Найдём координаты точек S, A, B,C.

A(0; 0; 0), B(0; 4; 0), S(0; 0; $\sqrt{11}$), C(3; 4; 0).

$\overrightarrow{sc}-$ направляющий вектор. $\overrightarrow{sc}\{x_c - x_s;\ \ y_c - y_s;\ \ z_c - z_s\}$, $\quad \overrightarrow{sc}\{3; 4;\ -\sqrt{11}\}$

Найдём нормаль плоскости ABS с помощью определителя 3 порядка.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{11} \end{vmatrix} = 0$$

$4\sqrt{11}x + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 4\sqrt{11}x, \vec{n}\{4\sqrt{11};\ \ 0;\ \ 0\}.$

$$\sin a = \frac{\overrightarrow{sc}\times\vec{n}}{|\overrightarrow{sc}|\times|\vec{n}|} = \frac{x_{sc}\times x_n + y_{sc}\times y_n + z_{sc}\times z_n}{\sqrt{x_{sc}^2+y_{sc}^2+z_{sc}^2}\times\sqrt{x_n^2+y_n^2+z_n^2}} = \frac{12\sqrt{11}}{24\sqrt{11}} = \frac{1}{2} = 30^\circ$$

Ответ: 30°

Конец

Спасибо за внимание!!!!