Производн
ая

Содержание

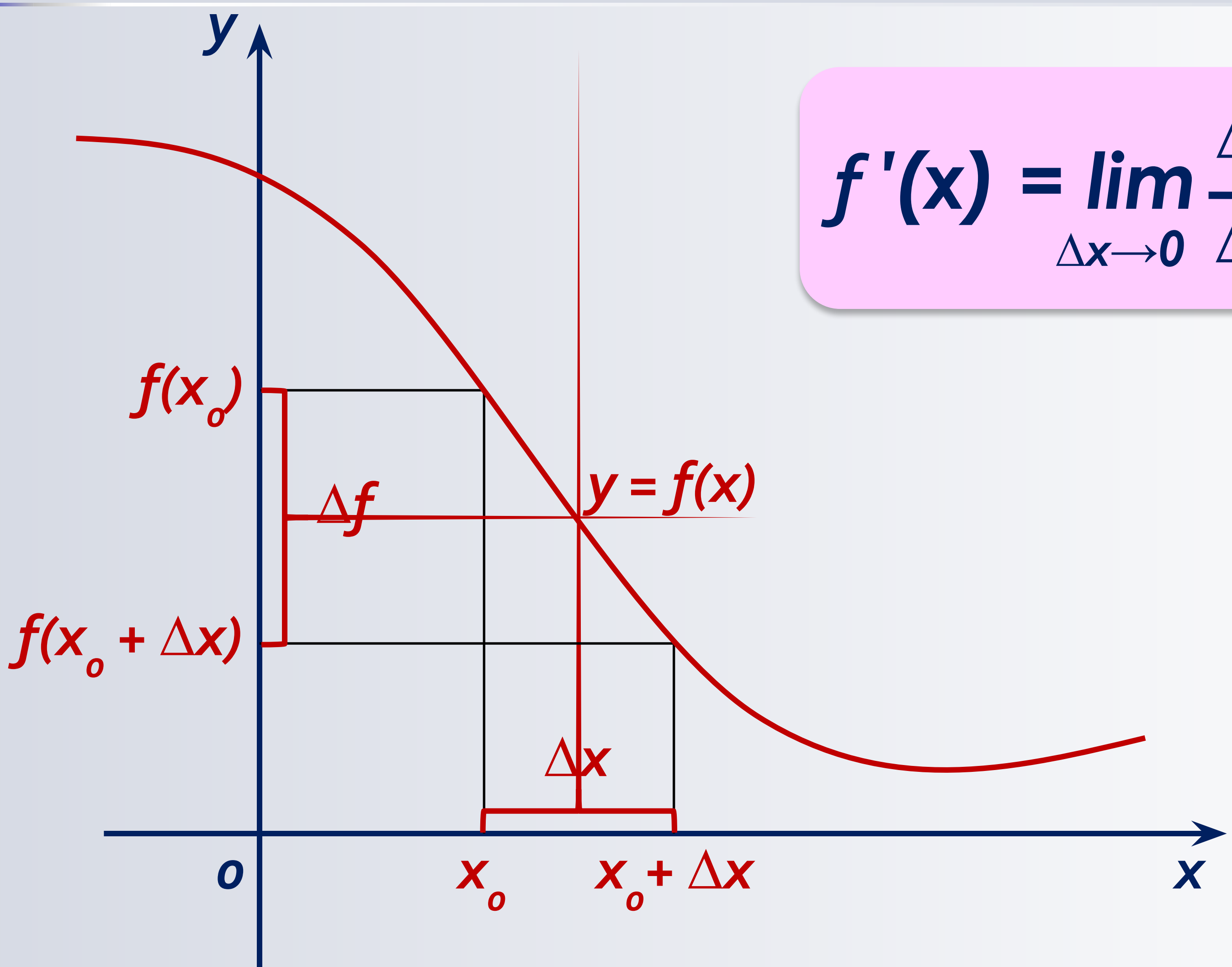
Понятие производной

Производной *функции* $y = f(x)$*, заданной на некотором интервале* $(a; b)$*, в некоторой точке* x *этого интервала называют* ***предел*** *отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Нахождение производной называют ***дифференцированием***

Понятие производной



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Алгоритм нахождения производной

1. *Зафиксировать значение x_o, найти $f(x_o)$.*
2. *Дать аргументу x_o приращение Δx, перейти в новую точку $x_o + \Delta x$, найти $f(x_o + \Delta x)$.*
3. *Найти приращение функции: $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$.*
4. *Составить отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.*
5. *Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.*
6. *Этот предел и есть $f'(x_o)$.*

Примеры

1. Найти производную функции $y = kx + b$ в точке x_o

1. $f\left(x_o\right) = kx_o + b$

2. $f\left(x_o + \Delta x\right) = k\left(x_o + \Delta x\right) + b$

3. $\Delta f = f\left(x_o + \Delta x\right) - f\left(x_o\right) = k\left(x_o + \Delta x\right) + b - \left(kx_o + b\right) =$
$= kx_o + k \cdot \Delta x + b - kx_o - b = k \cdot \Delta x$

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = k$

5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(k\right) = k$

$$\boxed{\left(kx + b\right)' = k}$$

Примеры

2. *Найти производную функции* $y = C$ *(C – const) в точке* x_o

1. $f(x_o) = C$

2. $f(x_o + \Delta x) = C$

3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = C - C = 0$

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$

5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

$$(C)' = 0$$

Примеры

3. Найти производную функции $y = x^2$ *в точке* x_o

1. $f(x_o) = (x_o)^2$
2. $f(x_o + \Delta x) = (x_o + \Delta x)^2$
3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = (x_o + \Delta x)^2 - (x_o)^2 =$

   $= x_o^2 + 2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x_o^2 = 2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2$
4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x_o + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_o + \Delta x$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x_o + \Delta x) = 2x_o$

$$\boxed{\left(x^2\right)' = 2x}$$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ *в точке* x_o

1. $f(x_o) = \sqrt{x_o}$

2. $f(x_o + \Delta x) = \sqrt{x_o + \Delta x}$

3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = \sqrt{x_o + \Delta x} - \sqrt{x_o} =$

$$= \frac{\left(\sqrt{x_o + \Delta x} - \sqrt{x_o}\right)\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} = \frac{\left(\sqrt{x_o + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x_o}\right)^2}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} =$$

$$= \frac{x_o + \Delta x - x_o}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$$

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ *в точке* x_o

$$4.\ \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$$

$$5.\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}$$

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Примеры

5. Найти производную функции ***y = 1/x*** *в точке* x_o

$$1.\ f(x_o)=\frac{1}{x_o}$$

$$2.\ f(x_o+\Delta x)=\frac{1}{x_o+\Delta x}$$

$$3.\ \Delta f=f(x_o+\Delta x)-f(x_o)=\frac{1}{x_o+\Delta x}-\frac{1}{x_o}=$$

$$=\frac{x_o-(x_o+\Delta x)}{x_o(x_o+\Delta x)}=\frac{-\Delta x}{x_o^2+x_o\cdot\Delta x}$$

$$4.\ \frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x(x_o^2+x_o\cdot\Delta x)}=\frac{-1}{x_o^2+x_o\cdot\Delta x}$$

Примеры

5. Найти производную функции y = 1/x в точке x_o

4. $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\left(x_o^2 + x_o \cdot \Delta x\right)} = \frac{-1}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}$$

5. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{-1}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}\right) = -\frac{1}{x_o^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

Таблица производных

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$
$kx + b$	k	e^x	e^x
x^2	$2x$	a^x	$a^x \ln a$
x^n	nx^{n-1}	$tg\,x$	$1/\cos^2 x$
$1/x$	$-1/x^2$	$ctg\,x$	$-1/\sin^2 x$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$	$1/x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\log_a x$	$1/(x \ln a)$

Физический (механический) смысл производной

Если при прямолинейном движении путь s, пройденный точкой, есть функция от времени t, т. е. $s = s(t)$, то ***скорость*** *точки есть* ***производная*** *от пути по времени, т.е. $v(t) = s'(t)$.*

Производная *выражает* ***мгновенную скорость*** *в момент времени t.*

Правила нахождения производной

1. *Если функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *имеют в точке* x *производные, то их сумма* $u(x) + v(x)$ *также имеет в этой точке производную, причем*

$$(u + v)' = u' + v'$$

2. *Если функция* $u(x)$ *имеет в точке* x *производную и* C *– данное число, то функция* $C \cdot u(x)$ *также имеет в этой точке производную, причем*

$$(Cu)' = C \cdot u'$$

Правила нахождения производной

3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные, то их произведение $u(x) \cdot v(x)$ также имеет в этой точке производную, причем

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

4. Если функция $v(x)$ имеет в точке x производную и $v(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Правила нахождения производной

5. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные и $v(x) \neq 0$, то функция $\frac{u(x)}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Производная сложной функции

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

Примеры:

1. $\left((5x-3)^3\right)' = 3(5x-3)^2 \cdot (5x-3)' =$
   $= 3(5x-3)^2 \cdot 5 = 15(5x-3)^2$

2. $\left(\sin(4x+8)\right)' = \cos(4x+8) \cdot (4x+8)' =$
   $= \cos(4x+8) \cdot 4 = 4\cos(4x+8)$

Если функция имеет производную (дифференцируема) в точке х, то она непрерывна в этой точке.