Дискретная математика

Отношения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

- Подмножество $R \subseteq M^n$ называется ***n*** **- *местным отношением*** на множестве M.

- Говорят, что элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ находятся в отношении R, если

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R.$$

- ***Одноместное отношение*** – это просто подмножество М. Такие отношения называют признаками: элемент ***a*** – обладает признаком *R*, если и

$$a \square R \qquad\qquad R \square M$$

- Свойства одноместных отношений это свойства подмножеств *M*, поэтому для случая $n = 1$ термин “отношение” употребляется редко.

- Примером ***трехместного (тернарного) отношения*** является множество троек нападающих в хоккейной команде. Любой из нападающих находится в этом отношении со всеми теми игроками, с которыми он играет в одной тройке (один нападающий может, вообще говоря, участвовать более, чем в одной тройке).

- При $n = 2$ – отношения называются ***двуместными или “бинарными”***. Если a и b находятся в отношении R, это записывается aRb.
- Таким образом, бинарное отношение, заданное на множестве M, это любое подмножество

$$R \subseteq M^2$$

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

Бинарные отношения задаются:

- 1) Списком;
- 2) Матрицей бинарного отношения;
- 3) Графом.

Задание списком

- Списком задаются отношения, где M – конечное множество, а R содержит небольшое количество пар.

Пример:

$M = \{a, b, c\}$ - алфавит из трех букв,

Отношение R – предшествования букв в алфавите. Тогда R содержит пары:

$$R = \{(a,b),(a,c),(b,c)\}$$

Задание матрицей бинарного отношения

- ***Матрица бинарного отношения,*** заданного на множестве $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ это квадратная матрица *C* порядка *n*, в которой элемент c_{ij} определяется так:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i R a_j; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

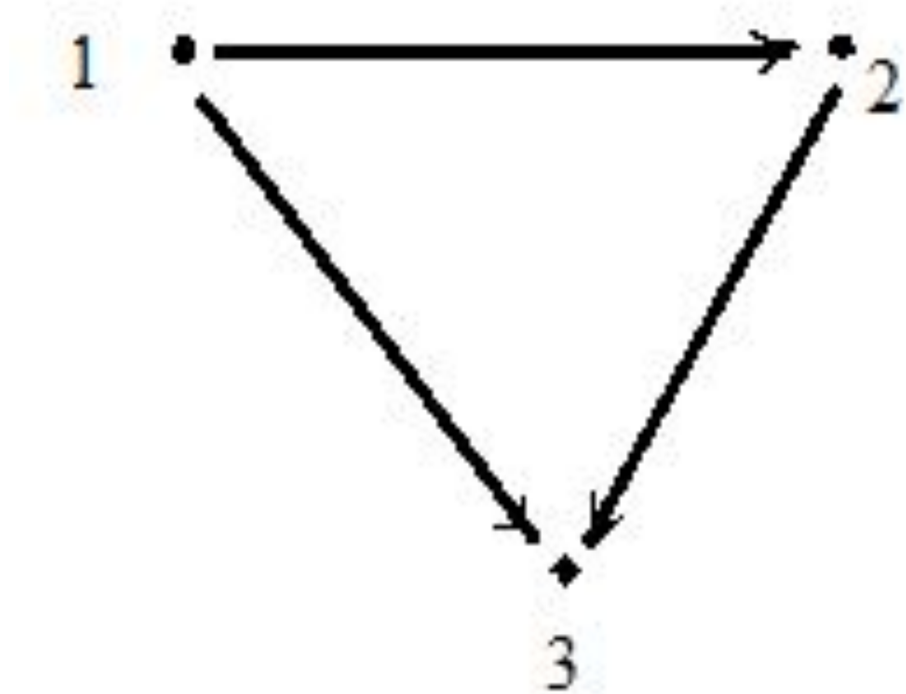
Пример: $M = \{1, 2, 3, 4\}$

- Отношение R – «быть больше или равно»

$\geq$	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	1	1	1	0
4	1	1	1	1

Задание графом

- При задании графом, элементы М сопоставляются одноименным точкам. Точки ***a*** и ***b*** соединяются стрелками, если aRb.



- ***Пример:***

$$M = \{1, 2, 3\}.$$

Отношение – ***быть меньше.***

Свойства бинарных отношений

- Отношение *R* на *M* называется ***рефлексивным,*** если для любого $a \in M$ выполняется aRa. Главная диагональ матрицы такого отношения содержит только единицы, граф – петлю в каждой вершине.
- ***Пример:*** Отношение «быть делителем», заданной на множестве N.

1 делитель 1; 2 делитель 2; 3 делитель 3; и т. д.

Свойства бинарных отношений

- Отношение R на M называется ***антирефлексивным,*** если для любого $a \in M$ выполняется $\overline{aRa}$. Главная диагональ матрицы такого отношения содержит только нули, граф – не имеет петель.
- ***Пример:*** Отношение «быть больше», заданной на множестве N.

1 не больше 1; 2 не больше 2; 3 не больше 3; ит.д.

Свойства бинарных отношений

- Отношение *R* на *M* называется ***симметричным,*** если для любой пары $a, b \in M$
- из ***aRb*** следует ***bRa*** (то есть, для любой пары отношение *R* выполняется в обе стороны или не выполняется вообще). Матрица симметричного отношения – симметрична относительно главной диагонали, у графа все стрелки парные, симметричные.

Пример

- Отношение «***жить в одной комнате в общежитии***».
- Если A живет в одной комнате с B, то и B живет в одной комнате с A.
- Если C живет в одной комнате с D, то и D живет в одной комнате с C.
- И так далее.

Свойства бинарных отношений

- Отношение R на M называется

  антисимметричным,

если для любой пары $a, b \square M$ из того, что

одновременно выполняется: ***aRb*** и ***bRa*** следует что

a=b . Матрица антисимметричного отношения не

имеет ни одной симметричной 1, у графа все

стрелки непарные, направлены лишь в одну

строну.

Пример

- Отношение «***быть начальником***».
- Если A начальник B, то B не является начальником A.
- Если C начальник D, то D не является начальником C.
- И так далее.

Свойства бинарных отношений

- Отношение R на M называется

транзитивным, если для любых a,b,c □ M

из того, что выполняется ***aRb*** и одновременно ***bRc***

следует, что ***aRc*.**

- ***Пример:*** Отношение «быть больше», заданной на множестве N.

если 3 больше 2 и 2 больше 1, то 3 больше 1;

если 5 больше 3 и 3 больше 1, то 5 больше 1; итд

Отношение эквивалентности

- Отношение R на M называется ***отношением эквивалентности,*** если оно

Рефлексивно,

Симметрично,

Транзитивно.

Пример

- На множестве натуральных чисел задано отношение R – ***иметь одинаковый остаток от деления на 3***.
- R – рефлексивно, так как каждое число само с собой имеет одинаковый остаток от деления на 3,
- например 1 и 1, 2 и 2, 3 и 3, итд.

Отношение: иметь одинаковый остаток от деления на 3

- R – ***симметрично,*** так как каждое если число ***a*** имеет с числом ***b*** одинаковый остаток от деления на 3, то и число ***b*** с числом ***a*** тоже имеет одинаковый остаток от деления на 3,

например 1 и 4 имеют одинаковый остаток от деления на 3, то и 4 и 1 тоже имеют одинаковый остаток;

2 и 5 имеют одинаковый остаток от деления на 3, то и 5 и 2 тоже имеют одинаковый остаток;

3 и 12 имеют одинаковый остаток от деления на 3, то и 12 и 3 тоже имеют одинаковый остаток, итд.

Отношение: иметь одинаковый остаток от деления на 3

- R – ***транзитивно,*** так для каждых чисел ***a*** , ***b*** и ***c*** если ***a*** с ***b*** имеют одинаковый остаток от деления на 3, и ***b*** с ***c*** имеют одинаковый остаток от деления на 3, то и ***a*** с ***c*** тоже имеют одинаковый остаток от деления на 3,

например 1 и 4 имеют одинаковый остаток от деления на 3, и 4 и 13 тоже имеют одинаковый остаток от деления на 3, тогда 1 и 13 тоже имеют одинаковый остаток.

Отношение: иметь одинаковый остаток от деления на 3

- Таким образом, отношение R – ***рефлексивно, симметрично*** и ***транзитивно,*** то есть является отношением эквивалентности.

Разбиение на классы эквивалентности

- Если отношение R – отношение эквивалентности, то оно разбивает множество, на котором задано, на ***классы эквивалентности.***

Разбиение на классы эквивалентности

- Для разбиения на классы надо:

1) Выбрать из M произвольный элемент a_1 и поместить его в класс C_1, затем поместить в этот класс все элементы, эквивалентные ему;

2) Затем из оставшихся элементов M выбрать элемент a_2 и поместить его в класс C_2, затем поместить в этот класс все элементы, эквивалентные ему;

3) Делать, пока останутся нераспределенные по классам элементы.

Число классов разбиения – ***индекс разбиения I.***

Отношение: иметь одинаковый остаток от деления на 3

- Для разбиения на классы надо:

1) Выбрать произвольный элемент **1** и поместить его в класс C_1 затем поместить в этот класс все элементы, эквивалентные ему: **4, 7, 10, 13….;**

2) Затем из оставшихся элементов М выбрать элемент **2** и поместить его в класс C_2 затем поместить в этот класс все элементы, эквивалентные ему: **5, 8, 11, 14, 17,…;**

3) Затем из оставшихся элементов М выбрать элемент **3** и поместить его в класс C_3, затем поместить в этот класс все элементы, эквивалентные ему: **6, 9, 12, 15,…**

Индекс разбиения равен 3.

Отношение порядка

- Отношение R – отношение порядка, если оно ***антисимметрично*** и ***транзитивно.***

Отношение порядка

- Отношение порядка R – отношение ***строгого*** порядка, если оно ***антирефлексивно, антисимметрично*** и ***транзитивно.***

Отношение порядка

- Отношение порядка R – отношение ***нестрогого*** порядка, если оно ***рефлексивно, антисимметрично*** и ***транзитивно.***

Отношение порядка

- Если элементы ***a*** и ***b*** связаны отношением порядка, то есть ***aRb*** или ***bRa***, то ***a*** и ***b*** ***сравнимы по отношению порядка R.***

Отношение порядка

- Если любые два элемента ***a*** и ***b*** сравнимы по отношению порядка ***R*,** то ***R*** отношение ***полного или линейного порядка***, а ***M*** называется ***полностью упорядоченным.***

Пример: отношение «быть делителем», задано на N

- R – ***рефлексивно,*** так как каждое число является делителем самого себя:
- 1 делитель 1;
- 2 делитель 2;
- 3 делитель 3, итд.

Пример: отношение «быть делителем», задано на N

- R – ***антисимметрично,*** так как если числа разные и ***a*** делитель ***b,***то ***b*** не является делителем ***a:***

если 1 делитель 2 и 2 делитель 4, то 1 – делитель 4;

если 4 делитель 8 и 8 делитель 24, то 4 – делитель 24, и т. д.

Пример: отношение «быть делителем», задано на N

- R – ***транзитивно,*** так как если числа разные и ***a*** делитель ***b и b*** делитель ***c***, то ***a*** тоже является делителем ***c:***

если 1 делитель 2 и 2 не делитель 1;

если 4 делитель 8, то 8 не делитель 4;

если 3 делитель 9, то 9 не делитель 3,

и т. д.

Пример: отношение «быть делителем», задано на N

- R – ***рефлексивно, антисимметрично*** и ***транзитивно,*** значит

R – отношение ***нестрогого*** порядка.

Пример: отношение «быть делителем», задано на N

- R – задает ***неполный порядок,*** так как можно найти хотя бы одну пару ***несравнимых*** элементов, например:

2 и 3; 7 и 11; 4 и 9, итд.

Отношение порядка

- Отношение R – отношение порядка, если оно ***антисимметрично*** и ***транзитивно.***