

Свойства биномиальных коэффициентов

Цель: познакомиться со свойствами биномиальных коэффициентов;

научить применять формулу бинома Ньютона при возведении в степень двучлена;

Бином Ньютона

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \\ + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^n b^n$$

$C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, \dots, C_n^n$ - биномиальные
коэффициенты

Основные свойства

биномиальных коэффициентов:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \\ + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^n b^n$$

$C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, \dots, C_n^n$ - биномиальные
коэффициенты

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \\ + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^n b^n$$

$C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, \dots, C_n^n$ - биномиальные
коэффициенты

Бином Ньютона.

Бином (лат. *bis* – два, *nomēn* - имя) или двучлен — частный случай многочлена (полинома), который состоит из двух слагаемых одночленов (мономов).

Например:

$$a + b, \quad a - b, \quad a^2 + b^2, \quad 3b - 4b^3$$

Степени суммы двух чисел:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$$

$$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3$$

$$(a + b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4$$

$$(a + b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4b + 10 \cdot a^3b^2 + 10 \cdot a^2b^3 + 5 \cdot ab^4 + 1 \cdot b^5$$

Составим таблицу из коэффициентов в записанных суммах

Составленная таблица
получила название

Треугольник
Паскаля

$n = 0;$									1						
$n = 1;$								1	1						
$n = 2;$								1	2	1					
$n = 3;$								1	3	3	1				
$n = 4;$								1	4	6	4	1			
$n = 5;$								1	5	10	10	5	1		
$n = 6;$								1	6	15	20	15	6	1	
$n = 7;$								1	7	21	35	35	21	7	1

5-я строка ($n = 4$) получается так:

$$1, \quad 4 = 1 + 3, \quad 6 = 3 + 3, \quad 4 = 3 + 1, \quad 1$$

Разложение бинома с помощью треугольника Паскаля.

Пример 1

**Коэффициенты 7 строки:
1; 7; 21; 35; 35; 21; 7; 1**

$$\begin{aligned}(a+b)^7 &= 1 \cdot a^7 + 7 \cdot a^6 \cdot b^1 + 21 \cdot a^5 \cdot b^2 + 35 \cdot a^4 \cdot b^3 + \\ &+ 35 \cdot a^3 \cdot b^4 + 21 \cdot a^2 \cdot b^5 + 7 \cdot a^1 \cdot b^6 + 1 \cdot b^7 = \\ &= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7\end{aligned}$$

Пример 2

**Коэффициенты 7 строки:
1; 7; 21; 35; 35; 21; 7; 1**

$$\begin{aligned}(1+x)^7 &= 1 \cdot 1^7 + 7 \cdot 1^6 \cdot x^1 + 21 \cdot 1^5 \cdot x^2 + 35 \cdot 1^4 \cdot x^3 + \\ &+ 35 \cdot 1^3 \cdot x^4 + 21 \cdot 1^2 \cdot x^5 + 7 \cdot 1^1 \cdot x^6 + 1 \cdot x^7 = \\ &= 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7\end{aligned}$$

Пример 3

**Коэффициенты 4 строки:
1; 4; 6; 4; 1**

$$\begin{aligned}(2x+3)^4 &= 1 \cdot (2x)^4 + 4 \cdot (2x)^3 \cdot 3^1 + 6 \cdot (2x)^2 \cdot 3^2 + \\ &+ 4 \cdot (2x)^1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^4 = \\ &= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81\end{aligned}$$

Биномиальные коэффициенты

**В основе построения треугольника Паскаля
лежит свойство сочетаний**

$$C_{m+1}^{n+1} = C_m^n + C_m^{n+1}.$$

**Поэтому коэффициенты разложения степени
бинома можно записать с помощью числа
сочетаний**

Степени суммы двух чисел:

$$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

Заметим, что

$$C_1^0 = 1; \quad C_1^1 = 1 \quad \text{и} \quad a^0 = 1; \quad b^0 = 1, \quad \text{тогда}$$

$$(a + b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1$$

Аналогично: $C_2^0 = 1; \quad C_2^1 = 2; \quad C_2^2 = 1$

$$(a + b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2$$

$$C_3^0 = 1; \quad C_3^1 = 3; \quad C_3^2 = 3; \quad C_3^3 = 1$$

$$(a + b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3 \quad \text{и т. д.}$$

Правило Паскаля:

$$C_{m+1}^n = C_m^{n-1} + C_m^n$$

Биномиальные коэффициенты:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

$$C_m^0 = C_m^m = 1; \quad C_m^1 = C_m^{m-1} = m;$$

$$C_{m+1}^n = C_m^{n-1} + C_m^n; \quad C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} + C_m^n;$$

$$C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m$$

Бином Ньютона:

$$(a + b)^m =$$

$$= C_m^0 a^m b^0 + C_m^1 a^{m-1} b^1 + \dots + C_m^{m-1} a^1 b^{m-1} + C_m^m a^0 b^m$$

Бином Ньютона – формула, выражающая целую положительную степень суммы двух слагаемых (двучлена, бинома) через степени этих слагаемых. Частными случаями бинома Ньютона являются формулы квадрата и куба суммы двух слагаемых a и b

Применение формулы бинома Ньютона

Пример 4

$$\begin{aligned} (2a - \frac{1}{2})^5 &= (2a)^5 + C_5^1 (2a)^4 (-\frac{1}{2}) + C_5^2 (2a)^3 (-\frac{1}{2})^2 + \\ &+ C_5^3 (2a)^2 (-\frac{1}{2})^3 + C_5^4 (2a)^1 (-\frac{1}{2})^4 + (-\frac{1}{2})^5 = \\ &= 32a^5 - 40a^4 + 20a^3 - 5a^2 + \frac{5}{8}a - \frac{1}{32} \end{aligned}$$

Самостоятельная работа

Задание 1. Найти разложение бинома

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \\ + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^n b^n$$

$C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, \dots, C_n^n$ -биномиальные
коэффициенты

Задание 2.

У многочлена $P(x)$ найдите коэффициент при:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \\ + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^n b^n$$

$C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, \dots, C_n^n$ -биномиальные
коэффициенты

Задание 3.

$$4P_3 + 3A_{10}^2 - C_5^2$$

Критерии оценки выполнения работы

Оценка	Число заданий, необходимое для получения оценки
«3» (удовлетворительно)	3
«4» (хорошо)	4
«5» (отлично)	5