ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

ЛЕКЦИЯ 4

Математический факультет. Кафедра математического моделирования

Тема: Бинарные отношения. Отношение эквивалентности

Цель лекции – изучить свойства бинарных отношений, способы их задания для применения в задачах компьютерной инженерии

Содержание:

- Определение бинарного отношения
- Способы задания бинарных отношений
- Свойства бинарных отношений
- Бинарное отношение эквивалентности
- Классы эквивалентности
- Применение в задачах компьютерной инженерии

Литература

- **Горбатов В.А.** Основы дискретной математики. М.: Высш. шк., 1986. 10-14 с.
- **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 224 с.
- **Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М.** Дискретная математика для инженера. М.: Энергия, 1980. 344 с.
- **Богомолов А.М., Сперанский Д.В.** Аналитические методы в задачах контроля и анализа дискретных устройств. Саратов: Изд-во Саратовкого ун-та, 1986. 240с.
- **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов. С.-П., 2001. С. 4-24.
- **Хаханов В.I., Хаханова I.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В.** Методичні вказівки до практичних занять з курсу “Дискретна математика”. Харків, ХНУРЕ. 2001. 12-16 с.

Термины

Базовые понятия:

- множество
- подмножество
- упорядоченная пара
- вектор
- декартово произведение
- декартова степень
- отношение

Ключевые слова:

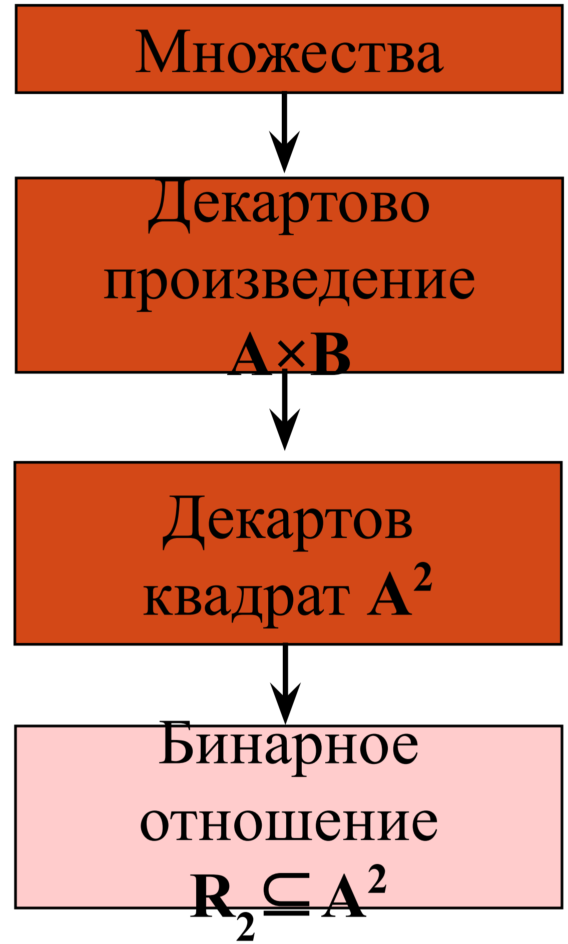
- бинарное отношение
- матрица смежности
- граф
- фактор-множество
- рефлексивность
- симметричность
- транзитвность
- отношение эквивалентности

Определение бинарного отношения

- **Def:** **бинарным (двухместным) отношением** на множестве **M** называется подмножество декартова квадрата множества **M**:

$$R_2 \subseteq M^2$$

- n=2 степень отношения (бинарное)



Способы задания бинарных отношений. 1

1. Матрица смежности

Def: матрица смежности бинарного отношения на множестве $\mathbf{A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}}$ – это таблица размера $\mathbf{n \times n}$, в которой элемент $\mathbf{c_{ij}}$, определяется следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i R a_j; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Пример

Дано: $A=\{a, b\}$, $R_2=\{(a,a), (b,a)\} \subset A^2$

Матрица смежности бинарного отношения $\mathbf{R_2}$ представляется так:

$$\begin{array}{c|cc|} & a & b \\ \hline a & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 \end{array}$$

Способы задания бинарных отношений. 2

2. Граф

Def: граф – это совокупность множества V с заданным на нем отношением $U \subset V^2$:

$$G = \langle V, U \rangle$$

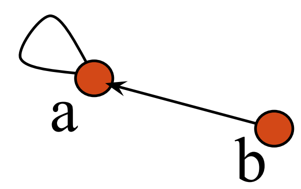
V – носитель графа (множество вершин),

U – сигнатура графа (множество ребер или дуг).

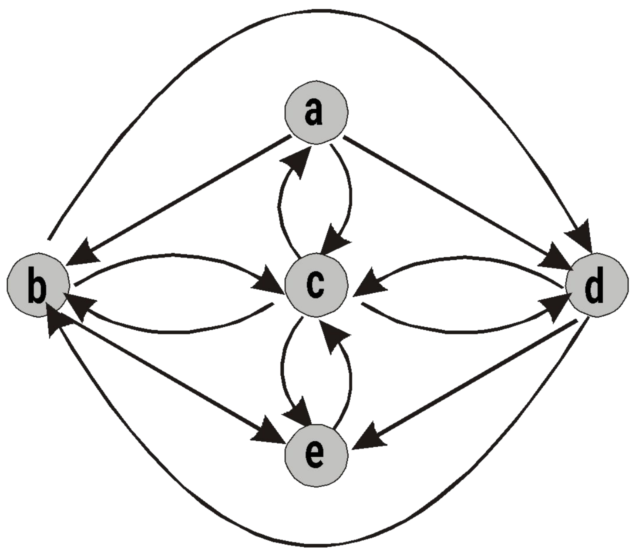
Пример

Дано: $A = \{a, b\}$, $R_2 = \{(a,a), (b,a)\} \subset A^2$

Граф бинарного отношения R_2 изображается так:



Пример: информационный обмен между устройствами ЭВМ



- V={**a, b, c, d, e**}, **T**$\subset$**V**^{2}

$$T=\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(b,e),(c,a),(c,b),(c,d),(c,e),(d,b),(d,c),(e,c),(d,e)\}$$

- **a** – устройство ввода;
- **b** – процессор;
- **c** – устройство управления;
- **d** – запоминающее устройство;
- **e** – устройство вывода.

Историческая справка

- Американский математик
- Доктор физико-математических наук
- Член Национальной Академии наук США
- Профессор Принстонского университета в США (с 1933)
- Член Комиссии по атомной энергии США (с 1954)
- Директор Бюро по проектиро-ванию ЭВМ (1945-1955).

Джон фон Нейман

Способы задания бинарных отношений. 3

3. Фактор-множество

Def: окрестность единичного радиуса элемента $a_i \in A$:

$$O(a_i)=\{\, a_j \mid (a_i,a_j) \in R \subseteq A^2,\ a_j \in A \,\}$$

Def: фактор-множество A/R (или A|R) множества A по отношению $R \subseteq A^2$ есть совокупность окрестностей единичного радиуса

$$A/R = \{\, O(a_i) \mid a_i \in A \,\}$$

Пример

a	b	c	d	e
{b,c,d}	{c,d,e}	{a,b,d,e}	{b,c,a}	{c}

- Верхняя строка – элементы множества A
- Нижняя – совокупность окрестностей единичного радиуса элементов a_i

Свойства бинарных отношений. 1

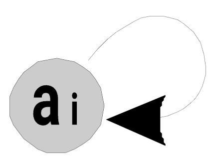
1. Рефлексивность

- $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A}^2$ – рефлексивно, если

$$\forall \mathbf{a}_i \in \mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_i) \in \mathbf{R} \subseteq \mathbf{A}^2$$

- матрица смежности:

$$\begin{Vmatrix} 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$



- в графе – петли:

2. Симметричность

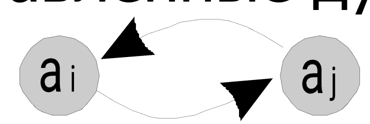
- $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A}^2$ – симметрично, если

$$\forall \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \in \mathbf{A} : (\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j) \in \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{a}_j,\mathbf{a}_i) \in \mathbf{R} \subseteq \mathbf{A}^2$$

- матрица смежности:

$$\begin{Vmatrix} \ldots & 1 & 0 \\ 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots \end{Vmatrix}$$

- в графе – симметрично направленные дуги:



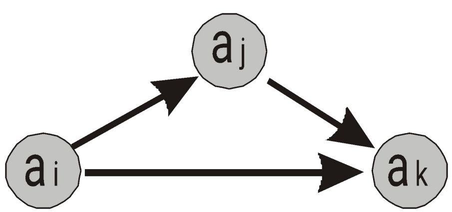
Свойства бинарных отношений. 2

3. Транзитивность

- $R \subseteq A^2$ – транзитивно, если

$$\forall a_i, a_j, a_k \in A:$$
$$(a_i, a_j) \in R,\ (a_j, a_k) \in R \Rightarrow$$
$$(a_i, a_k) \in R \subseteq A^2$$

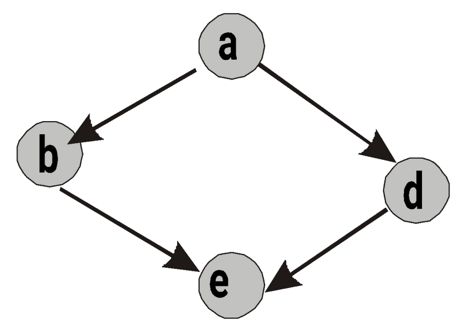
- в графе – транзитивно замыкающая дуга:



Дополнительные свойства:

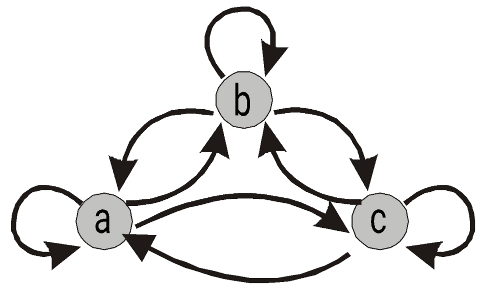
- антирефлексивность
- нерефлексивность
- антисимметричность
- несимметричность
- нетранзитивность

Пример

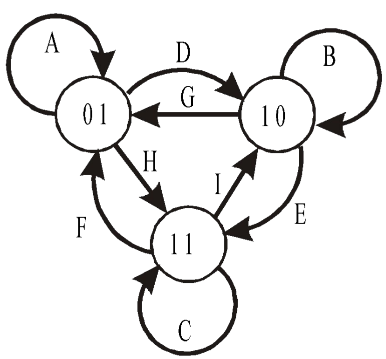


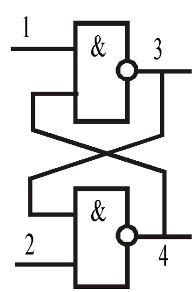
Бинарное отношение эквивалентности

- Обозначение: $\mathbf{R}_{\sim}$
- Граф



- Рефлексивность: **x~x**
- Симметричность: **x~y⇔y~x**
- Транзитивность: **x~y, y~z ⇒ x~z**
- **Пример**





Бинарное отношение эквивалентности $\mathbf{R}_{\sim}$

||

Рефлексивность

+

Симметричность

+

Транзитивность

Разбиение множества

- **Def:** разбиение **Г** множества **A** – семейство непустых попарно непересекающихся подмножеств, объединение которых совпадает с **A**
- **Свойства $\Gamma \subset B(A)$**
- $\forall K_i \in A: K_i \neq \varnothing$
- $\forall K_i, K_j \in \Gamma: K_i \cap K_j = \varnothing$
- $$\bigcup_{K_j \in \Gamma} K_j = A$$

- **Пример**
  Для трехэлементного множества $A=\{a,b,c\}$ разбиениями являются
- $\Gamma_1=\{ \{a, b, c\} \}$
- $\Gamma_2=\{ \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$
- $\Gamma_3=\{ \{a\}, \{b,c\} \}$
- $\Gamma_4=\{ \{b\}, \{a,c\} \}$
- $\Gamma_5=\{ \{c\}, \{a,b\} \}$

Процедура построения разбиения множества

- Пусть на множестве A задано отношение эквивалентности $R_{\sim}$
- Выберем элемент $a_1 \in A$ и образуем подмножество (класс) $K_1 \subset A$, состоящий из элемента a_1 и всех элементов, эквивалентных ему:

$$\forall a_1 \in A \ \ \exists K_1 \subset A : K_1 = [a_1] = \{x \in A : x \sim a_1\}$$

- Выберем элемент $a_2 \in A$, $a_2 \neq a_1$, и образуем подмножество (класс) $K_2 \subset A$, состоящий из элемента a_2 и всех элементов, эквивалентных ему:

$$\forall a_2 \in A, a_2 \notin K_1 \subset A \ \ \exists K_2 \subset A : K_2 = [a_2] = \{x \in A,\ x \notin K_1 : x \sim a_2\}$$

- Таким образом, получаем систему классов, объединение которых совпадает с множеством A

Классы эквивалентности

- Построенная система классов обладает следующими свойствами:
- образует разбиение
- любые два элемента из одного класса эквивалентны
- любые два элемента из разных классов не эквивалентны

Def: класс эквивалентности [à] элемента à

$$[a]=\{\ x \mid x\sim a,\ x\in A\ \}$$

- Свойства классов эквивалентности:
- $a\in[a]$
- $b\in[a]\Rightarrow[b]=[a]$
- $[a]\cap[b]=\varnothing,$
  $[a]\cap[b]\neq\varnothing\Rightarrow\ [a]=[b]$
- $\bigcup_{a\in A}[a]=A$

Матрица бинарного отношения эквивалентности

Матрицу бинарного отношения эквивалентности можно представить в блочно-диагональном виде, где каждая подматрица, состоящая из единиц, соответствует классу эквивалентности

	a	b	c	…	…	…	x	y	z
a	1	1	1						
b	1	1	1						
c	1	1	1						
.				1	1				
.				1	1				
.						1	1	1	
x						1	1	1	
y						1	1	1	
z									1

Выводы. 1

- При исследовании возникает задача выбора существенных свойств, деталей, признаков моделируемого объекта. Отношение эквивалентности, с одной стороны, отождествляет второстепенные, несущественные признаки и свойства, и, с другой – выделяет в качестве представителей классов эквивалентности основные свойства.
- Понятия "отношение эквивалентности", "фактор-множество", "классы эквивалентности" используются при построении математической модели некоторой реально функционирующей сложной системы.
- Модель есть некоторое фактор-множество элементов моделируемого объекта относительно некоторого отношения эквивалентности, заданного на исходной системе.

Выводы. 2

- Если моделируемый объект представлен в виде композиции элементов некоторого базисного множества, то вопрос о соотношении модели и ее прообраза разрешается на основе информации об элементах, на которых вводится отношение эквивалентности - либо это сами элементы базисного множества, либо некоторые подмножества элементов, либо подмножества множества подмножеств элементов.

Множество + Отношение = **Модель**

Тест-вопросы

1. Какое из отношений является бинарным:
а) $\mathbf{R \subset M^3}$; б) $\mathbf{R \subset M^2}$; в) $\mathbf{R = M^2}$.

2. Если матрица, описывающая бинарное отношение, содержит на главной диагонали нули и единицы, то отношение:
а) рефлексивно; б) антирефлексивно;
в) не рефлексивно.

3. Если все вершины графа, описывающего отношение, имеют петли, то отношение:
а) рефлексивно; б) антирефлексивно;
в) не рефлексивно.

4. Если в графе, описывающем отношение, имеется хотя бы одна пара вершин, соединенных одной дугой, является ли данное отношение симметричным?
а) да; б) нет.

5. Классы эквивалентности:
а) попарно пересекаются;
б) попарно не пересекаются.

6. Верно ли, что любые два элемента из одного класса эквивалентности эквивалентны?
а) да; б) нет.