Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №30 имени А.И.Колдунова

Решение иррациональных неравенств

Автор: Кутоманова Е. М.

г. Ногинск 2013г.

Цели:

- развитие логического мышления формируя умения и навыки решения иррациональных неравенств,
- развитие умения кратко отвечать на вопрос и ставить его,
- развитие учебно-коммуникативных умений при работе в группе (слушать, аргументировать, доходчиво объяснять),
- развитие умений работать во времени,
- развитие навыков самостоятельной деятельности и самоконтроля.

Три способа решения неравенств вида

$$\sqrt{ax+b} > cx+d \text{ и } \sqrt{ax+b} < cx+d.$$

№1.Решим неравенство: $\sqrt{2x-1} > x-2.$

1 способ (самый распространённый)

Найдём ОДЗ: $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0{,}5.$

Рассмотрим два случая.

1) Если x-2<0, то неравенство выполнимо в ОДЗ, т.е.0,5≤x<2.
2) Если x-2>0, то обе части неравенства неотрицательны, поэтому после возведения их в квадрат получим равносильное неравенство, в котором ОДЗ выполняется автоматически:

$$\sqrt{2x-1}>x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ 2x-1 > x^2-4x+4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x^2-6x+5<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x\epsilon(1;5); \end{cases} \Leftrightarrow x\epsilon[2;5).$$

3) Учитывая 1 и 2, имеем $\left[\begin{array}{l} 0{,}5 \leq x < 2, \\ 2 \leq x < 5 \end{array}\right.$

Ответ: $x \in [0{,}5;5)$

$x \in [0{,}5;5)$

Замечание 1

Самая распространённая ошибка школьников состоит в том, что они, забывая о «случаях», сразу возводят в квадрат обе части, получая не всегда верное неравенство.

2 способ

Рассмотрим функции

$y_1 = \sqrt{2x-1}$ и $y_2 = x - 2.$

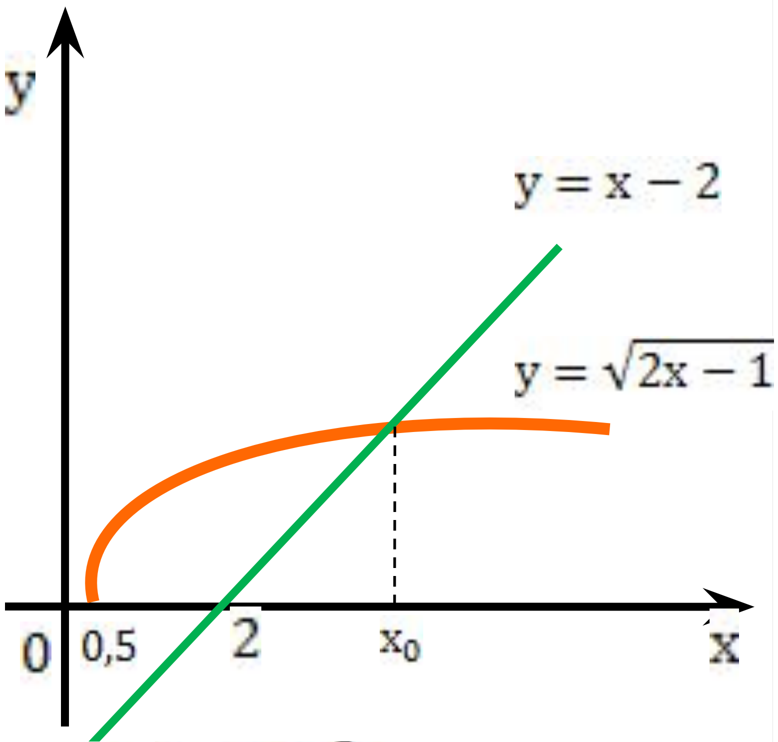
Построим графики этих функций.

График функции $y = \sqrt{2x-1}$

расположен выше графика

функции $y = x - 2$, если $x \in [0{,}5; x_0)$

Найдём x_0, решив уравнение



$\sqrt{2x-1} = x - 2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ 2x - 1 = x^2 - 4x + 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x = 3 \pm 2; \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 5.$$

Ответ: $x \in [0{,}5; 5).$

Замечание 2

На рисунке хорошо видно, почему при стандартном решении необходимо рассматривать два случая.

1.

На промежутке, где $x-2<0$ очевидно, что полупарабола $y=\sqrt{2x-1}$ расположена выше прямой $y=x-2$.

2.

На промежутке, где $x-2\geq 0$,
есть промежуток, где $\sqrt{2x-1}>x-2$,
и промежуток, где $\sqrt{2x-1}\leq x-2$,
поэтому приходится решать неравенство, чтобы найти тот промежуток, где выполнено неравенство $\sqrt{2x-1}>x-2$.

3 способ (с помощью замены переменных)

Сделаем замену переменных.

Пусть $t = \sqrt{2x-1}, t \geq 0.$

Тогда $\begin{cases} t \geq 0, \\ t > \dfrac{t^2+1}{2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ t^2 - 2t - 3 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ -1 < t < 3, \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t < 3.$

Возвращаемся к старым переменным:

$0 \leq \sqrt{2x-1} < 3 \Leftrightarrow 0{,}5 \leq x < 5,$ т. е. $x \epsilon [0{,}5; 5).$

Ответ: $x \epsilon [0{,}5; 5).$

Замечание 3

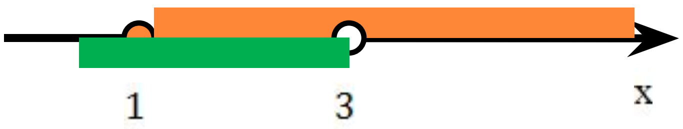
Этот способ хорош тем, что, во-первых, тоже не рассматривает «случаев», а во-вторых тем, что не надо возводить обе части в квадрат.

№2 Решим неравенство $\sqrt{x-1} < 3 - x$

Решение:

Найдём ОДЗ: $\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x < 3 \end{cases}$

$x \in [1;3)$

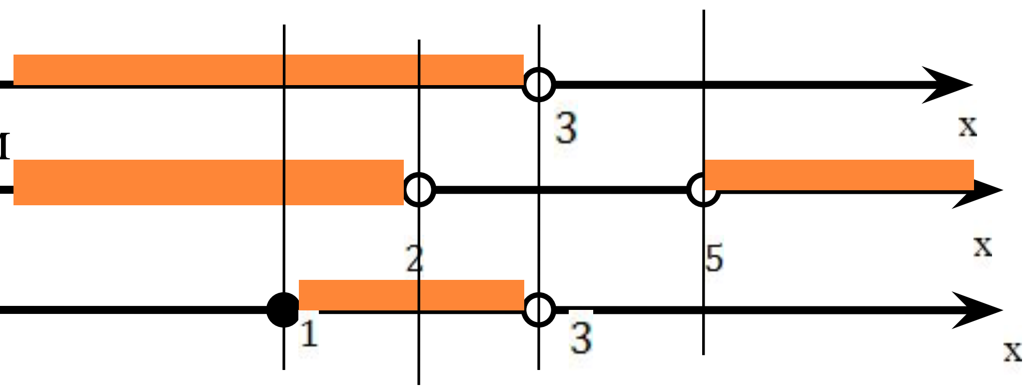


$$\sqrt{x-1} < 3 - x \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3 - x > 0, \\ x - 1 < (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x - 1 < 9 - 6x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x^2 - 7x + 10 > 0 \end{cases}$$

Найдём корни квадратного трёхчлена: $x_1=2$, $x_2=5$.

$$\begin{cases} x < 3, \\ (x-2)(x-5) > 0 \end{cases}$$

Учитывая ОДЗ, имеем



$1 \leq x < 2$, т. е. $x \in [1; 2)$.

Ответ: $[1; 2)$.

Замечание 4

Это неравенство решено первым способом.

Обращаю внимание на нахождение ОДЗ.

Применение второго и третьего способов особого труда не составит.

Задание группам

Решите неравенство

$$\sqrt{x+1} < 11 - x$$

1 группа – первым способом,

2 группа – вторым способом,

3 группа – третьим способом.

Задание для самоподготовки.

Решите неравенство и найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все его решения:

1. $\sqrt{3(x+3)} > 2x+3,$

2. $\sqrt{25-x} > 13-x,$

3. $\sqrt{2x+34} \le 7-x,$

Консультации и вопросы как всегда по вторникам!

Выполните самостоятельно

Решите неравенство:

1 вариант	2 вариант
$\sqrt{x-1} \le 7-x$	$\sqrt{5x+1} > x+1$

Литература:

1.А.Г.Мордкович «Алгебра и начала анализа», часть 1, «Мемозина», Москва, 2012.

2.С.И.Колесникова «ЕГЭ. Математика. Иррациональные неравенства», Москва,2012.