Методы искусственного базиса при решении ЗЛП

ЗЛП в общей постановке

$$z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \to \max/\min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \ge b_i & i = \overline{1, p} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i & i = \overline{(p+1), (p+q)} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i & i = \overline{(p+q+1), m} \end{cases}$$

$$X_j \ge 0 \quad j = \overline{1, n} \quad m = p + q + r$$

Перевод в каноническую форму

$$z = \sum_{j=1}^{N1} C_j X_j \to \max/\min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - X_{n+k} = b_i & i,k = \overline{1,p} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i & i = \overline{(p+1),(p+q)} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + X_{n+k} = b_i & i = \overline{(p+q+1),m} \quad k = \overline{(p+1),(p+r)} \end{cases}$$

$$X_j \geq 0 \quad j = \overline{1,N1} \quad m = p+q+r \quad N1 = n+p+r$$

В начальном базисном решении

$m = p+q+r$ базисных переменных

Имеем r переменных

Введение искусственного базиса

$p+q$ переменных

Введение искусственного базиса

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - X_{n+k} + X_{N1+k} = b_i \quad i,k = \overline{1,p} \\
\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + X_{N1+k} = b_i \quad i,k = \overline{(p+1),(p+q)} \\
\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + X_{n+k} = b_i \quad i = \overline{(p+q+1),m} \; k = \overline{(p+1),(p+r)}
\end{cases}
$$

$$X_j \ge 0 \quad j = \overline{1, N1+k1} \quad m = p+q+r \quad N1 = n+p+r \quad k1 = p+q$$

Начальное базисное решение

свободные переменные
$$
\begin{cases}
X_j = 0 \quad j = \overline{1,n} \\
X_{n+k} = 0 \quad k = \overline{1,p}
\end{cases}
$$

базисные переменные
$$
\begin{cases}
X_{N1+k} \quad k = \overline{1,k1} \\
X_{n+k} \quad k = \overline{(p+1),(p+r)}
\end{cases}
$$

Алгоритм методов искусственного базиса

Приведение ЗЛП к канонической форме

↓

Введение искусственного базиса – недопустимое начальное базисное решение

↓

Поиск допустимого начального базисного решения симплекс-методом

↓

Поиск оптимального решения симплекс-методом

Методы искусственного базиса

1. Двухэтапный метод

2. Метод больших штрафов (М-метод)

Двухэтапный метод

- Этап 1 Этап поиска допустимого базисного решения (I – VII)
- Этап 2 Этап поиска оптимального решения (VIII)

I Сведение ЗЛП к канонической форме

количество переменных $N1 = n + p + r$

II Запись ЦФ в виде уравнения

$$Z - \sum_{j=1}^{N1} C_j X_j = 0$$

III Построение искусственного базиса – введение переменных

$$X_{N1+k} \geq 0 \quad k = \overline{1, k1} \quad k1 = p + q$$

IV Составление искусственной ЦФ

$$W = \sum_{k=1}^{k1} X_{N1+k} \to \min$$

Двухэтапный метод (продолжение)

V Перевод искусственной ЦФ в вид, пригодный для внесения в симплекс-таблицу

$$X_{N1+k} = b_i - \sum_{j=1}^{N1} a_{ij} X_j \qquad i,k = \overline{1,k1} \qquad k1 = p + q$$

$$W = \sum_{j=1}^{N1} W_j X_j + W_0 \to \min \qquad \Leftrightarrow \qquad W - \sum_{j=1}^{N1} W_j X_j = W_0$$

Двухэтапный метод (продолжение)

VI Составление симплекс-таблицы для недопустимого начального базисного решения – расширенная симплекс-таблица

БП	X_1	X_2	$\dots$	X_{N1}	X_{N1+1}	$\dots$	X_{N1+k1}	Решение
X_{i1}	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1N1}	$a_{1(N1+1)}$	$\dots$	$a_{1(N1+k1)}$	b_1
X_{i2}	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2N1}	$a_{2(N1+1)}$	$\dots$	$a_{2(N1+k1)}$	b_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
X_{im}	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mN1}	$a_{m(N1+1)}$	$\dots$	$a_{m(N1+k1)}$	b_m
Z	G_1	G_2	$\dots$	G_{N1}	0	$\dots$	0	$Z_0 = 0$
W	WW_1	WW_2	$\dots$	WW_{N1}	0	$\dots$	0	W_0

где $WW_j = -W_j$

Поиск допустимого базисного решения процедурой симплекс-метода

Двухэтапный метод (продолжение)

VII Итоговая симплекс-таблица к концу первого этапа двухэтапного метода – полученное допустимое начальное базисное решение

БП	X_1	X_2	…	X_{N1}	X_{N1+1}	…	X_{N1+k1}	Решение
X_{i1}	D_{11}	D_{12}	…	D_{1N1}	$D_{1(N1+1)}$	…	$D_{1(N1+k1)}$	R_1
X_{i2}	D_{21}	D_{22}	…	D_{2N1}	$D_{2(N1+1)}$	…	$D_{2(N1+k1)}$	R_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
X_{im}	D_{m1}	D_{m2}	…	D_{mN1}	$D_{m(N1+1)}$	…	$D_{m(N1+k1)}$	R_m
Z	F_1	F_2	…	F_{N1}	$F_{(N1+1)}$	…	$F_{(N1+k1)}$	Z_0
W	V_1	V_2	…	V_{N1}	$V_{(N1+1)}$	…	$V_{(N1+k1)}$	$W_0 = 0$

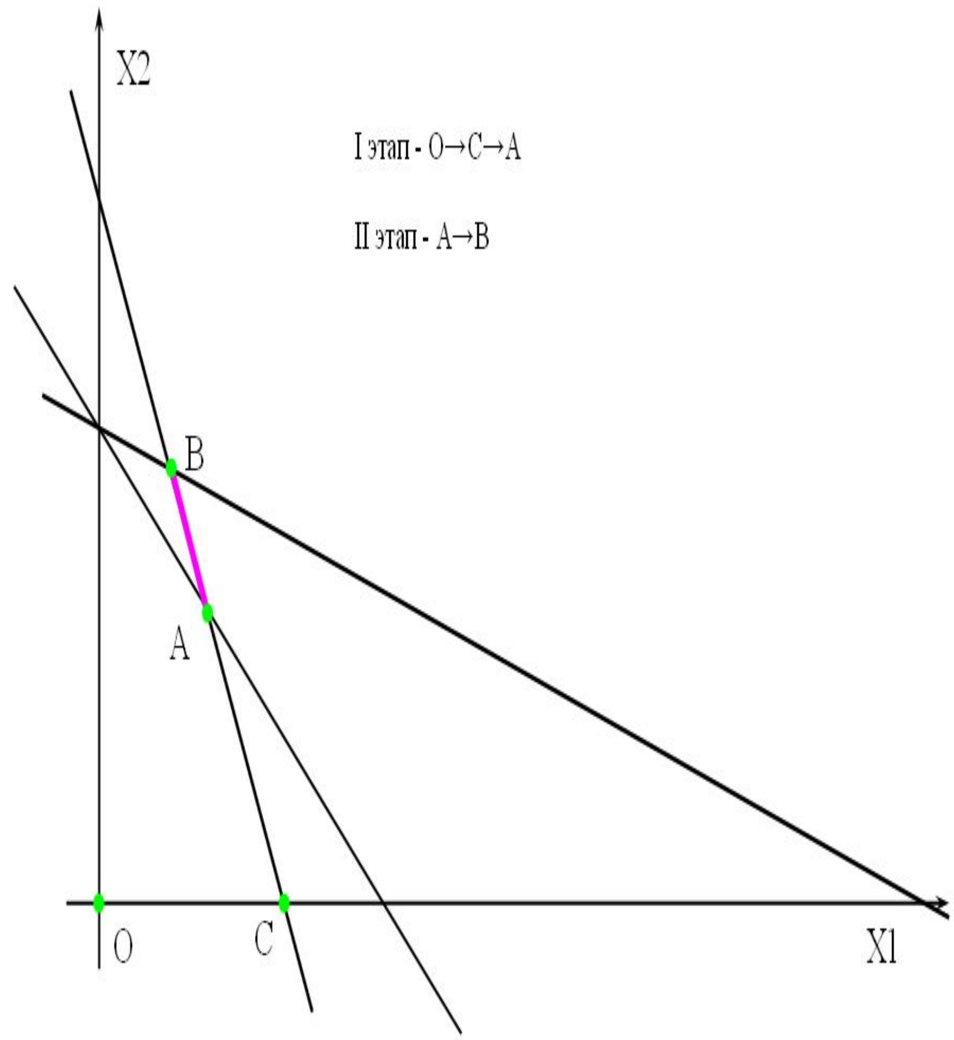
VIII Поиск оптимального базисного решения по сокращенной симплекс-таблице

Пример по двухэтапному методу

$$f = 4x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$



Каноническая форма с искусственным базисом

$$f = 4x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + r_1 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + r_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \;\; i = \overline{1,4}, \quad r_j \geq 0 \;\; j = \overline{1,2}$$

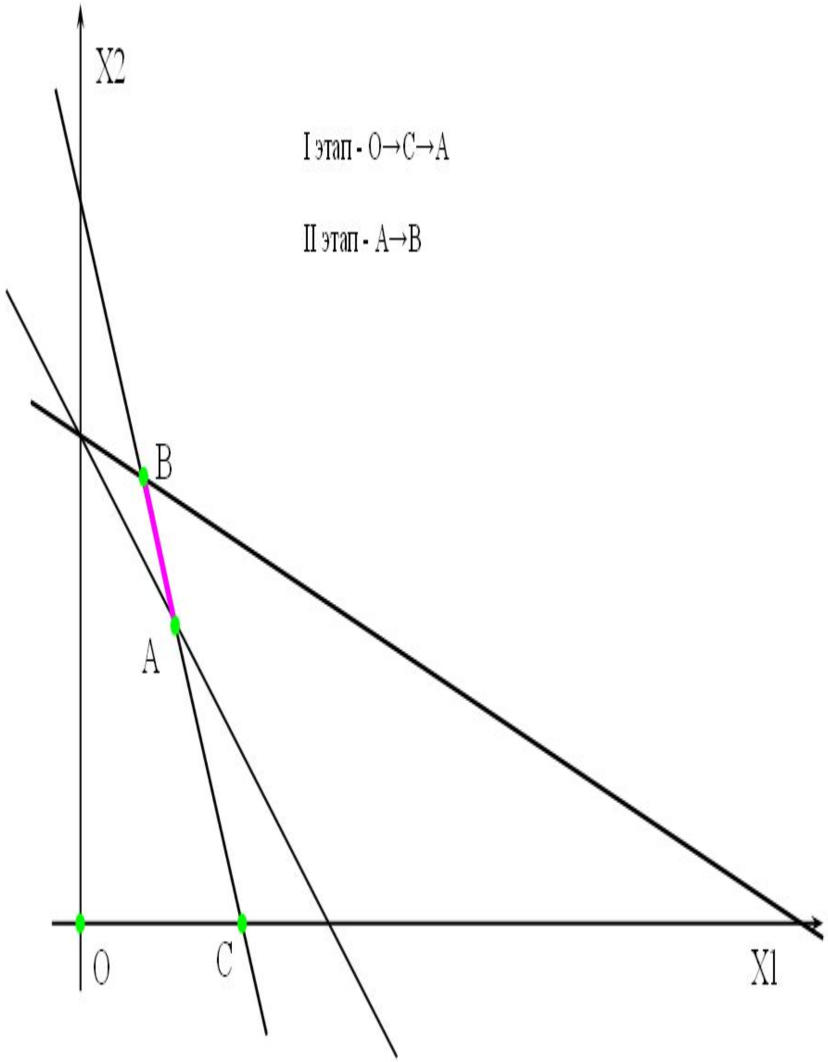
$$W = r_1 + r_2 \to \min$$

$$r_1 = 3 - 3x_1 - x_2$$

$$r_2 = 6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$W + 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 9$$

Пример по двухэтапному методу



O	БП	x1	x2	x3	r1	r2	x4	решение	симплексное соотношение
	r1	3	1	0	1	0	0	3	1
	r2	4	3	-1	0	1	0	6	1,5
	x4	1	2	0	0	0	1	4	4
	f	-4	-1	0	0	0	0	0	
	w	7	4	-1	0	0	0	9	

C	БП	x1	x2	x3	r1	r2	x4	решение	симплексное соотношение
	x1	1	0,3333	0	0,33	0	0	1	3
	r2	0	1,6667	-1	-1,33	1	0	2	1,2
	x4	0	1,6667	0	-0,33	0	1	3	1,8
	f	0	0,3333	0	1,33	0	0	4	
	w	0	1,6667	-1	-2,33	0	0	2	

A	БП	x1	x2	x3	r1	r2	x4	решение	
	x1	1	0	0,2	0,6	-0,2	0	0,6	3
	x2	0	1	-0,6	-0,8	0,6	0	1,2	-2
	x4	0	0	1	1	-1	1	1	1
	f	0	0	0,2	1,6	-0,2	0	3,6	
	w	0	0	0	-1	-1	0	0	

B	БП	x1	x2	x3	x4	решение
	x1	1	0	0	-0,2	0,4
	x2	0	1	0	0,6	1,8
	x3	0	0	1	1	1
	f	0	0	0	-0,2	3,4

Метод больших штрафов

I Сведение ЗЛП к канонической форме

количество переменных $N1 = n + p + r$

II Построение искусственного базиса – введение переменных

$X_{N1+k} \geq 0 \quad k = \overline{1,k1} \quad k1 = p + q$

III Преобразование ЦФ – введение штрафа за использование искусственных переменных

$$Z = \sum_{j=1}^{N1} C_j X_j - M \sum_{j=N1+1}^{N1+k1} X_j \to \max$$

или

$$Z = \sum_{j=1}^{N1} C_j X_j + M \sum_{j=N1+1}^{N1+k1} X_j \to \min$$

M - штраф (бесконечно большой положительный коэффициент)

Метод больших штрафов (продолжение)

IV Перевод искусственной ЦФ в вид, пригодный для внесения в симплекс-таблицу

$$X_{N1+k} = b_i - \sum_{j=1}^{N1} a_{ij} X_j \qquad i,k = \overline{1,k1} \qquad k1 = p + q$$

$$Z = \sum_{j=1}^{N1} \left(D_j + S_j M\right) X_j + RM \qquad \Leftrightarrow \qquad Z - \sum_{j=1}^{N1} \left(D_j + S_j M\right) X_j = RM$$

V Поиск оптимального решения, начиная с недопустимого базисного решения, процедурами симплекс-метода

Пример по методу больших штрафов

$$f = 4x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Каноническая форма с искусственным базисом

$$f = 4x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + M(r_1 + r_2) \to \min$$

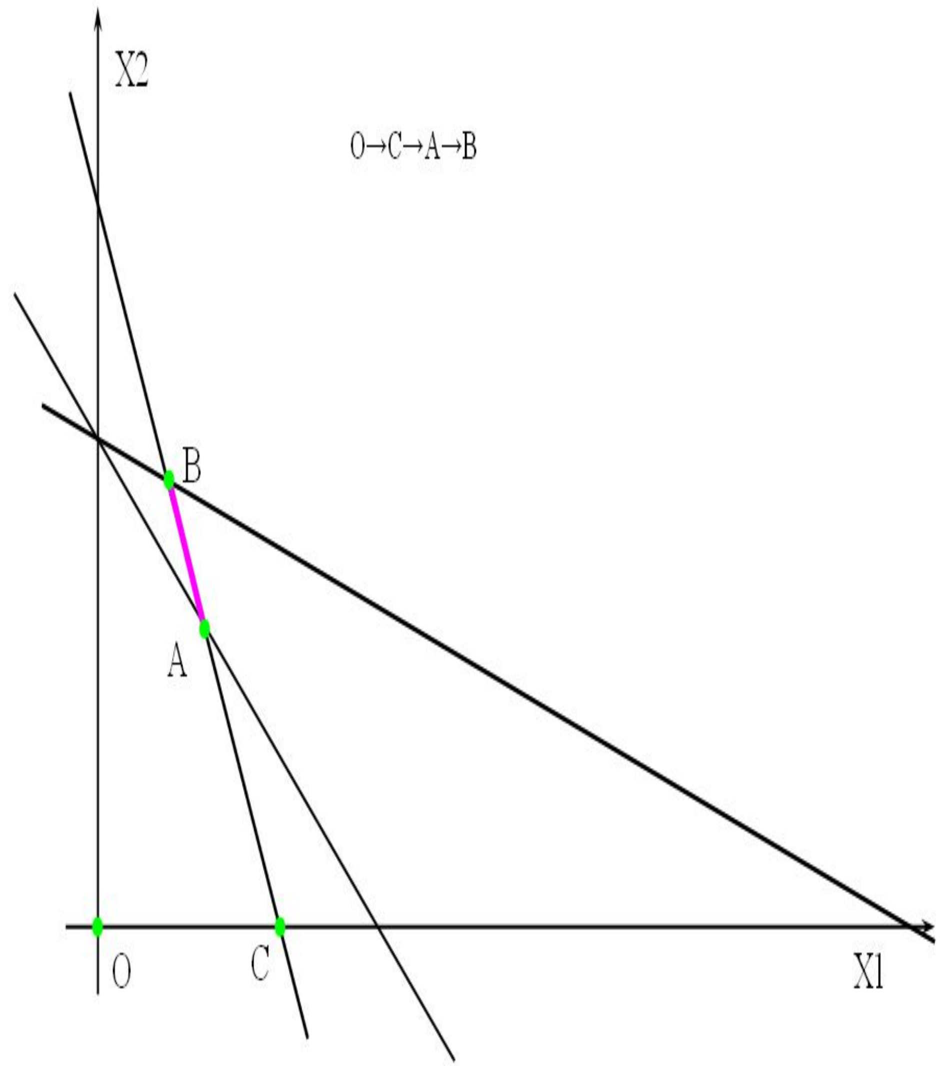
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + r_1 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + r_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \;\; i = \overline{1,4}, \quad r_j \ge 0 \;\; j = \overline{1,2}$$

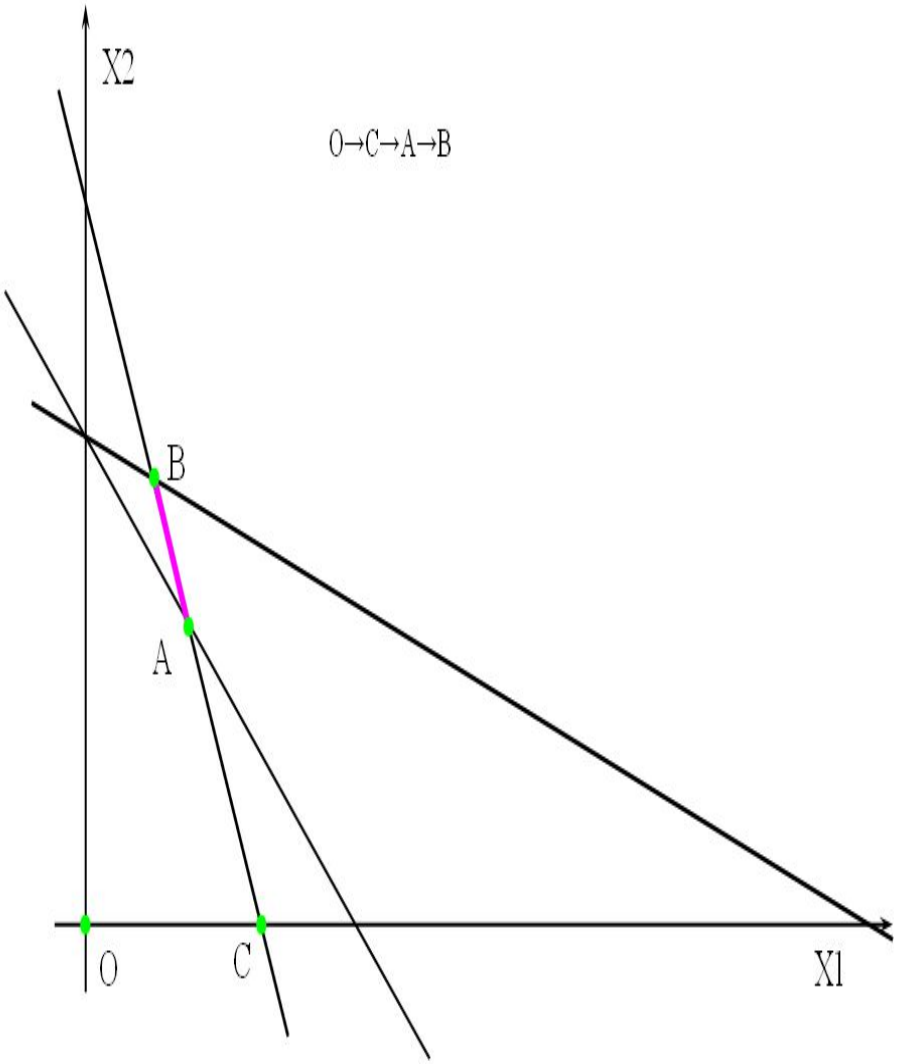
$$r_1 = 3 - 3x_1 - x_2$$
$$r_2 = 6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

! $M = 20$

$$f - (4 - 7M)x_1 - (1 - 4M)x_2 - Mx_3 = 9M$$
$$f + 136x_1 + 79x_2 - 20x_3 = 180$$



Пример по методу больших штрафов



O	БП	x1	x2	x3	r1	r2	x4	решение	симплексное соотношение
	r1	3	1	0	1	0	0	3	1
	r2	4	3	-1	0	1	0	6	1,5
	x4	1	2	0	0	0	1	4	4
	f	136	79	-20	0	0	0	180	

C	БП	x1	x2	x3	r1	r2	x4	решение	симплексное соотношение
	x1	1	0,3333	0	0,33	0	0	1	3
	r2	0	1,6667	-1	-1,33	1	0	2	1,2
	x4	0	1,6667	0	-0,33	0	1	3	1,8
	f	0	33,667	-20	-45,3	0	0	44	

A	БП	x1	x2	x3	r1	r2	x4	решение	
	x1	1	0	0,2	0,6	-0,2	0	0,6	3
	x2	0	1	-0,6	-0,8	0,6	0	1,2	-2
	x4	0	0	1	1	-1	1	1	1
	f	0	0	0,2	-18,4	-20	0	3,6	

B	БП	x1	x2	x3	r1	r2	x4	решение
	x1	1	0	0	0,4	0	-0,2	0,4
	x2	0	1	0	-0,2	0	0,6	1,8
	x3	0	0	1	1	-1	1	1
	f	0	0	0	-18,6	-20	-0,2	3,4