Лекция 2
МЕХАНИЗМЫ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА: ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ, КОНВЕКЦИЯ, ИЗЛУЧЕНИЕ

Существует три основных механизма теплопереноса:

Теплопроводность - за счет переноса энергии микрочастицами. Молекулы, атомы, электроны и другие микрочастицы, из которых состоит вещество, движущиеся со скоростями, пропорциональными их температуре, переносят энергию из зоны с более высокими температурами в зону с более низкими температурами.

Перенос теплоты вместе с макроскопическими объемами вещества носит название ***конвективного теплопереноса или просто конвекции*****.** Конвекцией можно передавать теплоту на большие расстояния. Например, от ТЭЦ .

Часто приходится рассчитывать конвективный теплообмен между жидкостью и поверхностью твердого тела. Этот процесс получил специальное название – **конвективная теплоотдача** (теплота отдается от жидкости к поверхности или наоборот).

Третьим способом переноса теплоты является ***излучение***. За счет излучения теплота передается во всех лучепрозрачных средах, в том числе, и в вакууме, например, в космосе, где это – единственный способ передачи теплоты между телами. Носителями энергии при теплообмене излучением являются ***фотоны***, излучаемые и поглощаемые телами, участвующими в теплообмене

Способы переноса массы, как и теплоты, могут быть различными. Если масса переносится только за счет движения атомов или молекул, то такой процесс называется ***диффузией***. Наиболее интенсивно диффузии протекает в газах, поскольку молекулы в них более подвижны, чем в жидкостях и твердых телах. В жидкостях и газах, наряду с диффузией, возможен и ***конвективный массоперенос*** за счет перемещения макроскопических объемов

При сублимации, сушке, химических реакциях приходится рассчитывать конвективный перенос массы от поверхности тела в жидкую или газовую фазу. Такой процесс называется **конвективной массоотдачей**

Существуют ***более сложные механизмы*** переноса тепла и массы, которые также наблюдаются в технологических процессах (например, **диффузионная теплопроводность и термодиффузия, многокомпонентная диффузия** и др.)

ВОПРОС:

Какой физический процесс в твердых телах (металлах) , как и теплопроводность, связан с переносом энергии микрочастицами (элементарными носителями)?

ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

В любом случае процесс передачи теплоты теплопроводностью сопровождается изменением температуры тела как в пространстве, так и во времени. Аналитическое исследование процесса теплопроводности сводится к изучению пространственно-временного распределения температуры, т.е. к нахождению уравнения

$$T = T(x, y, z, t) \tag{2.1}$$

Это есть математическое выражение температурного поля.

Различают стационарные и нестационарные температурные поля.

стационарное температурное поле $\quad T = f_1(x, y, z) \quad \partial T/\partial t = 0 \quad$ (2.2)

двумерное температурное поле $\quad T = f_2(x, y, t) \quad \partial T/\partial z = 0 \quad$ (2.3)

одномерное температурное поле $\quad T = f_3(x, t) \quad \partial T/\partial z = 0 \quad \partial T/\partial y = 0 \quad$ (2.3)

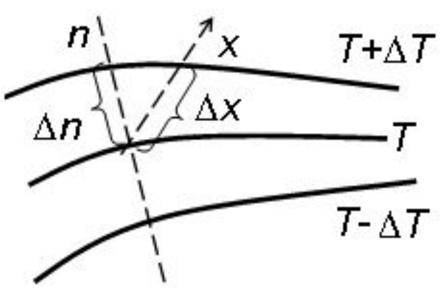


Рис.2.1. Изотермы

Выберем в твердом теле поверхность таким образом, чтобы какой-либо момент времени температура всех ее точек была одинаковой и равной T_i. Такая поверхность называется ***изотермической поверхностью*** температуры T_i

Эти изотермические поверхности могут располагаться любым образом. Но две такие поверхности не могут пересекаться, ибо никакая часть тела не может иметь две температуры одновременно

Пересечение изотермических поверхностей плоскостью дает на этой плоскости ***семейство изотерм***.

Температура в теле меняется только в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. При этом **наибольший перепад** температуры на единицу длины **происходит в направлении нормали** к изотермической поверхности.

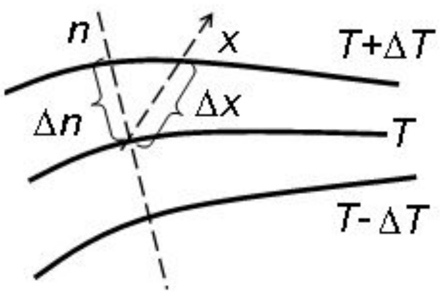


Рис.2.1. Изотермы

Возрастание температуры в направлении нормали к изотермической поверхности характеризуется ***градиентом температуры***.

Градиент температуры есть вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры и численно равный производной температуры по этому направлению

$$\nabla T \equiv gradT = \vec{n}_0 \frac{\partial T}{\partial n} \qquad (2.5)$$

<u>Проекции вектора-градиента на координатные оси декартовой системы координат</u>

$$(\nabla T)_x = \frac{\partial T}{\partial n} \cdot \boldsymbol{cos}(n, x) = \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$(\nabla T)_y = \frac{\partial T}{\partial n} \cdot \boldsymbol{cos}(n, y) = \frac{\partial T}{\partial y} \qquad (2.6)$$

$$(\nabla T)_z = \frac{\partial T}{\partial n} \cdot \boldsymbol{cos}(n, z) = \frac{\partial T}{\partial z}$$

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Основным законом передачи теплоты теплопроводностью является ***гипотеза Фурье*** (1768-1830), согласно которой элементарное количество теплоты dQ (Дж), проходящее через элемент изотермической поверхности dF за промежуток времени dt, пропорционально температурному градиенту

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF dt \qquad (2.7)$$

λ – ***коэффициент теплопроводности***

плотность теплового потока: $$\vec{q} = -\lambda \vec{n}_0 \frac{\partial T}{\partial n} \qquad (2.8)$$

Вектор плотности теплового потока направлен по нормали к изотермической поверхности. Его положительное направление совпадает с направлением убывания температуры, т.е. теплота всегда передается от горячих точек к холодным.

Линии, касательные к которым совпадают с направлением вектора плотности теплового потока , называются ***линиями теплового потока***. Линии теплового потока ортогональны изотермическим поверхностям (рис. 2.2). Скалярная величина плотности теплового потока есть

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \qquad (2.9)$$

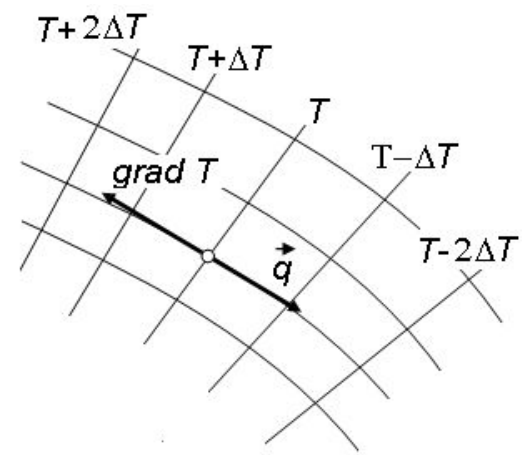


Рис.2.2. Изотермы и линии тока

Гипотеза Фурье была подтверждена экспериментально

Находим количество теплоты через всю изотермическую поверхность в единицу времени:

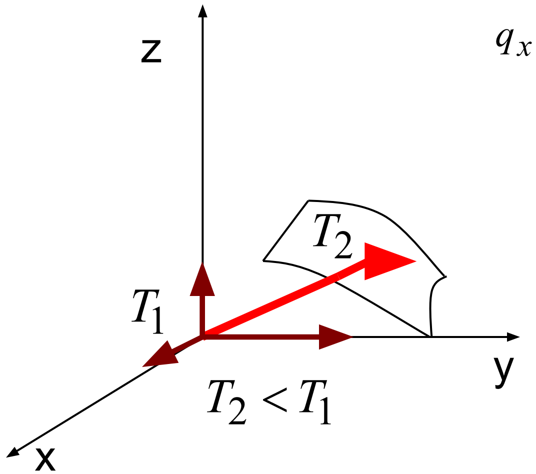
поток тепла, мощность

$$Q = \int_F q dF = -\int_F \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF \quad \text{Дж/с} \qquad (2.10)$$

за время τ

$$Q_\tau = -\int_0^\tau \int_F \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF dt \quad \text{Дж} \qquad (2.11)$$

компоненты вектора плотности теплового потока



$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \qquad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \qquad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \qquad (2.12)$$

$$\vec{q} = \vec{i} q_x + \vec{j} q_y + \vec{k} q_z$$

КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Коэффициент теплопроводности численно равен количеству теплоты, которое проходит в единицу времени через единицу изотермической поверхности при температурном градиенте, равном единице

$$\lambda = \frac{|\vec{q}|}{|\nabla T|}$$

Конкретный механизм передачи теплоты теплопроводностью зависит от физических свойств среды

Коэффициент теплопроводности газов: от 0.006 до 0.6 Вт/(м.К)

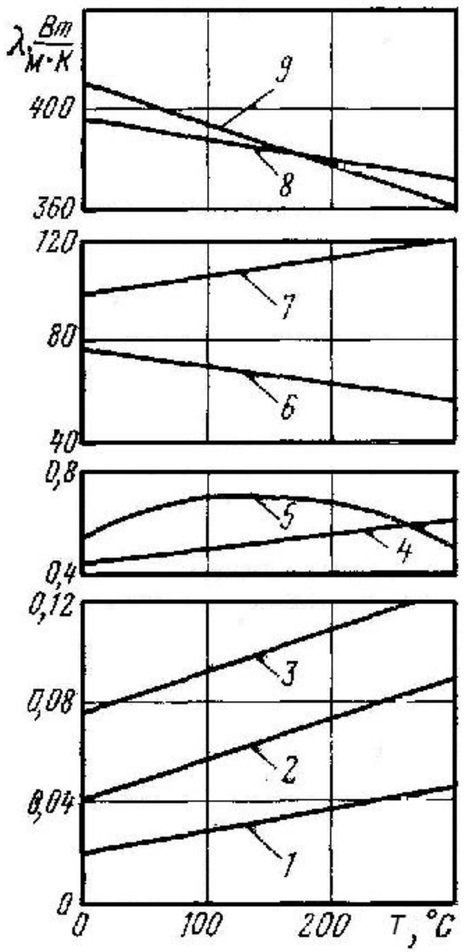
водород $\lambda \approx 0{,}2;$ диоксид углерода $\lambda \approx 0{,}02;$ воздух $\lambda \approx 0{,}025$ Вт/(м.К).

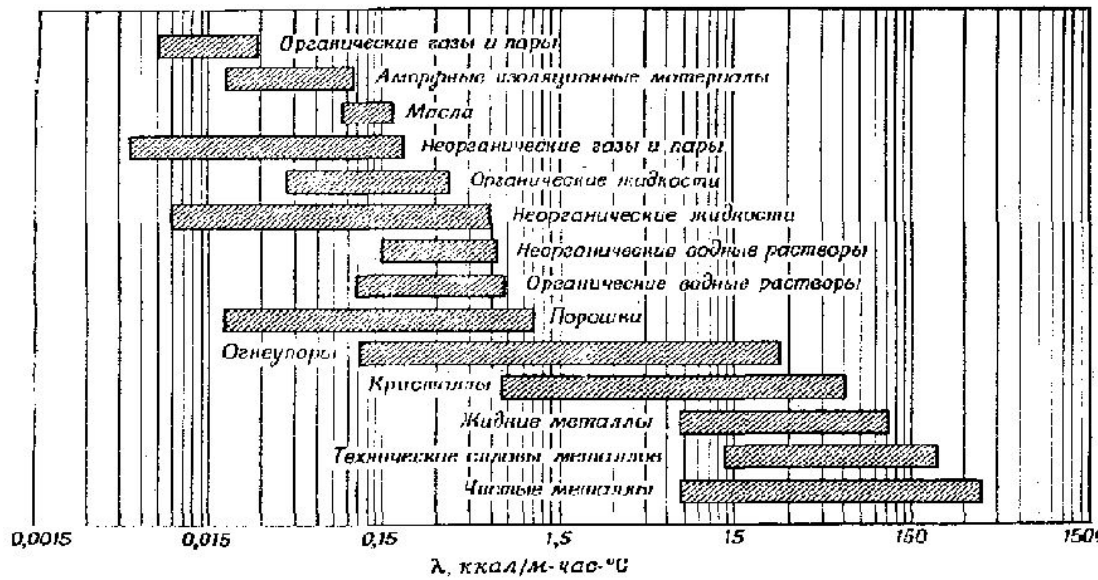
увеличивается с температурой и заметно не меняется с давлением

Коэффициент теплопроводности капельных жидкостей лежит в пределах от 0,07 до 0, 7 Вт/(м.К). Для большинства жидкостей убывает с температурой (исключение составляют вода и глицерин) и растет с давлением

В металлах и сплавах основным передатчиком теплоты являются свободные электроны, которые можно уподобить идеальному одноатомному газу. При повышении температуры λ металлов уменьшается. В отличие от чистых металлов, коэффициенты теплопроводности сплавов растут с температурой.

В твердых телах-диэлектриках коэффициент теплопроводности увеличивается с ростом температуры. Как правило, для материалов с большей плотностью коэффициент теплопроводности имеет более высокое значение. Коэффициент теплопроводности зависит от структуры материала, наличия включений, пористости





Порядок коэффициента теплопроводности некоторых материалов

1 Дж ≈ 0,238846 калории.
1 калория = 4,1868 Дж

Примеры зависимостей коэффициента теплопроводности от температуры: 1. – воздух; 2. – минеральная вата, кг/м^3; 3. - минеральная вата, кг/м^3 ; 4. – сухой пористый красный кирпич; 5. – вода; 6. – железо, 99,9 %; 7. – латунь (67 % , 33 %); 8. – медь, 99,9 %; 9. – серебро, 99,9 %.

Диэлектрики: $\lambda = \lambda_p + \lambda_{фот} + \lambda_{магн}$

Заметна при высоких температурах

Заметна при низких температурах

Полупроводники: $\lambda = \lambda_p + \lambda_э + \lambda_б + \lambda_{фот} + \lambda_{магн} + \lambda_{экс}$

В чистых полупроводниках в области средних температур

Добавочная теплопроводность за счет диффузии экситонов

В чистых образцах: $\lambda_э << \lambda_p$

В сильно легированных кристаллах $\lambda_э \approx или \geq \lambda_p$

$\lambda_б$ - биполярная теплопроводность, при высоких Т за счет диффузии пары «электрон-дырка»

Металлы: $\lambda = \lambda_p + \lambda_э$

Высокая теплопроводность металлов известна из повседневной жизни и тесно связана с их электропроводностью. В теории электропроводности Друде предполагается, что имеется некоторое среднее расстояние, или средняя длина свободного пробега l, на которой свободные электроны ускоряются электрическим полем; затем они теряют приобретенную скорость в результате какого-либо столкновения с атомами и остаются в состоянии чисто теплового движения. В этой теории получается выражение:

n_e число свободных электронов

$$\boxed{\sigma = \frac{n_e e^2 l}{2 m_e V_T}}$$

V_T средняя скорость теплового движения

(более точное рассмотрение дает в два раза большую величину)

Если предположить, что при наличии gradT электроны проходят то же самое среднее расстояние, прежде чем отдадут энергию атомам, то для коэффициента теплопроводности получим выражение:

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{3} n_e c_e V_T l}$$

c_e Теплоемкость, приходящаяся на 1 электрон

$C_e = n_e c_e$ Электронная теплоемкость единицы объема

Сравнивая выделенные выражения, найдем: $\dfrac{\lambda}{\sigma} = \dfrac{2}{3} \dfrac{m_e V_T^2 c_e}{e^2}$

В классической теории, когда свободные электроны рассматриваются как газ: $c_e \approx const, \; V_T^2 \sim T \;\Rightarrow\; \dfrac{\lambda}{\sigma} = 3\left(\dfrac{k_B}{e}\right)^2 T$

В рамках квантовой статистики, когда электроны рассматриваются как сильно вырожденная система, средняя скорость не зависит от температуры, а $c_e \sim T$ $\;\Longrightarrow\; \dfrac{\lambda}{\sigma} = \dfrac{\pi^2}{3}\left(\dfrac{k_B}{e}\right)^2 T$

Следовательно, обе теории приводят к ***закону Видемана-Франца-Лоренца***

$$\boxed{\frac{\lambda}{\sigma T} \approx const}$$

ПЛОСКАЯ СТЕНКА

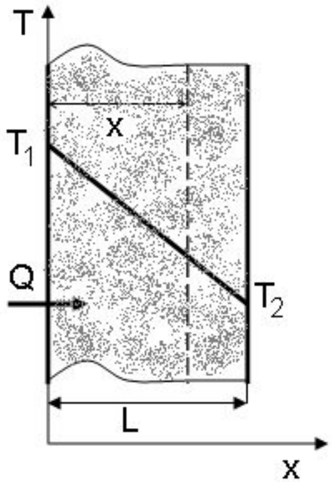


Рис.2.3.
Передача теплоты теплопроводностью через плоскую стенку

$$T_1 > T_2$$

термическое сопротивление или сопротивление теплопроводности

$$dQ = -\lambda F \frac{dT}{dx} dx \qquad \lambda = const$$

$$Q = \frac{\lambda F}{L}(T_1 - T_2) \qquad q = \frac{(T_1 - T_2)}{(L/\lambda)} \qquad (2.13)$$

Задача. Пусть стеклянная витрина магазина имеет площадь 12 м^2 и толщину 1 см. Коэффициент теплопроводности стекла $\lambda = 0{,}8$ Вт/(м.К). В холодный день температура внешней поверхности стекла составляет 272 К (-1 С), а температура внутренней поверхности 296 К (+3 С). Требуется найти тепловой поток через стекло и температуру в среднем сечении между внешней и внутренней поверхностями стекла.

Решение. Тепловой поток через стекло равен $Q = \frac{\lambda F}{L}(T_1 - T_2) = \frac{0{,}8 \cdot 12 \cdot 4}{0{,}01} = 3840$ Вт

Аналогично (2.13) для произвольного *x* $\quad Q = \frac{\lambda F}{x}(T_1 - T)$ $\Longrightarrow$

Температура в среднем сечении равна 274 К, так как в стекле создается линейный профиль температуры

$$T = T_1 - \frac{Qx}{\lambda F} = T_1 - \frac{qx}{\lambda} \qquad (2.13,a)$$

Задачу можно решить и для более сложной ситуации

$$\lambda = \lambda_0(1 + \beta T): \quad Q = \frac{\lambda_0 F}{L}\left[(T_1 - T_2) + \frac{\beta}{2}\left(T_1{}^2 - T_2{}^2\right)\right] \quad Q = \frac{\lambda_m F}{L}(T_1 - T_2) \qquad (2.14)$$

$$\lambda_m : \quad \text{———} \quad (T_1 + T_2)/2$$

Эти и другие задачи могут быть решены достаточно строго при использовании современных методов решения задач математической физики

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При решении задач, связанных с нахождением температурного поля, необходимо иметь дифференциальное уравнение теплопроводности. Вывести его можно различными способами

Предположения: тело однородно и изотропно; физические параметры постоянны; деформация рассматриваемого объема, связанная с изменением температуры, является очень малой величиной по сравнению с самим элементарным объемом; внутренние источники теплоты распределены равномерно

$$q_v = q_v(x, y, z, t) \tag{2.15}$$

Закон сохранения энергии:

Количество теплоты dQ_1 *, введенное в элементарный объем за время* dt *вследствие теплопроводности, а также от внутренних источников* dQ_2 *, равно изменению внутренней энергии или энтальпии* dQ_3 *веществ (в зависимости от того, рассматривается ли изохорический или изобарический процесс), содержащегося в элементарном объеме*

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ_3 \tag{2.16}$$

Выделим в теле элементарный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz и с гранями, параллельными соответствующим координатным плоскостям

dQ_x, dQ_y, dQ_z Количество теплоты, которое подводится к граням за время dt в направлении осей Ox, Oy, Oz

$dQ_{x+dx}, dQ_{y+dy}, dQ_{z+dz}$ Количество теплоты, которое будет отводиться через противоположные грани

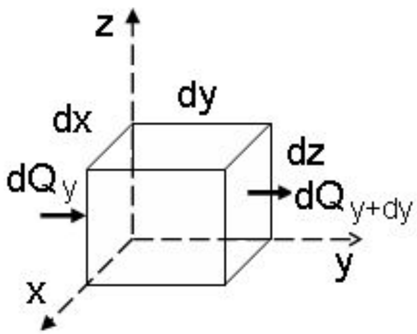


Рис.2.4. Иллюстрация к выводу уравнения теплопроводности

$$dQ_x = q_x dydzdt \qquad dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dydzdt$$

q_x, q_{x+dx} проекции плотности теплового потока на направление нормали к соответствующим поверхностям

<u>Количество теплоты, переносимое в этом направлении</u>

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx} = q_x dydzdt - q_{x+dx} dydzdt$$

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} dxdx \frac{1}{2!} + \ldots$$ - ряд Тейлора $\Longrightarrow$ $$dQ_{x1} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dxdydzdt$$

Аналогично найдем количество теплоты, подводимое в направлении других осей

$$dQ_1 = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dxdydz \qquad (2.17)$$

Количество теплоты, выделяемое внутренними источниками в единице объема за единицу времени q_V Вт/м^3

$$dQ_2 = q_V dVdt \qquad (2.18)$$

Вид третьего слагаемого зависит от типа процесса

$$\begin{cases} c_v \dfrac{dT}{dt} = \left(\dfrac{du}{dt}\right)_v \\ c_p \dfrac{dT}{dt} = \left(\dfrac{dh}{dt}\right)_p \end{cases} \quad (1.17)$$

В ***изохорическом процессе*** вся теплота, подведенная к элементарному объему, уйдет на изменение его внутренней энергии

$$(dQ_3)_V = dU = \rho\left(\frac{du}{dt}\right)_V dtdV = c_v\rho\frac{\partial T}{\partial t}dtdV \quad (2.19)$$

$$c_v\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_V \quad \text{или} \quad c_v\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{q} + q_V \quad (2.20)$$

В ***изобарическом процессе*** вся теплота, подведенная к объему, уйдет на изменение энтальпии

$$(dQ_3)_V = dH = \rho\left(\frac{dh}{dt}\right)_V dtdV = c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t}dtdV \quad (2.21)$$

$$c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_V \qquad c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{q} + q_V \quad (2.22)$$

Для твердых тел различием теплоемкостей, как правило, можно пренебречь, уравнения (20) и (22) будут эквивалентны. В декартовой СК:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + q_V \quad (2.23)$$

О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

<u>одномерное температурное поле</u>

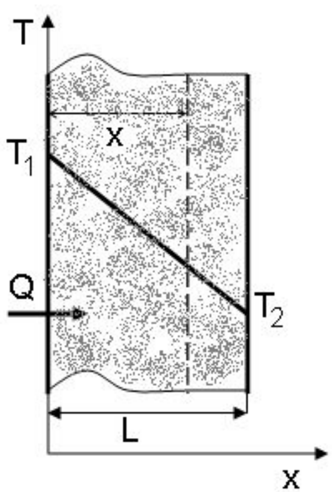
$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + q_V \qquad (2.24)$$

<u>отсутствуют объемные источники</u>, теплофизические свойства считаются постоянными :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (2.25)$$

$a = \lambda/(c\rho)$ - **коэффициент температуропроводности**. Этот коэффициент является параметром вещества и характеризует скорость изменения температуры во времени. Если коэффициент теплопроводности характеризует способность вещества проводить теплоту, то коэффициент температуропроводности является мерой теплоинерционных свойств тела. При прочих равных условиях быстрее нагревается то тело, которое обладает большим коэффициентом температуропроводности

<u>одномерное стационарное температурное поле</u>



$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \qquad (2.26)$$

Именно такое дифференциальное уравнение нам требуется, чтобы решить задачу о плоской стенке. Дополнительно к (2.26) мы имеем 2 условия и

$$x = 0: \; T = T_1 \quad \text{и} \quad x = L: \; T = T_2 \qquad (2.27)$$

Мы сформулировали краевую задачу

Общее решение дифференциального уравнения (2.26) есть

$$T = C_1 x + C_2 \tag{2.28}$$

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x \qquad \Longrightarrow \qquad (13)$$

В случае коэффициента теплопроводности, зависящего от температуры

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) = 0 \tag{2.29}$$

Первый интеграл: $\lambda \frac{dT}{dx} = C_1$ или $\lambda_0 (1 + \beta T)\frac{dT}{dx} = C_1$

$$\lambda_0 \left(T + \beta \frac{T^2}{2} \right) = C_1 x + C_2$$ (Отсюда следует (2.14))

Уравнение (2.23) описывает перенос теплоты в пространстве в самом общем виде. При интегрировании этого уравнения получается *бесчисленное множество решений*, удовлетворяющих ему. Для решения практической задачи необходимо задать вполне конкретные данные, т.е. ограничить рассматриваемую проблему определенными условиями, чтобы сделать решение однозначным.

Это – <u>физические и геометрические</u> условия, а также условия однозначности или краевые условия. Краевые условия подразделяют на <u>начальные и граничные</u>

Начальные условия определяют распределение температуры в теле в начальный момент времени.
В случае ***граничных условий первого рода*** на поверхности тела задается значение температуры для любого момента времени. Именно такие условия мы имели в нашей простой задаче.
В случае ***граничных условий второго рода*** задается плотность теплового потока в каждой точке поверхности тела для любого момента времени.
В случае ***граничных условий третьего рода*** задается температура окружающей среды и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой.

МНОГОСЛОЙНАЯ СТЕНКА

Рассмотрим перенос теплоты через стенку, состоящую из трех плотно прилегающих друг к другу слоев.

При стационарном температурном поле тепловой поток, проходящий через многослойную стенку, одинаков для каждого слоя

$$Q = (T_1 - T')F/(L_1/\lambda_1) \quad Q = (T' - T'')F/(L_2/\lambda_2)$$
$$Q = (T'' - T_2)F/(L_3/\lambda_3)$$

Или относительно разностей температур

$$T_1 - T' = Q(L_1/\lambda_1)/F \qquad T' - T'' = Q(L_2/\lambda_2)/F$$
$$T'' - T_2 = Q(L_3/\lambda_3)/F$$

$$\Longrightarrow \quad T_1 - T_2 = Q(L_1/\lambda_1 + L_2/\lambda_2 + L_3/\lambda_3)/F$$

(2.30)
$$Q = \frac{(T_1 - T_2)F}{L_1/\lambda_1 + L_2/\lambda_2 + L_3/\lambda_3}$$

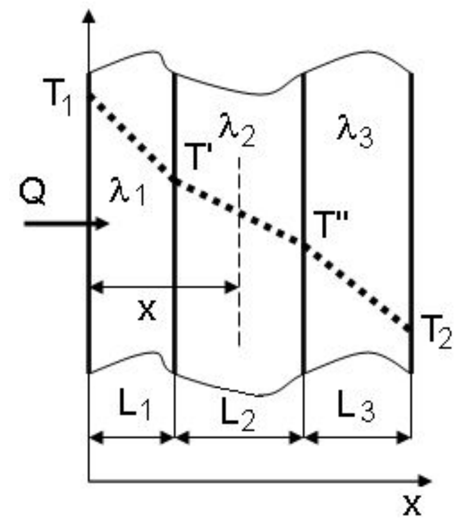


Рис.2.5. Передача теплоты теплопроводностью через трехслойную стенку

Плотность теплового потока через стенку

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\sum_{i=1}^{3}(L_1/\lambda_i)} = \lambda_{eff}\frac{T_1 - T_2}{L}$$

$$\boxed{\lambda_{eff}^{-1} = \frac{1}{L_1 + L_2 + L_3}\sum_{i=1}^{3}(L_1/\lambda_i)}$$

Т.е., поток тепла и плотность теплового потока зависят от **суммы термических сопротивлений всех слоев**

Эту задачу можно решить немного иначе, записывая краевую задачу для уравнения теплопроводности (2.26) $d^2T_k \big/ dx^2 = 0$ и граничные условия на контакте слоев

В соответствии с законом Фурье, поток тепла пропорционален градиенту температуры, так что равенство потоков тепла и температур на границах разных материалов означает

$$\lambda_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_{x=L_1-0} = \lambda_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=L_1+0} \qquad T_1 = T_{x=L_1-0} = T_{x=L_1+0} = T_2$$

$$\lambda_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=L_1+L_2-0} = \lambda_3\left(\frac{\partial T_3}{\partial x}\right)_{x=L_1+L_2+0} \qquad T_2 = T_{x=L_1+L_2-0} = T_{x=L_1+L_2+0} = T_3$$

Граничные условия такого типа называют ***граничными условиями четвертого рода***. Равенство температур на поверхностях раздела материалов означает, что между ними поддерживается *идеальный тепловой контакт*

Тепловой поток через плоскую стенку, содержащую ***n*** слоев

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (L_1/\lambda_i)} \qquad (2.31)$$

эквивалентный коэффициент теплопроводности (равный коэффициенту теплопроводности фиктивной однослойной стенки с толщиной, равной сумме толщин слоев многослойной стенки)

$$\lambda_{eq} = \lambda_{eff} = \sum_{i=1}^{n} L_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} (L_i/\lambda_i) \qquad (2.32)$$

Задача. Пусть стенка печи состоит из внутреннего слоя нержавеющей стали, толщиной 1,2 см, покрытого внешним слоем асбестовой изоляции толщиной 5 см. Температура внутренней поверхности нержавеющей стали равна 800 К, а температура наружной поверхности асбеста равна 350 К. Требуется найти плотность теплового потока через стенку печи и температуру контактной поверхности стали и асбеста. Коэффициенты теплопроводности для стали и асбеста равны соответственно $\lambda_1 = 19$ Вт/(м.К) и $\lambda_2 = 0,7$ Вт/(м.К).

Решение.

Используя полученные выше формулы, найдем тепловой поток через двухслойную стенку

$$Q = \frac{(T_1 - T_2)F}{L_1/\lambda_1 + L_2/\lambda_2}$$

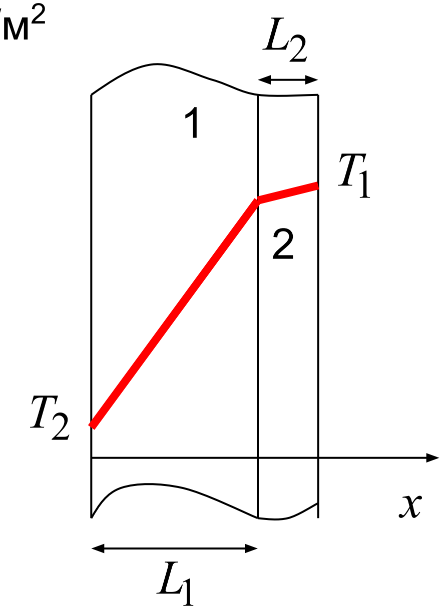
Следовательно, плотность теплового потока

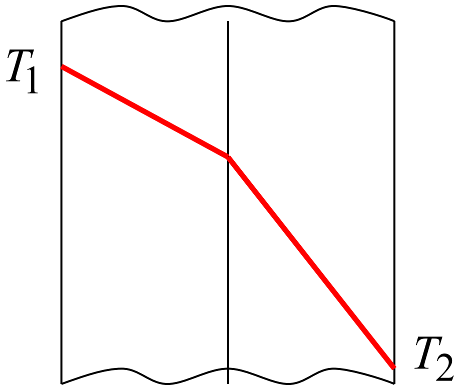
$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{L_1/\lambda_1 + L_2/\lambda_2} = \frac{800 - 350}{0,012/19 + 0,05/0,7} = 6245 \text{ Вт/м}^2$$

температура на контакте

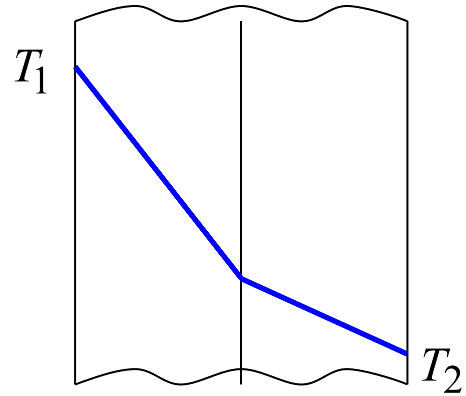
$$T_{L_1} = T_1 - q\frac{L_1}{\lambda_1} = 800 - 6245\frac{0,012}{19} = 796 \text{ К}$$

Следовательно, перепад температур на нержавеющей стали составляет всего лишь около 4 К, а перепад температур на асбесте 446 К





$$\left|\frac{dT}{dx}\right|_1 < \left|\frac{dT}{dx}\right|_2$$



$$\left|\frac{dT}{dx}\right|_1 > \left|\frac{dT}{dx}\right|_2$$

$$T_1 - T_2 = Q\left(L_1/\lambda_1 + L_2/\lambda_2\right)/F$$

$$Q = \frac{\left(T_1 - T_2\right)F}{L_1/\lambda_1 + L_2/\lambda_2}$$

$$q = \frac{\left(T_1 - T_2\right)}{L_1/\lambda_1 + L_2/\lambda_2}$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ ДЛЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

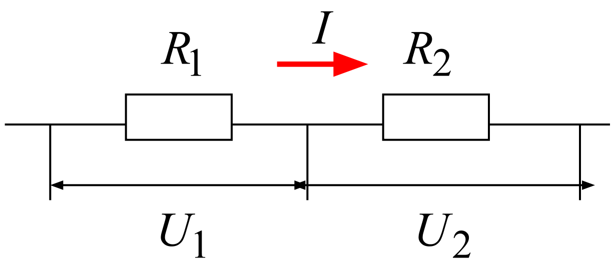
Закон Ома $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{\Delta\varphi}{R}$ $\qquad R = \rho\dfrac{L}{F}$ R – электрическое сопротивление

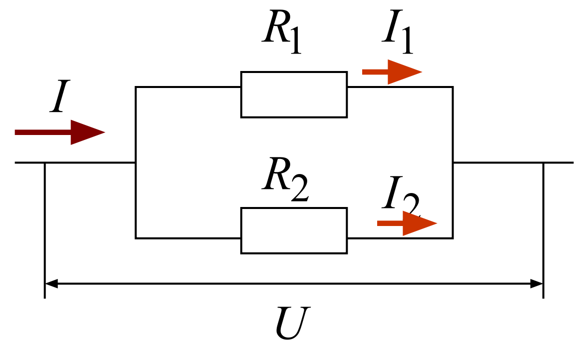
ρ удельное сопротивление, зависящее только от материала проводника, его состояния, температуры

$\sigma = \rho^{-1}$ удельная электропроводность

Эквивалентная форма закона Ома: $\qquad i = \sigma E$

$i = \dfrac{I}{F}$, E – напряженность электрического поля





$$I = I_1 = I_2, \quad U = U_1 + U_2$$

$$R = U/I = R_1 + R_2$$

$$U = U_1 = U_2, \quad I = I_1 + I_2$$

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

В некоторых случаях целесообразен подход к теплопередаче, в котором применяются концепции электрических цепей. Этот подход часто называют ***аналогией между переносом тепла и электричества***

Поток тепла через плоскую плоскую стенку

$$Q = \frac{\lambda F}{L}\left(T_1 - T_2\right) = \frac{\Delta T}{R} \qquad \Delta T = T_1 - T_2$$

$R = L/\left(\lambda F\right)$ тепловое сопротивление

Если считать, что тепловой поток аналогичен электрическому току, комплекс $L/\left(\lambda F\right)$ рассматривать как сопротивление, а разность температур как аналог разности потенциалов, то соотношение для потока тепла (2.13)

$$Q = \frac{\lambda F}{L}\left(T_1 - T_2\right)$$

можно записать в форме, аналогичной закону Ома $Q = \dfrac{\Delta T}{R}$

$\Delta T = T_1 - T_2$ перепад температур (термический потенциал),

$R = L/\left(\lambda F\right)$ термическое сопротивление. Обратная величина термического сопротивления называется тепловой проводимостью, а отношение λ/L - удельной тепловой проводимостью для кондуктивного теплового потока

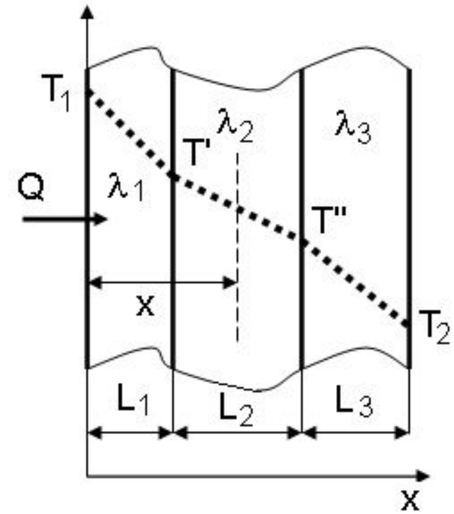


Рис.2.5.

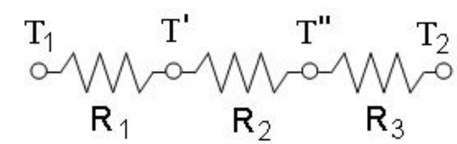


Рис.2.6. Электрическая аналогия к рис.2.5 для задачи с трехслойной стенкой

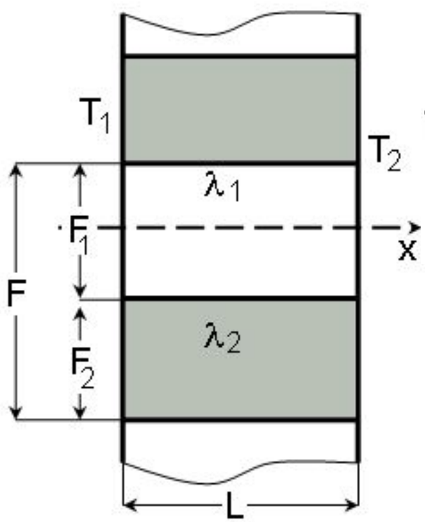
Аналогичным образом можно представить соотношение (2.30) для теплового потока через трехслойную стенку (рис. 2.5 и 2.6)

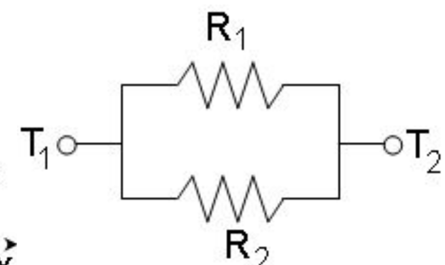
$$Q = \frac{\Delta T}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$\Delta T = T_1 - T_2 \qquad R_i = L_i/\left(\lambda_i F\right) \qquad i = 1,2,3$$

Электрическую аналогию можно использовать и для решения более сложных задач. Например, во многих случаях процесс теплопроводности протекает в материалах, расположенных параллельно. На рис.2.7.показана плита, состоящая из двух материалов, расположенных параллельно и имеющих поперечные сечения F_1 и . F_2

Чтобы решить эту задачу, при заданном перепаде температур поперек плиты каждый слой составной конструкции можно рассматривать отдельно при условии, что для каждой из двух секций перенос тепла можно считать одномерным. Если разность температур между контактирующими материалами мала, тепловой поток вдоль слоев будет намного больше теплового потока в поперечном направлении, и задачу можно считать одномерной без сколько-нибудь серьезной потери точности





$$R_1 = \frac{L}{\lambda_1 F_1}$$

$$R_2 = \frac{L}{\lambda_2 F_2}$$

Рис.2.7. Теплопроводность через составную стенку из двух параллельных секций

общий тепловой поток

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{T_1 - T_2}{L/(\lambda_1 F_1)} + \frac{T_1 - T_2}{L/(\lambda_2 F_2)}$$

$$= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)(T_1 - T_2)$$

Общая площадь, которую пересекает тепловой поток, равна сумме двух отдельных площадей; обратная величина суммарного термического сопротивления равна сумме обратных величин отдельных термических сопротивлений. Тепловая цепь для этой задачи представляет собой параллельное соединение двух термических сопротивлений

$q = Q/F$ Найдите λ_{eff}

Более сложным примером использования понятия тепловых сопротивлений является задача о передаче тепла через составную стенку, которая должна представляться с помощью последовательно и параллельно соединенных термических сопротивлений (рис.2.8). Для этой системы термическое сопротивление среднего слоя дается формулой

$$R_2 = \frac{R_B R_C}{R_B + R_C}$$

а тепловой поток определяется следующим образом

$$Q = \frac{\Delta T}{\sum\limits_{n=1}^{n=N} R_n}$$

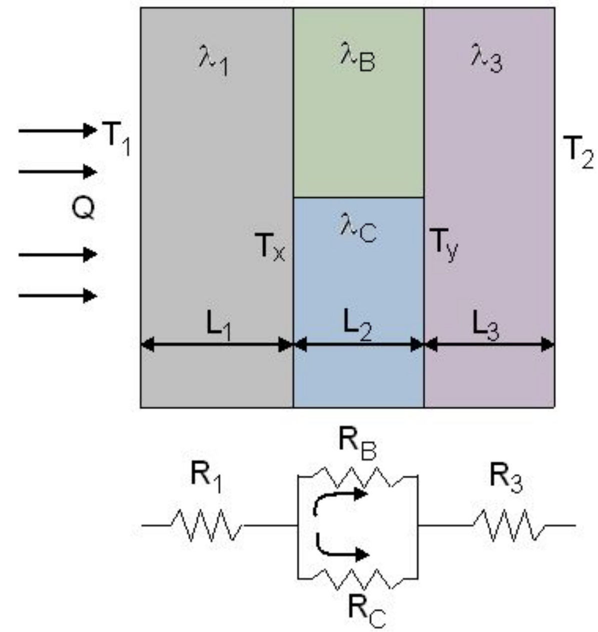


Рис. 2.8. Тепловая цепь с параллельно и последовательно соединенными элементами

$$R_1 = \frac{L_1}{\lambda_1 F_1} \qquad R_3 = \frac{L_1}{\lambda_1 F_1} \qquad R_B = \frac{L_B}{\lambda_B F_B} \qquad R_C = \frac{L_C}{\lambda_C F_C}$$

Задачи:

1. Печь изнутри выложена динасовым кирпичом (λ=0,35 Вт/(м·К), за которым следует слой красного кирпича (λ=0,76) толщиной 250 мм и, наконец, снаружи – слой силикатного кирпича (λ=0,82) толщиной 60 мм. На внутренней поверхности печи температура T=1150°C, на наружной T=60°C. Какова должна быть толщина слоя динасового кирпича, чтобы температура красного кирпича не превышала T=820 °C. Найти температуру на внутренней стороне силикатного кирпича.

2. Найти эквивалентный коэффициент теплопроводности $\lambda_{экв}$ (в поперечном направлении) для плоского конденсатора, который собран из z листов алюминиевой фольги (λ=204 Вт/(м·К)) толщиной 0,02 мм и z листов изоляционной бумаги (λ=0,18 Вт/(м·К)) с толщиной 0,05 мм.

КОНТАКТНОЕ ТЕРМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Если различные теплопроводящие слои находятся в контакте, на поверхности раздела твердых тел часто возникает термическое сопротивление. Это термическое сопротивление, которое называют ***контактным термическим сопротивлением***, возникает, когда поверхности двух материалов недостаточно плотно прижаты друг к другу и между ними остается тонкий слой жидкости или газа

Контактное термическое сопротивление зависит, прежде всего, от шероховатости поверхностей; давления, прижимающего две поверхности друг к другу; свойств среды в районе контактной поверхности и температуры в зоне контакта. Механизм теплопередачи в зоне контакта довольно сложен. В местах непосредственного контакта твердых поверхностей осуществляется процесс теплопроводности, а перенос тепла через зазоры, заполненные жидкостью или газом, осуществляется конвекцией или излучением

контактное термическое сопротивление

$$R_i = \frac{\Delta T_i}{Q/F}$$

Считается, что две поверхности находятся в ***идеальном тепловом контакте***, когда контактное термическое сопротивление стремится к нулю, и на поверхности раздела нет перепада температур

Проблема контактного термического сопротивления достаточно сложна, и не существует единой теории, позволяющей достаточно точно рассчитывать контактное сопротивление в инженерных задачах.

Рассмотрим пример.

$$dQ = -\lambda F \frac{dT}{dx} dx, \quad Q = \frac{\lambda F}{L}\left(T_1 - T_2\right)$$

Пусть стена здания состоит из слоя обычного кирпича ($L_1 = 0{,}1$м; $\lambda_1 = 0{,}7$ Вт/(м.К)) и слоя гипсовой штукатурки ($L_2 = 0{,}038$ м; $\lambda_2 = 0{,}48$ Вт/(м.К)). Сравнить тепловые потоки через эту стену и через такую же стену с термическим сопротивлением на границе раздела между кирпичом и штукатуркой, равным 0,1 К/Вт.

Плотность теплового потока ***через идеализированную стенку*** при разности температур $\Delta T = T_{10} - T_{20}$ в 1 К равна

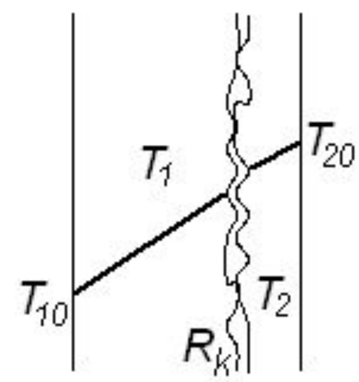
$$\frac{Q}{F\left(T_{10} - T_{20}\right)} = \frac{1}{L_1/\lambda_1 + L_2/\lambda_2} = \frac{1}{0{,}1/0{,}7 + 0{,}038/0{,}48} = 4{,}5 \text{ Вт/(м}^2\text{.К).}$$

Поверхность раздела представляется третьим, последовательно соединенным термическим сопротивлением, после чего плотность теплового потока ***через стенку с дополнительным сопротивлением*** записывается в виде

$$\frac{Q}{F\left(T_{10} - T_{20}\right)} = \frac{1}{R_1 + R_2 + R_k} = \frac{1}{0{,}222 + 0{,}1} = 3{,}11 \text{ Вт/(м2.К).}$$

Достаточно ***строгая математическая формулировка задачи*** о нахождении поля температуры в этой двухслойной стенке включает уравнение теплопроводности (2.26) для каждого слоя стенки

$$\frac{d^2 T_i}{dx^2} = 0 \quad i = 1{,}2$$



$$\frac{d^2T_i}{dx^2}=0 \quad i=1,2$$

и граничные условия $\qquad x=0: \; T_1=T_{10}$

$$x=L_1+L_2: \; T_2=T_{20}$$

$$x=L_1: \quad \lambda_1\frac{dT_1}{dx}=\lambda_2\frac{dT_2}{dx}=\frac{Q}{F} \qquad T_1-T_2=R_k\frac{Q}{F}$$

Решение уравнения теплопроводности для каждого слоя имеет вид

$$T_i=A_ix+B_i \tag{2.33}$$

Постоянные интегрирования, которые находим с помощью граничных условий:

$$B_1=T_{10}$$
$$A_2(L_1+L_2)+B_2=T_{20}$$
$$\lambda_1B_1=\lambda_2B_2=\frac{Q}{F}$$
$$L_1(A_1-A_2)+(B_1-B_2)=R_k\frac{Q}{F}$$

Окончательное решение

$$T_1=T_{10}+\left(T_{20}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}T_{10}\right)\frac{x}{L_1+L_2}-T_{10}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-R_k\lambda_1\right)\frac{x}{L_1}$$

$$T_2=\left(T_{20}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}T_{10}\right)\frac{x}{L_1+L_2}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}T_{10}$$