5. Числовые характеристики случайных величин

параметр распределения

оценка параметра

меры положения (характеристики центра)

меры рассеяния (разброса, изменчивости)

характеристики формы

среднее – центр группирования – математическое ожидание взвешенное среднее

мода

медиана

унимодальное и бимодальное распределения

асимметрия (skewness)

отклонение от центра

эксцесс

дисперсия (variance)

среднеквадратическое (стандартное) отклонение

коэффициент вариации

моменты распределения

ЗР исчерпывающе описывают СВ и позволяют рассчитать вероятности любых связанных с ними событий

Однако:

1) Не всегда необходимы (кто лучше стреляет?)

2) Полное описание относительно громоздко при естественном стремлении уйти от «много чисел» к «всего нескольким»

Нужен небольшой набор чисел, которые описывали бы СВ лаконично

Числовые характеристики [распределения] случайной величины **– числа, характеризующие наиболее существенные черты распределения**

ЧХ

по происхождению

<u>Теоретические –</u> рассматриваемые как объективные, истинные параметры распределений – *детерминированные значения*

Статистические (выборочные) оценки истинных параметров – ***случайные значения***

И параметры, и их оценки разделяют на 3 группы – *по существенной черте распределения*, которую они выражают

Меры положения – (основной тенденции)

Характеристики формы

Меры рассеяния (изменчивости)

Характеристики положения

Фиксируют место СВ на числовой оси.
Это некоторое ***среднее значение***,
эталон, место нахождения,
вокруг которого ***группируются*** значения СВ

еще называют – *«центр группирования»*, СРЕДНЕЕ

Используются как *представители СВ* в грубых, прикидочных расчетах (например…)

Наиболее важное из средних – *математическое ожидание*

Математическое ожидание дискретной величины есть ***сумма произведений всех ее значений на вероятности этих значений***

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 \ldots + x_m p_m = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$$

Другие обозначения : M_X , **μ**, (E, **η**)

Примеры

Примеры

М.о. числа очков, выбиваемых 1-ым стрелком:

$$M(X) = 1 \cdot 0.0 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.8 = 2.8$$

М.о. числа очков, выбиваемых 2-ым стрелком:

$$M(Y) = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.3 = 2.1$$

Для любой биномиальн 3.0 ины $M = np$

М.о. числа попаданий при n = 4 выстрелах с вероятностью попасть в каждом p = 0.75 ?

Математическое ожидание непрерывной СВ

Примеры на практике

$$M(X)=\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x\cdot \underbrace{f(x)dx}_{dp}$$

или в общем случае

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$$

Полезно иметь представление **о свойствах матожидания**

Мода и Медиана

Другие характеристики центра

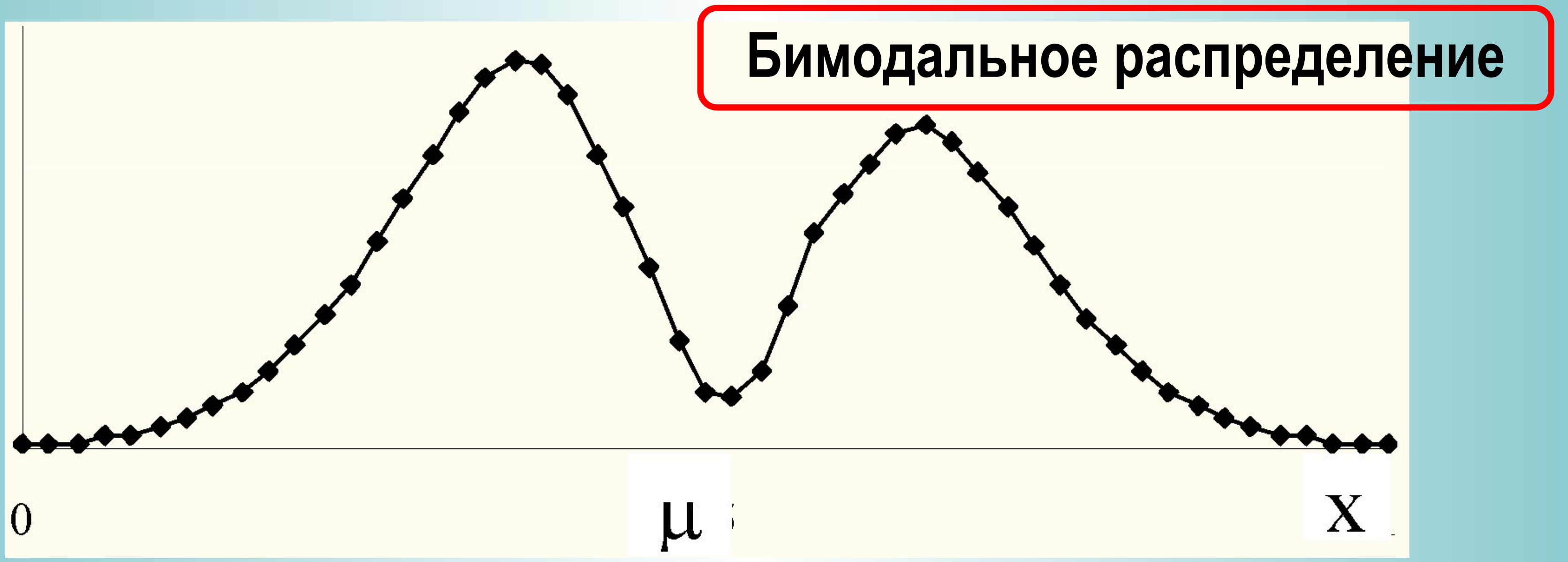
Mo **– значение величины X, которому соответствует максимальная плотность распределения.**
Для дискретной X – наиболее вероятное значение

$$f(Mo) = \max f(x) \qquad Mo = x\{p_{i\,max}\},\ i = 1, \ldots, m$$

Me **– значение величины X, для которого вероятность меньших значений равна вероятности больших**

$$F(Me) = 0.5$$


Унимодальное распределение
Mo
Me
μ
про площади
x


Бимодальное распределение
0
μ
x

Рассмотрели **характеристики центра:**

матожидание M **или** μ

моду Mo

медиану Me

Рассматриваем **характеристики рассеяния − разброса, изменчивости, вариации**

Дисперсия (*Variance*)

D, σ^2, Var …

Указывает,
каких отклонений от центра следует ожидать ↓

Матожидание квадрата отклонений от матожидания

$$D(X) = M[(X - M(X))^2]$$

можно записать

Для расчетов:

$$D(X) = M(X)^2 - M^2(X)$$

Дисперсия дискретной СВ:

$$D(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 p_j - M^2(X)$$

Дисперсия непрерывной СВ:

$$D_X = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M_X^2$$

$$\boldsymbol{D_X = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^2 f(x)dx - M_X^2}$$

Был пример про стрелков:

значения дисперсии показали – 1-ый стреляет «кучнее», у него разброс попаданий меньше

Проверьте!

Важный пример

Применение общей формулы в случае биномиального распределения дает:

$$D = n \cdot p \cdot q$$

Например:
дисперсия количества попаданий
при 4-х независимых выстрелах и вероятности
попасть в каждом 0.75 равна

$$D = 4 \cdot 0.75 \cdot 0.25 = 0.75$$

Пример непрерывной величины

Известно, что плотность распределения $f(x) = 1/4$ в интервале от 40 до 44.

Тогда:

$$D = \int_{40}^{44} \frac{x^2}{4} dx - 42^2 = \left. \frac{x^3}{12} \right|_{40}^{44} - 42^2 = \frac{4}{3}$$

Важный пример

Для любого равномерного распределения:

$$D(X) = \frac{(x_{\max} - x_{\min})^2}{12}$$

Проверьте! Получатся ли 4 / 3 из предыдущего примера?

Полезно иметь представление **о свойствах дисперсии**

Более естественная мера разброса ↔

имеет ту же размерность, что и СВ

это корень квадратный из дисперсии

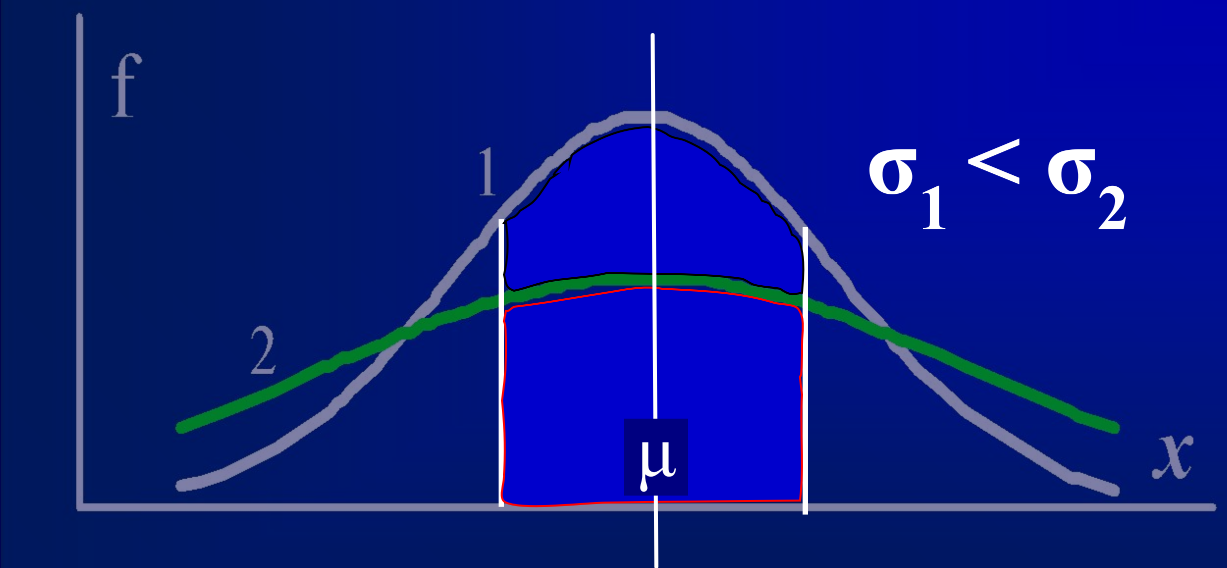
$$\sigma = \sqrt{D}$$

среднеквадратическое (стандартное) отклонение

<u>«Физический смысл» *σ* :</u>
показывает, как далеко <u>*в среднем*</u>
отдельные значения отклоняются от их центра

«Геометрический смысл» σ и D:

характеризуют степень растянутости, «размазанности» кривой распределения вдоль числовой оси



$\sigma_1 < \sigma_2$

Чем < σ , тем большая часть значений находится вблизи центра распределения

Отклонения от центра отдельных значений

38 попугаев!

иногда измеряются в «сигмах»

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

нормализованное (стандартизованное) отклонение

Еще одна характеристика изменчивости

коэффициент вариации

$$v = \frac{\sigma}{\mu}\ [100\%]$$

Мера относительного рассеяния → полезна при сравнении СВ, особенно одних и тех же параметров но разных объектов

Пример

Одно и то же стандартное отклонение веса в 0.5 кг было бы большим для группы младенцев, но очень небольшим для студентов.

Это видно по коэффициенту вариации

v (млад) = **0.5/3.5 > 14%** v (студ) = **0.5/65 < 0.8%**

Моменты распределения

Так называют параметры распределений – по аналогии с механикой

Математическое ожидание μ – *начальный момент 1-го порядка*

Дисперсия D – *центральный момент 2-го порядка*

С моментами более высоких порядков связаны характеристики формы распределения

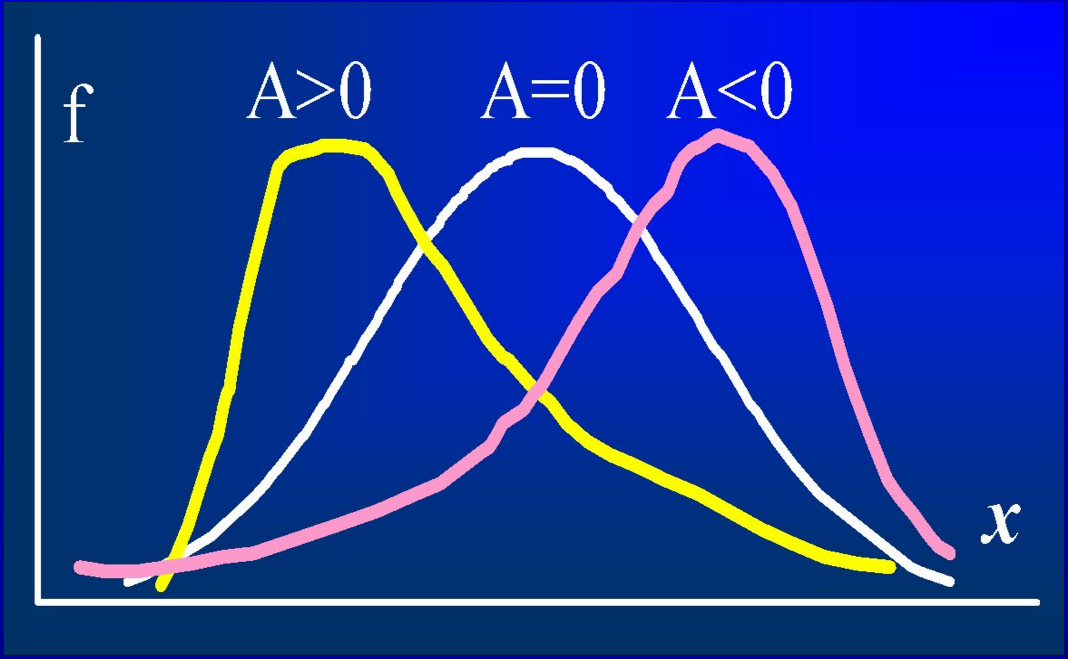
Коэффициент асимметрии

или просто **асимметрия** (скошенность)

Обозначается A (или Sk)

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

μ_3 – **центральный момент 3-го порядка**



Коэффициент эксцесса

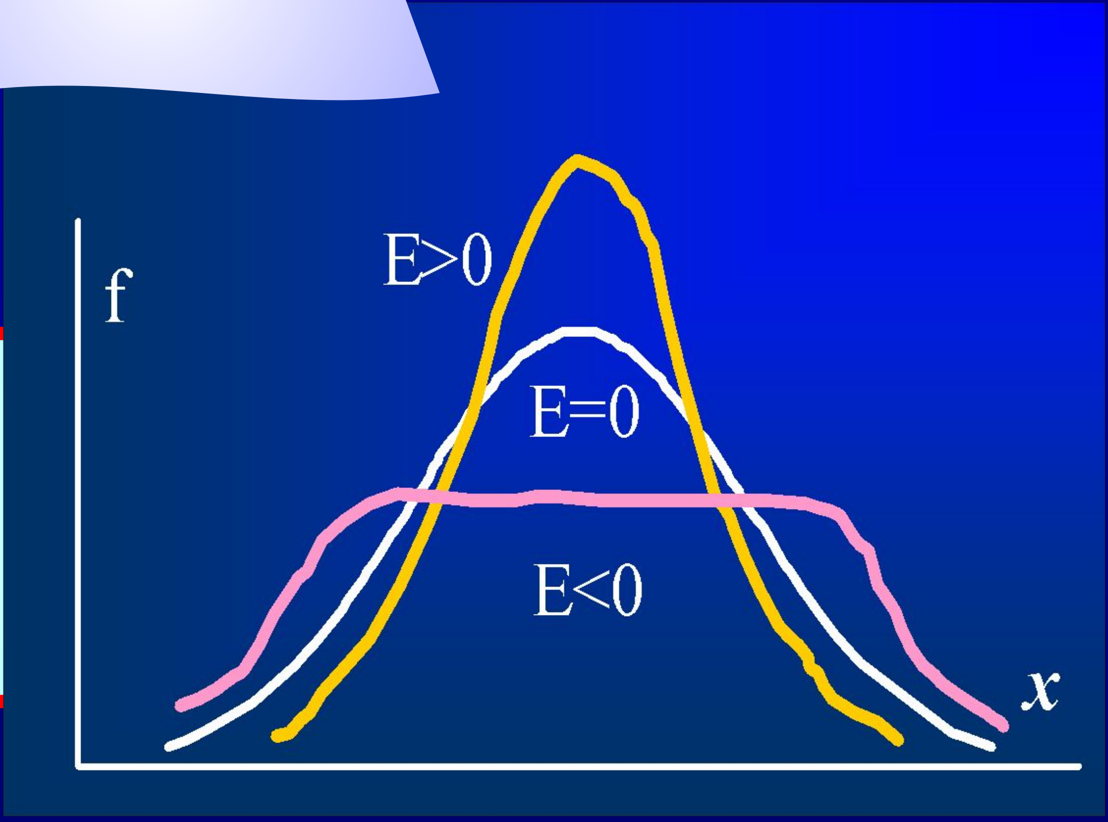
или просто эк

Об начается E

Что за «3»?

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

μ_4 – центральный момент 4-го порядка



A и E

позволяют судить

об отклонении распределения

от «стандарта» – нормального закона распределения