Законы распределения случайных величин

Вопросы темы

1. Случайные величины.
2. Распределение дискретных и непрерывных случайных величин и их характеристики: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.
3. Законы распределения случайных величин.
4. Нормальный закон распределения.

Случайная величина

Под *случайной величиной* понимается переменная, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества своих значений (какое именно — заранее не известно).

Примеры случайных величин:

1) число родившихся детей в течение суток в городе N;
2) количество бракованных изделий в данной партии;
3) число произведенных выстрелов до первого попадания;
4) дальность полета артиллерийского снаряда;
5) расход электроэнергии на предприятии за месяц.

Случайная величина называется *дискретной* (*прерывной*), если множество ее значений конечное, или бесконечное, но счетное.

Под *непрерывной* случайной величиной будем понимать величину, бесконечное несчетное множество значений которой есть некоторый интервал (конечный или бесконечный) числовой оси.

Определение случайной величины (СВ)

О п р е д е л е н и е. ***Случайной величиной*** X *называется функция, заданная на множестве элементарных исходов (или в пространстве элементарных событий)*, т.е.

$$X = f(\omega),$$

где ω — элементарный исход (или элементарное событие)

ДСВ

Для дискретной случайной величины множество возможных значений случайной величины, т.е. функции $f(\omega)$, конечно или счетно, для непрерывной — бесконечно и несчетно.

НСВ

Случайные величины будем обозначать прописными буквами латинского алфавита X, Y, Z,..., а их значения — соответствующими строчными буквами x, y, z,... .

Закон распределения СВ

Наиболее полным, исчерпывающим описанием случайной величины является ее закон распределения.

О п р е д е л е н и е. ***Законом распределения*** *случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.*

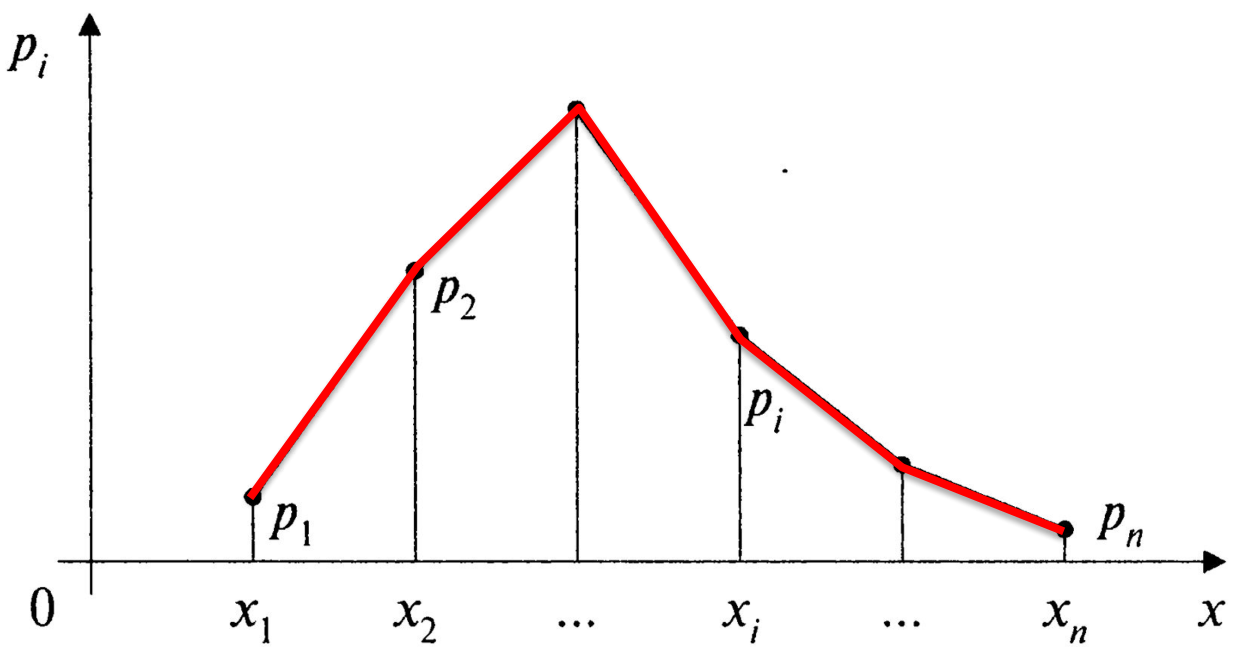
Для д и с к р е т н о й случайной величины закон распределения может быть задан в виде таблицы, аналитически (в виде формулы) и графически.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины X является таблица (матрица), в которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины и соответствующие их вероятности, т.е.

X:						
	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Ряд распределения может быть изображен графически, если по оси абсцисс откладывать значения случайной величины, а по оси ординат — соответствующие их вероятности. Соединение полученных точек образует ломаную, называемую *многоугольником* или *полигоном распределения вероятностей*



ПРИМЕР. Вероятности того, что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам *А* и *Б*, равны соответственно 0,7 и 0,9. Составить закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

Р е ш е н и е. Возможные значения случайной величины X — числа сданных экзаменов — 0, 1, 2.

Пусть A_i — событие, состоящее в том, что студент сдаст i-й экзамен ($i = 1, 2$). Тогда вероятности того, что студент сдаст в сессию 0, 1, 2 экзамена, будут соответственно равны (считаем события A_1 и A_2 независимыми):

$$P(X = 0) = P(\overline{A}_1 \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) =$$

$$= (1-0{,}7)(1-0{,}9) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03;$$

$$P(X = 1) = P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}34,$$

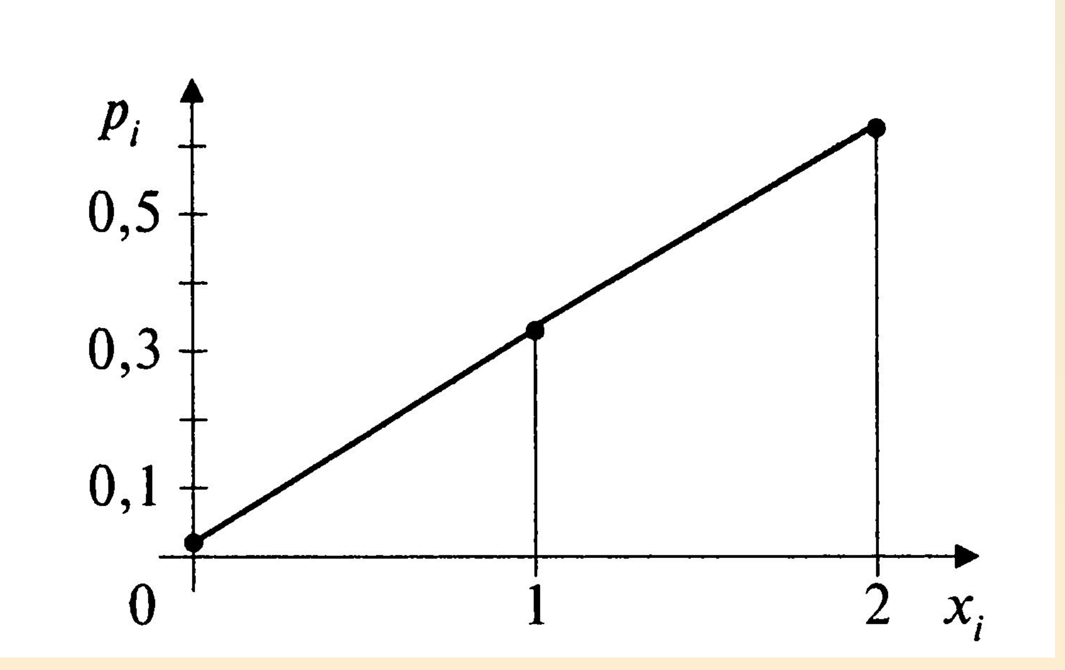
$$P(X = 2) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63.$$

Составим ряд распределения случайной величины

X:

x_i	0	1	2
p_i	0,03	0,34	0,63

Графическое представление полученного ряда распределения вероятностей (полигон) имеет вид



Математические операции над ДСВ

Пусть даны две случайные величины:

X:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Y:

y_j	y_1	y_2	...	y_m
p_j	p_1	p_2	...	p_m

Произведением kX случайной величины X на постоянную величину k называется случайная величина, которая принимает значения kx_i с теми же вероятностями p_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

m-й степенью случайной величины X, т.е. X^m, называется случайная величина, которая принимает значения x_i^m с теми же вероятностями p_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Пример Дана случайная величина

X:

x_i	-2	1	2
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти закон распределения случайных величин: а) $Y = 3X$; б) $Z = X^2$.

Решение.

а) Y:

y_i	-6	3	6
p_i	0,5	0,3	0,2

б) Z:

z_i	1	4
p_i	0,3	0,7

?

Т.к $Z = 4$ может быть получено возведением в квадрат значений (-2) с вероятностью 0,5 и $(+2)$ с вероятностью 0,2, то по теореме сложения $P(Z = 4) = 0,5 + 0,2 = 0,7$. Итак, закон распределения случайной величины

Математические операции над ДСВ

Суммой (*разностью* или *произведением*) *случайных величин X и Y* называется случайная величина, которая принимает все возможные значения вида x_i+y_j (x_i-y_j или $x_i \cdot y_j$), где $i=1,2,...,n$; $j=1,2,...,m$, с вероятностями p_{ij} того, что случайная величина X примет значение x_i, а Y — значение y_j:

$$p_{ij} = P\left[\left(X = x_i\right)\left(Y = y_j\right)\right].$$

Если случайные величины X и Y независимы, т.е. независимы любые события $X=x_i$, $Y=y_j$, то по теореме умножения вероятностей для независимых событий

$$p_{ij} = P\left(X = x_i\right) \cdot P\left(Y = y_j\right) = p_i \cdot p_j$$

Замечание. Приведенные выше определения операций над дискретными случайными величинами нуждаются в уточнении: так как в ряде случаев одни и те же значения x_i^m, $x_i \pm y_j$, $x_i y_j$ могут получаться разными способами при различных x_i, y_j с вероятностями p_i, p_{ij}, то вероятности таких повторяющихся значений находятся сложением полученных вероятностей p_i или p_{ij}

Пример Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

X:

x_i	0	2	4
p_i	0,5	0,2	0,3

Y:

y_j	−2	0	2
p_j	0,1	0,6	0,2

Найти закон распределения случайных величин: а) $Z=X-Y$; б) $U=XY$.

x_i \ y_j	p_i \ p_j	−2	0	2
		0,1	0,6	0,3
0	0,5			
2	0,2			
4	0,3			

В результате получим распределение

Z:

z_k	-2	0	2	4	6
p_k	0,15	0,36	0,26	0,20	0,03

б) Распределение $U=XY$ находится аналогично п. а).

U:

u_k	-8	-4	0	4	8
p_k	0,03	0,02	0,80	0,06	0,09

Характеристики ДСВ

1. Математическое ожидание

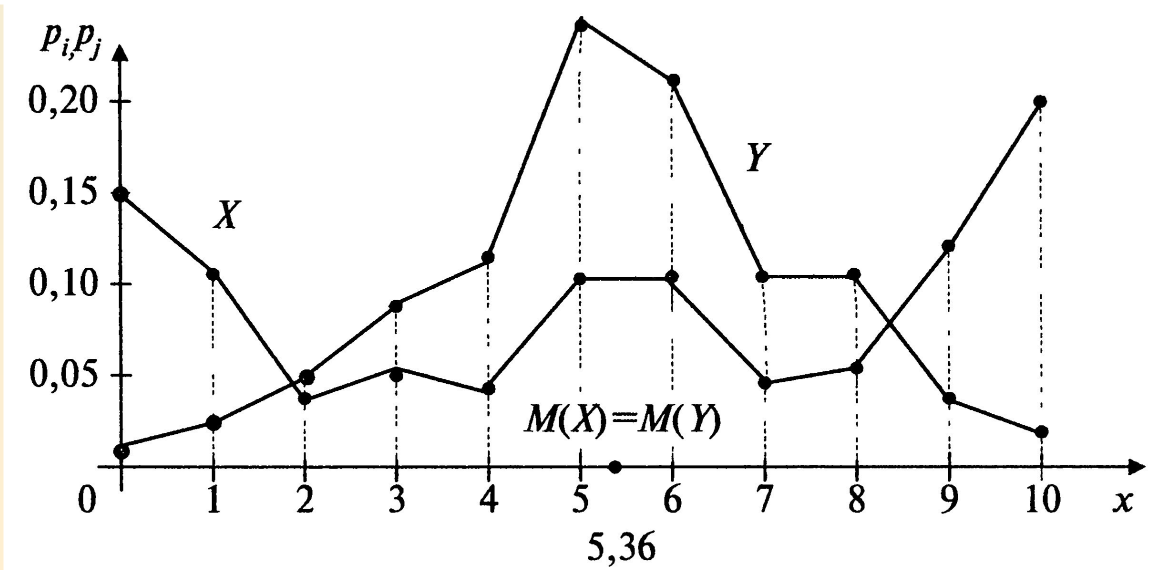
Задача. Известны законы распределения случайных величин X и Y — числа очков, выбиваемых 1-м и 2-м стрелками.

X:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

Y:

y_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_j	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02



О п р е д е л е н и е. ***Математическим ожиданием***, *или* ***средним значением***, *M*(*X*) *дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности*:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Вычислить $M(X)$ и $M(Y)$ в задаче о стрелках.

Задача. Известны законы распределения случайных величин X и Y — числа очков, выбиваемых 1-м и 2-м стрелками.

X:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

Y:

y_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_j	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

$$M(X)=0\cdot 0{,}15+1\cdot 0{,}10+2\cdot 0{,}04+\ldots+9\cdot 0{,}12+10\cdot 0{,}20=5{,}36$$

$$M(Y)=0\cdot 0{,}01+1\cdot 0{,}03+2\cdot 0{,}05+\ldots+9\cdot 0{,}04+10\cdot 0{,}02=5{,}36$$

Свойства математического ожидания

1. *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной*:

$$M(C) = C.$$

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания*, т.е.

$$M(kX) = kM(X).$$

3. *Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно такой же сумме их математических ожиданий*, т.е.

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

4. *Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий*.

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

5. *Если все значения случайной величины увеличить (уменьшить) на постоянную С, то на эту же постоянную С увеличится (уменьшится) математическое ожидание этой случайной величины*:

$$M(X \pm C) = M(X) \pm C.$$

6. *Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю*:

$$M[X - M(X)] = 0.$$

Пример Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 8X - 5Y + 7$, если известно, что $M(X) = 3$, $M(Y) = 2$.

Р е ш е н и е. Используя свойства **1**, **2**, **3** математического ожидания, найдем

$$M(Z) = 8M(X) - 5M(Y) + 7 = 8 \cdot 3 - 5 \cdot 2 + 7 = 21.$$

2. Дисперсия ДСВ

О п р е д е л е н и е. ***Дисперсией*** $D(X)$ *случайной величины* X *называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания*

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

или

$$D(X) = M(X - a)^2, \text{ где } a = M(X).$$

3. Среднее квадратическое отклонение ДСВ

О п р е д е л е н и е. ***Средним квадратическим отклонением*** (***стандартным отклонением*** или ***стандартом***) σ_x *случайной величины* X *называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии*:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

Пример В задаче о стрелках вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа выбитых очков для каждого стрелка.

Р е ш е н и е. В примере . были вычислены $M(X)=5{,}36$ и $M(Y)=5{,}36$.

$$D(X) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}15 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}11 + \ldots +$$

$$+ (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}20 = 13{,}61,$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 3{,}69;$$

$$D(Y) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}01 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}03 + \ldots +$$

$$+ (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}02 = 4{,}17,$$

$$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = 2{,}04.$$

Свойства дисперсии

1. *Дисперсия постоянной величины равна нулю:*

$$D(C) = 0.$$

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его при этом в квадрат:*

$$D(kX) = k^2 D(X).$$

3. *Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания:*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

или

$$D(X) = M(X^2) - a^2, \text{ где } a = M(X).$$

4. *Дисперсия алгебраической суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их дисперсий*

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Функция распределения СВ

О п р е д е л е н и е. ***Функцией распределения*** *случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x:*

$$F(x) = P(X < x).$$

Функцию $F(x)$ иногда называют ***интегральной функцией распределения*** или ***интегральным законом распределения***.

Пример . Дан ряд распределения случайной величины

X:

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Найти и изобразить графически ее функцию распределения.

Р е ш е н и е. Будем задавать различные значения x и находить для них $F(x) = P(X < x)$.

1. Если $x \le 1$, то, очевидно, $F(x) = 0$ (в том числе и при $x = 1$ $F(1) = P(x < 1) = 0$).

2. Пусть $1 < x \le 4$ (например, $x = 2$);
$F(x) = P(X = 1) = 0,4$. Очевидно, что и $F(4) = P(X < 4) = 0,4$.

3. Пусть $4 < x \le 5$ (например, $x = 4,25$);

$$F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 4) = 0,4 + 0,1 = 0,5.$$

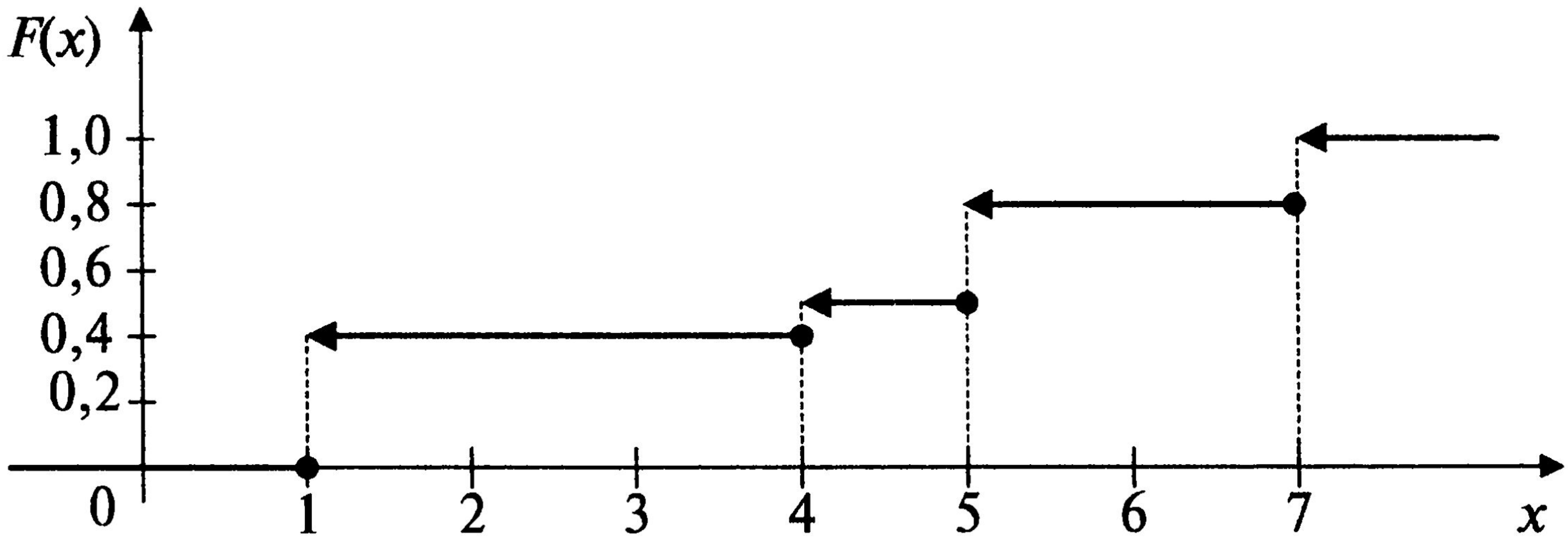
Очевидно, что и $F(5) = 0,5$.

4. Пусть $5 < x \le 7$. $F(x) = [P(X = 1) + P(X = 4)] + P(X = 5) = 0,5 + 0,3 = 0,8$. Очевидно, что и $F(7) = 0,8$,

5. Пусть $x > 7$. $F(x) = [P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 5)] + P(X = 7) = 0,8 + 0,2 = 1$.

Изобразим функцию $F(x)$ графически

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ 0{,}4 & \text{при} \quad 1<x\le 4,\\ 0{,}5 & \text{при} \quad 4<x\le 5,\\ 0{,}8 & \text{при} \quad 5<x\le 7,\\ 1{,}0 & \text{при} \quad x>7.\end{cases}$$



Свойства функции распределения

1. *Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей:*

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. *Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси.*

3. *На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности равна единице*, т.е.

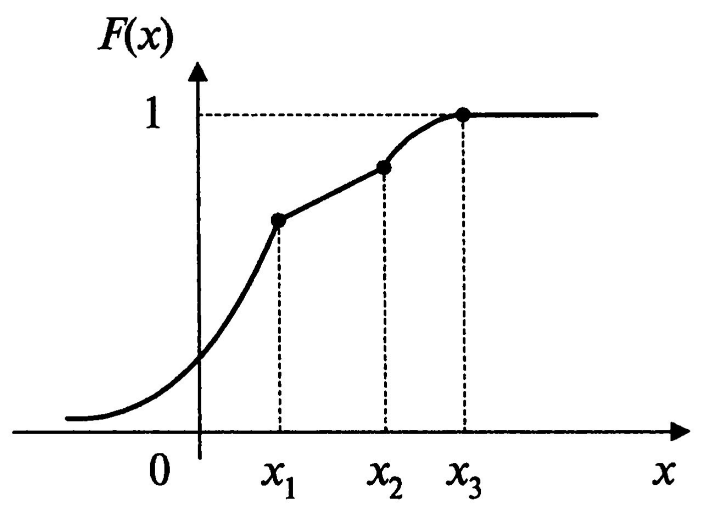
$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

4. *Вероятность попадания случайной величины в интервал* $[x_1, x_2)$ (включая x_1) *равна приращению ее функции распределения на этом интервале*, т.е.

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Непрерывные случайные величины

О п р е д е л е н и е. *Случайная величина X называется* ***непрерывной****, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.*



О п р е д е л е н и е. ***Плотностью вероятности*** (***плотностью распределения*** или просто ***плотностью***) $\varphi(x)$ *непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения*

$$\varphi(x) = F'(x) .$$

Плотность вероятности иногда называют *дифференциальной функцией* или *дифференциальным законом распределения.*

График плотности вероятности $\varphi(x)$ называется *кривой распределения.*

Свойства плотности вероятности НСВ

1. ***Плотность вероятности—неотрицательная функция***, т.е.

$$\varphi(x) \geq 0.$$

2. ***Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал $[a, b]$ равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от a до b***, т.е.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

3. ***Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через плотность вероятности по формуле:***

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx.$$

4. ***Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности непрерывной случайной величины равен единице:***

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1.$$