Семинар 30

Приложения двойного интеграла. Вычисление площади плоской фигуры. Вычисление объема тела

Площадь плоской фигуры, ограниченной областью D, находится по формуле $S = \iint_D dxdy$

Если область D определена, например, неравенствами $a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$

то $$S = \iint_D dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy$$

Если область D в полярных координатах определена неравенствами

$\alpha \le \theta \le \beta, \varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta)$, то $S = \iint_D \rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \rho d\rho$

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью z=f(x,y), снизу плоскостью z=0 и сбоку прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости OXY область D. вычисляется по формуле: $V = \iint_D f(x,y)dxdy$

Примеры с решениями

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 4y - y^2, x + y = 6$

Решение. Найдем координаты точек пересечения заданных линий, решая систему уравнений $x = 4y - y^2, x + y = 6$. В результате получим A(4;2), B(3;3).

Таким образом, $S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_2^3 dy \int\limits_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int\limits_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2} dy = \int\limits_2^3 (-y^2 + 5y - 6)dy = \left[-\frac{1}{3}y^2 + \frac{5}{2}y^2 - 6y\right]_2^3 = \frac{1}{6}$

2. Найти площадь, ограниченную лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$

Решение. Полагая $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$, преобразуем уравнение кривой к полярным координатам.

В результате получим $\rho^2 = a^2\sin 2\theta$. Очевидно, что изменению угла θ от 0 до $\frac{\pi}{4}$ соответствует четверть искомой площади. Следовательно,

$$S = 4\iint\limits_D \rho d\theta d\rho = 4\int\limits_0^{\pi/4} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} d\rho = 2\int\limits_0^{\pi/4} \rho^2\Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta = 2a^2\int\limits_0^{\pi/4}\sin 2\theta d\theta = -a^2\left[\cos 2\theta\right]_0^{\pi/4} = a^2$$

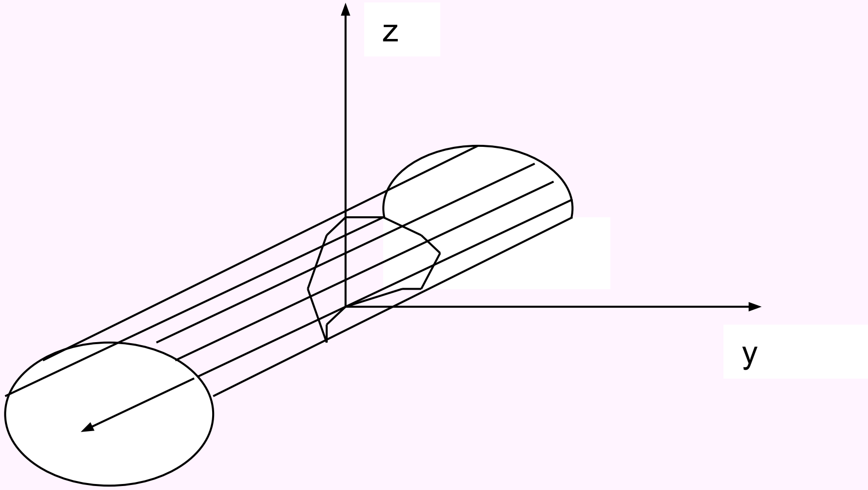
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = 1 + x^2, z = 3x, y = 5, z = 0$ и расположенного в первом октанте.

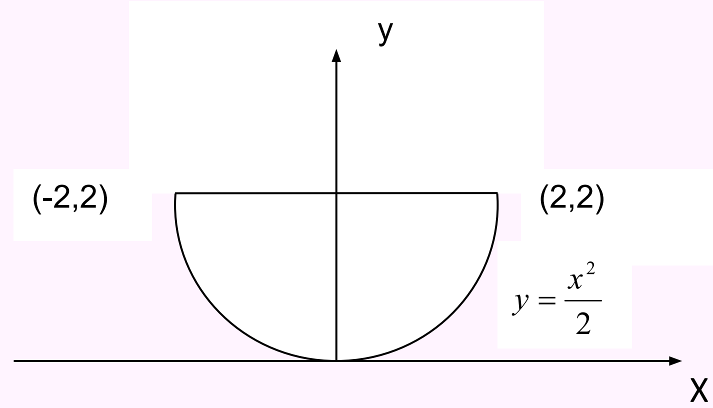
Решение. Тело, объем которого надо вычислить, ограничено сверху плоскостью $z=3x$, сбоку – параболическим цилиндром $y = 1 + x^2$ и плоскостью $y=5$.

Следовательно, это – цилиндрическое тело. Область D ограничена параболой $y = 1 + x^2$ и прямыми $y=5, x=0$. Таким образом, имеем

$$V = \iint_D 3xdxdy = 3\int_0^2 xdx \int_{1+x^2}^5 dy = 3\int_0^2 x \cdot [y]_{1+x^2}^5 dx = 3\int_0^2 (4x - x^2)dx = 3\left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 12$$

4. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрическими поверхностями $z = 4 - y^2, y = \frac{x^2}{2}$ и плоскостью $z=0$





Решение

Поверхность, ограничивающая тело сверху имеет уравнение $z = 4 - y^2$

Область интегрирования D получается в результате пересечения параболы $y = \frac{x^2}{2}$ с линией пересечения цилиндра $z = 4 - y^2$ и плоскости $z=0$, то есть с прямой $y=2$. В виду симметрии тела относительно плоскости OYZ вычисляем половину искомого объема

$$\frac{1}{2}V = \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^2 (4 - y^2)dy = \int_0^2 (4y - \frac{y^3}{3})\Big|_{\frac{x^2}{2}}^2 dx = \int_0^2 (8 - \frac{8}{3} - 2x^2 + \frac{x^6}{24})dx = (\frac{16}{3}x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^7}{168})\Big|_0^2 = \frac{128}{21}$$

$$V = \frac{256}{21} \approx 12,2$$

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $z = 1 - 4x^2 - y$ и плоскостью OXY.

Заданное тело – сегмент эллиптического параболоида, расположенного над плоскостью OXY. Параболоид пересекается с плоскостью OXY по эллипсу . Следовательно, необходимо вычислить объем тела, имеющего своим основанием внутреннюю часть указанного эллипса и ограниченного параболоидом. В силу симметрии относительно плоскостей OXZ и OYZ можно вычислить объем четвертой его части, заключенной в первом октанте. Область интегрирования $4x^2 + y^2 \le 1, x \ge 9, y \ge 0$

Интегрируем сначала по y, затем по x

$$\frac{1}{4}V = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} (1-4x^2-y^2)dy = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-4x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \{2x = \sin t\} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{16}\pi = \frac{\pi}{16}$$

$$V = \frac{\pi}{4}$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить площадь, ограниченную линиями

а) $x = y^2 - 2y, x + y = 0$; b) $y = 2 - x, y^2 = 4x + 4$; c) $y^2 = 4x - x^2, y^2 = 2x$ (вне параболы)

d) $3y^2 = 25x, 5x^2 = 9y$; e) $y^2 + 2y - 3x + 1 = 0, 3x - 3y - 7 = 0$; f) $\rho = (2 - \cos\theta), \rho = 2$ (вне кардиоиды); g) $\rho = 2(1 + \cos\theta), \rho = 2\cos\theta$;

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

a) $x^2 + y^2 = 8, x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 4$

b) $x = 2y^2, y = 0, z = 0, x + 2y + z = 4$

c) $x^2 + 4y^2 + z = 1, z = 0$

d) $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$

e) $z = 4 - x^2, 2x + y = 4, x = 0, y = 0, z = 0$