Теорема Менелая

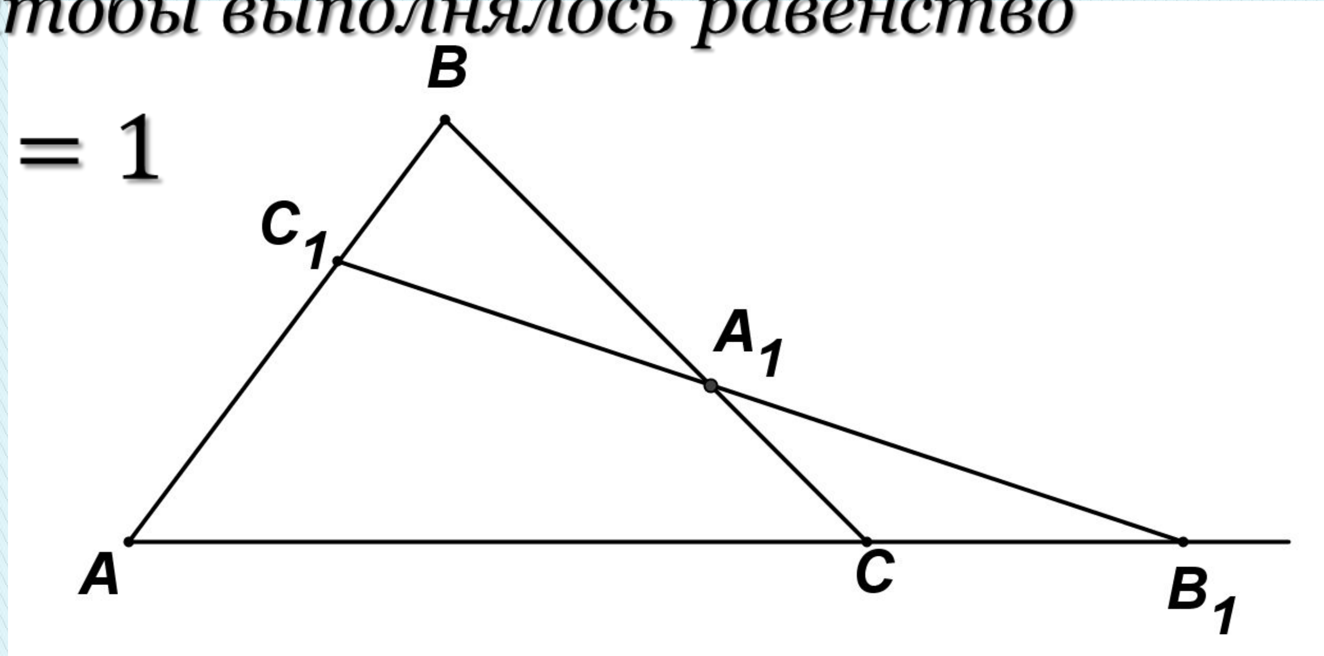
Решение задач

Менелай Александрийский (I в) древнегреческий математик и астроном. Автор работ по сферической тригонометрии: написал 6 книг о вычислении хорд и 3 книги “Сферики”, сохранившиеся в арабском переводе. Для получения формул сферической тригонометрии использовал теорему, известную сегодня как теорема Менелая.

Теорема Менелая (теорема о треугольнике и секущей)

- На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены соответственно точки C_1 и A_1, а на продолжении стороны AC – точка B_1, для того чтобы точки лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

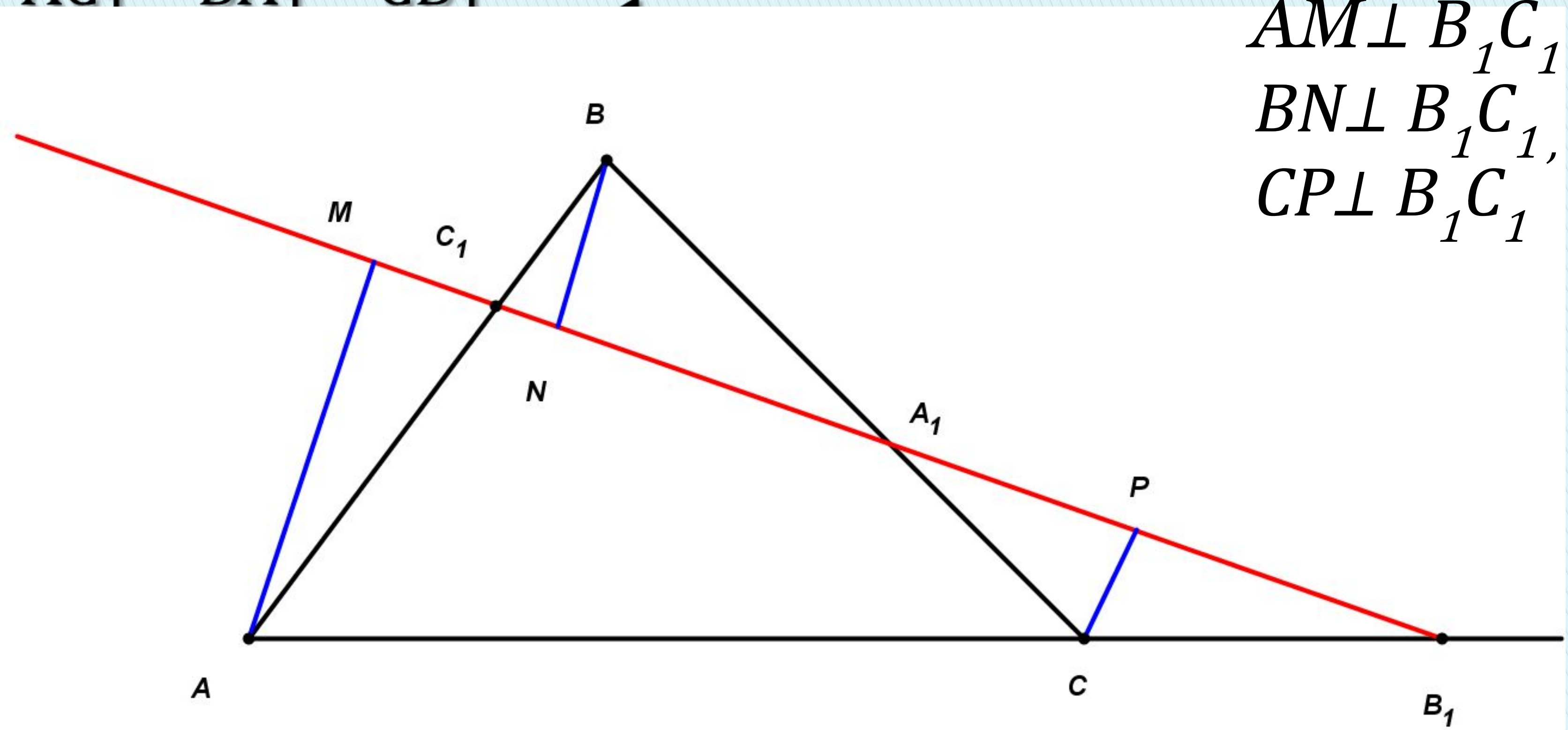


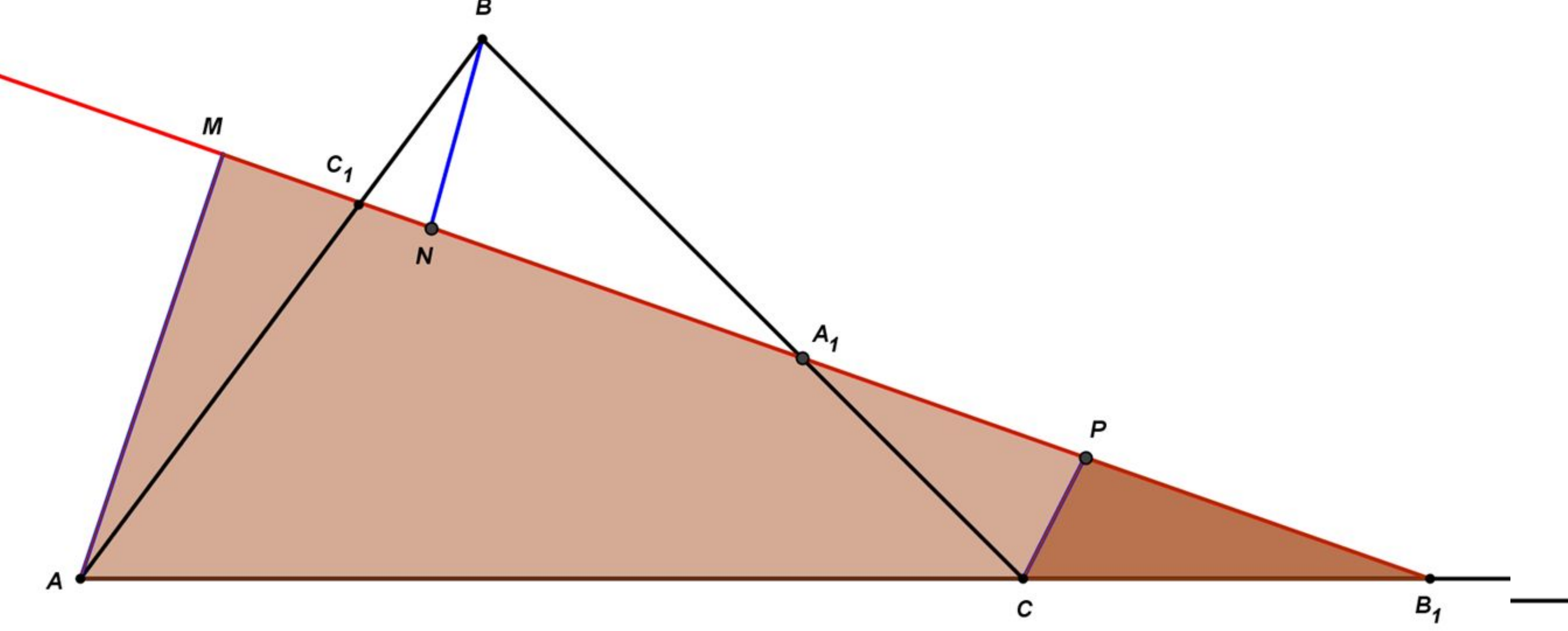
Теорема Менелая (необходимое условие)

- *Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то выполняется равенство*

AC_1 BA_1 CB_1 … 1

1. *д.п.* $AM \perp B_1C_1$, $BN \perp B_1C_1$, $CP \perp B_1C_1$





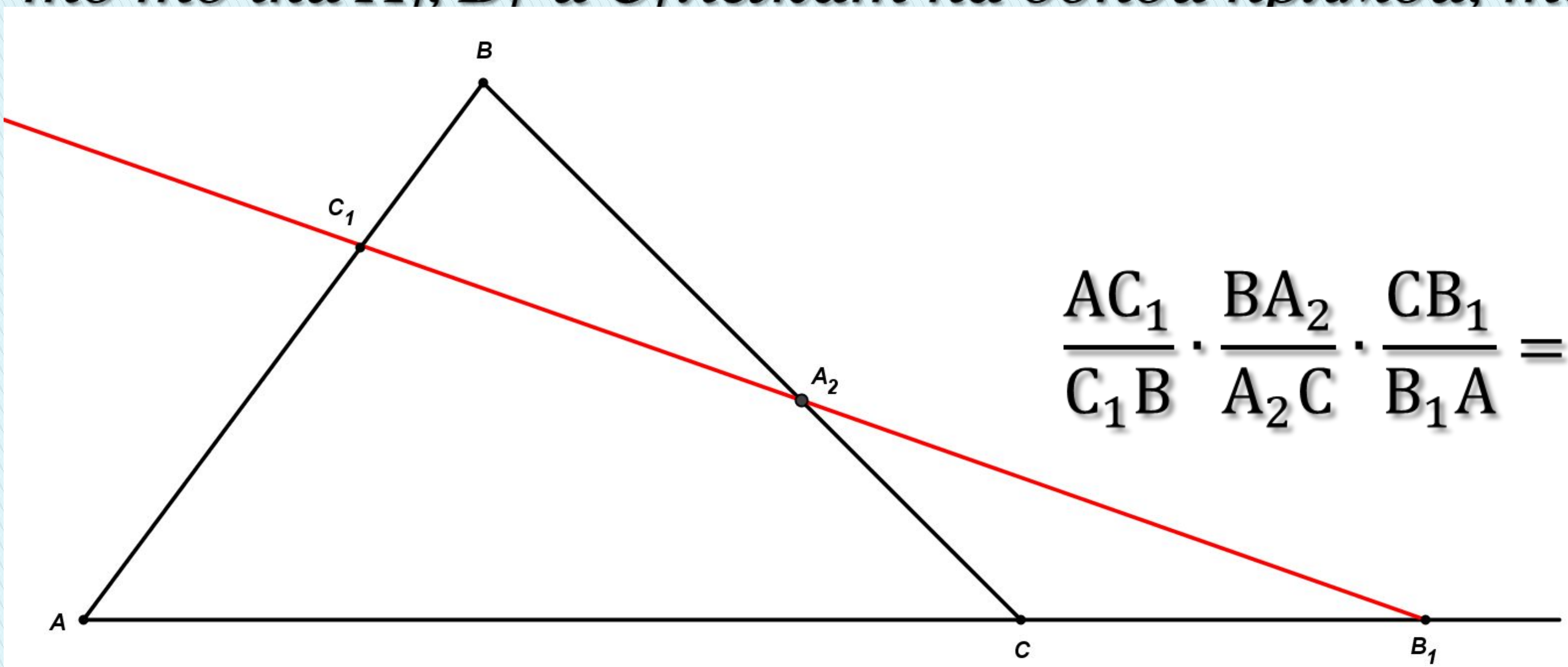
4. Перемножим левые и правые части пропорций

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AM}{BN}\cdot\frac{BN}{CP}\cdot\frac{CP}{AM}=1$$

Теорема Менелая (достаточное условие)

- Если выполняется равенство $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1\ (*)$, то точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то

я A_2



$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

- *Сравним полученное с (*)*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

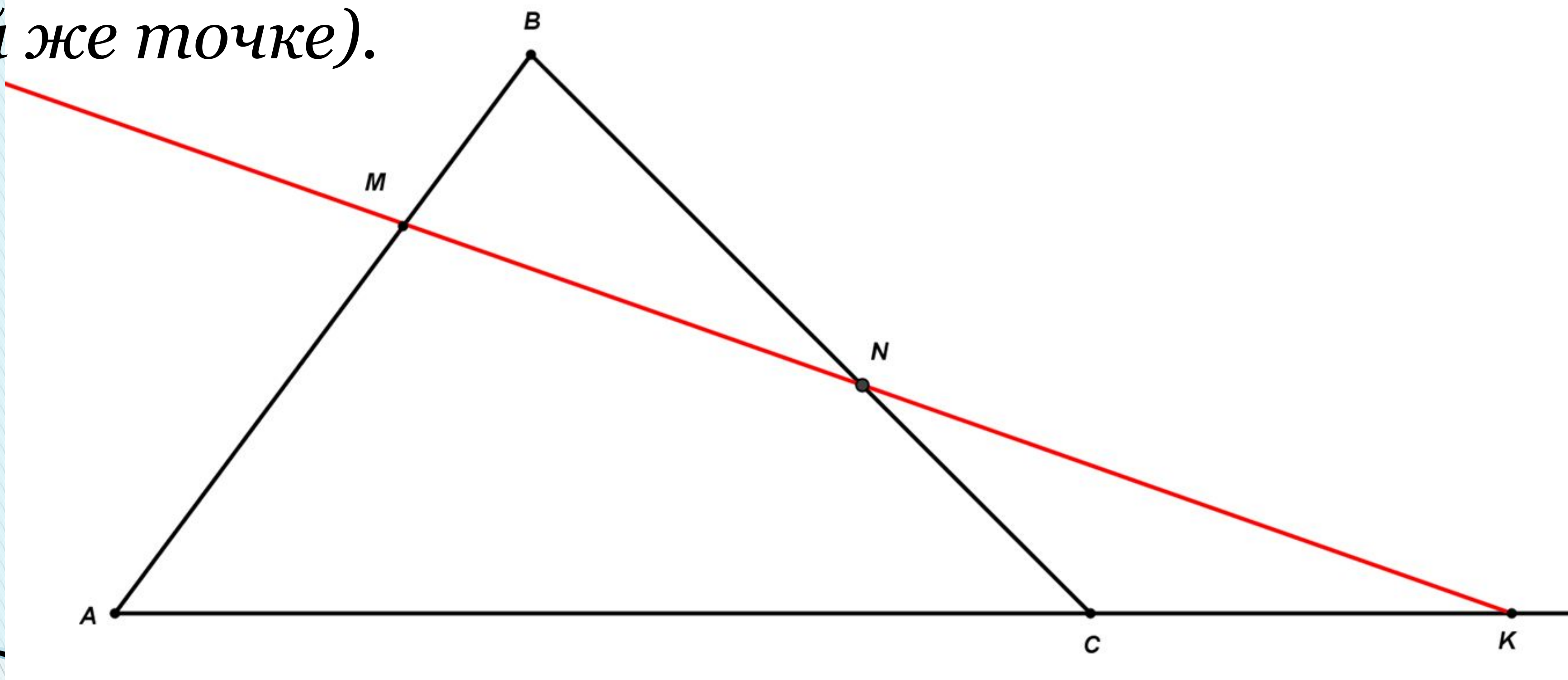
$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

$$\frac{BA_2}{A_2C}=\frac{BA_1}{A_1C} \quad =>$$

A_1 и A_2 совпадают

Как запомнить формулу (*)

В числитель заносится отрезок «от вершины до новой точки», а в знаменателе «от новой точки до следующей вершины». И так по кругу. (Движение начинается и заканчивается в одной и той же точке).

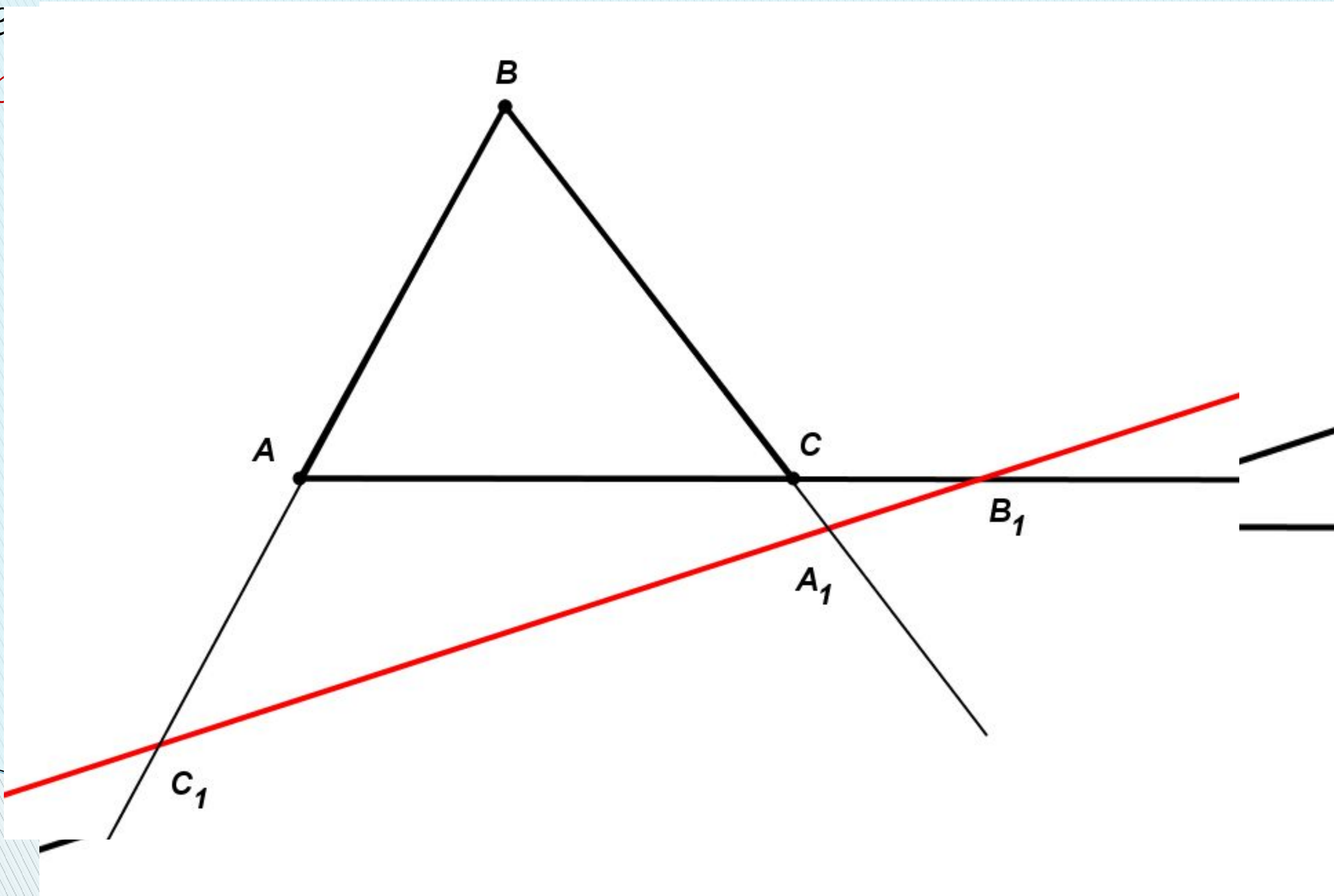


Замечание

Теорема справедлива и тогда, когда точки A_1 и C_1

ле

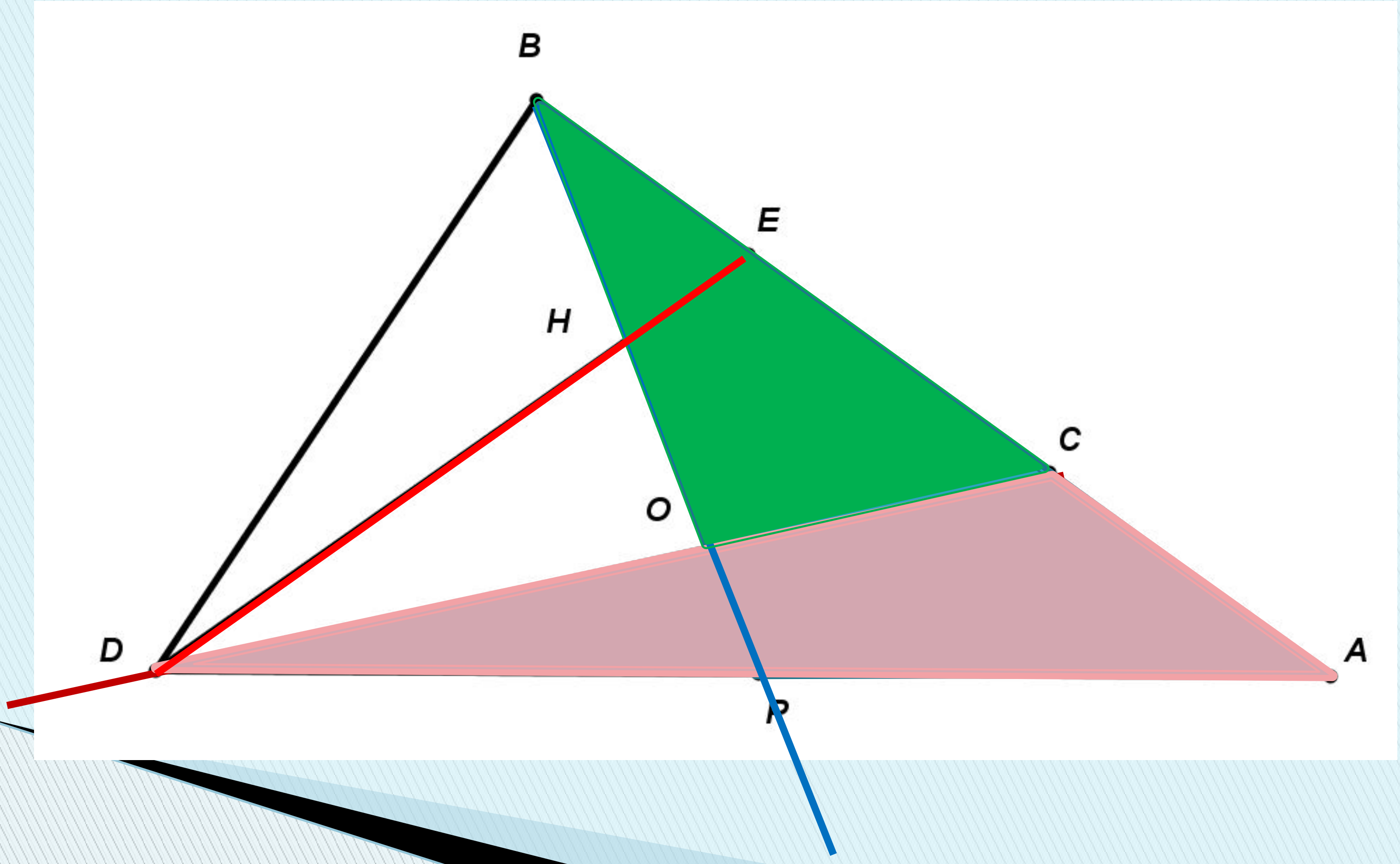
пр



Задачи:

1. Записать теорему Менелая

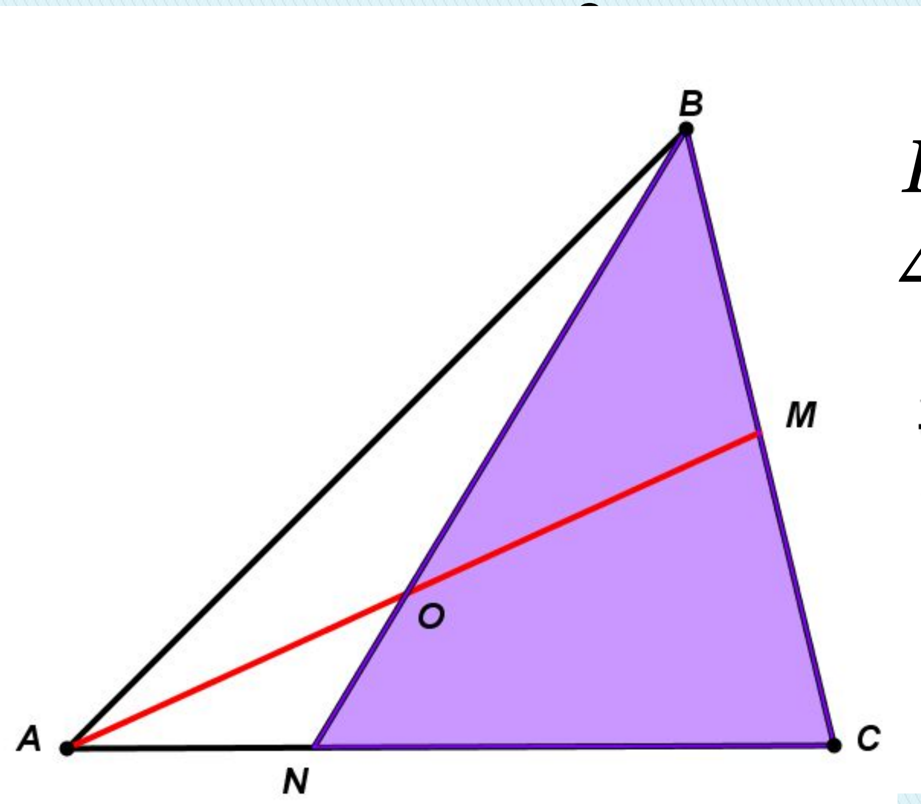
- для треугольника ABP и секущей DC ,
- для треугольника ADC и секущей BP ,
- для треугольника BOC и секущей DE.



Задачи:

3. Точка N лежит на стороне AC треугольника ABC, причём AN:NC=2:5. Найти, в каком

делит отрезок BN.



Решение.

Δ NBC И СЕКУЩАЯ AM:

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CA}{AN}\cdot\frac{NO}{OB}=1$$

$$1\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{NO}{OB}=1$$

$$\frac{NO}{OB}=\frac{2}{7}$$

Ответ:

в отношении 7:2, считая от вершины B.

Задачи:

3. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка N так, что NC = 3BN; на продолжении стороны AC за точку A взята точка M так, что MA = AC. Прямая MN пересекает сторону AB в точке F. Найдите отношение $\frac{BF}{FA}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$

Задачи:

4. На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR – точка L, причем NQ = LR. Точка пересечения отрезков QL и NR делит QL в отношении m:n, считая от точки Q. Найдите $\frac{PN}{PR}$.

Ответ: $\frac{n}{m}$

Задачи:

5. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC через точку A проведена прямая, которая пересекает диагональ BD в точке P и боковую сторону CD в точке N, причём $BP : PD = 2 : 3$, $CN : ND = 2 : 5$. Найдите отношение длин оснований трапеции.

Ответ: $\frac{4}{15}$

Задачи:

6. Углы при одном из оснований трапеции равны 39° и 51°, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 19 и 17. Найдите основания трапеции.

Ответ: $\frac{4}{15}$