Лекция № 8

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

Сила Лоренца

Из опыта: сила, действующая на точечный заряд q, зависит в общем случае и от местоположения заряда и от его скорости $\vec{v}$.

Обобщенная сила Лоренца – *полная электромагнитная* (э/м) *сила*, действующая на заряд q:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{v}, \vec{B}\right] \qquad (8.1)$$

(8.1) – *справедливо как для постоянных, так и для переменных электрических и магнитных полей при любых* $\vec{v}$ *заряда*.

Электрическая составляющая э/м силы (8.1) не зависит от $\vec{v}$

$$\vec{F}_{Э} = q\vec{E}.$$

Магнитная сила Лоренца

$$\vec{F}_{М} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right] \qquad (8.2)$$

- всегда $\vec{F}_{М} \perp \vec{v}$,
- *сообщает частице нормальное ускорение, изменяя ее скорость только по направлению*;
- *не совершает работы над заряженными частицами* $A_{\vec{F}_{М}} = 0$, т.к. $\vec{F}_{М} \perp \vec{v}$

Частица в магнитном поле кинетическую энергию не меняет.

Движение заряженной частицы в электрических и магнитных полях

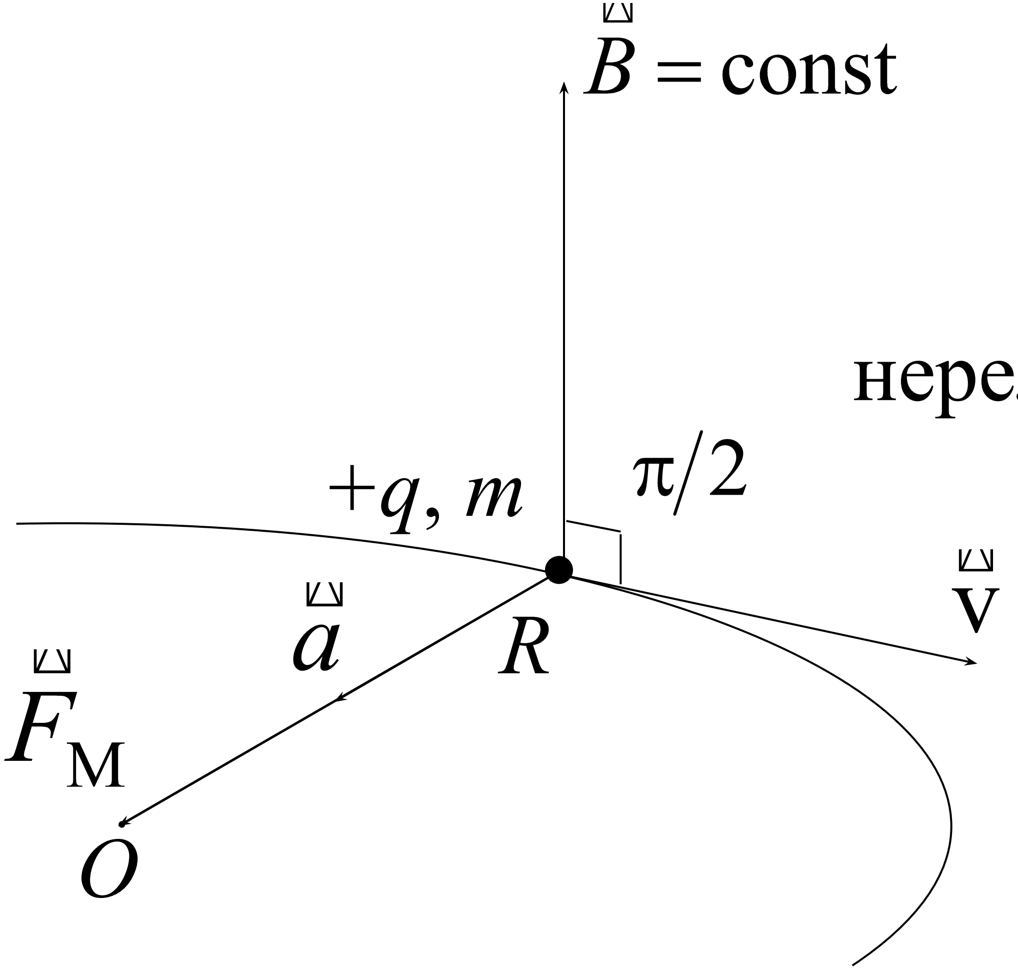
Уравнение движения :

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = q\vec{E} + q\left[\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \vec{B}\right], \\ \text{н.у.:} \quad \vec{r}(0), \quad \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(0). \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{a}$$ – ускорение движущейся заряженной частицы.

Рассмотрим частные случаи.

Движение заряженной частицы в поперечном однородном магнитном поле



$$\vec{F}_{\mathrm{M}} = q\left[\vec{\mathrm{v}}, \vec{B}\right] = q\,\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}$$

Ускорение нерелятивистской частицы

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\mathrm{M}}}{m} = \frac{q}{m}\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}$$

При $\left(\vec{\mathrm{v}} \perp \vec{B}\right)$

$$a = \frac{q\,\mathrm{v}\,B}{m} \qquad (8.3)$$

Т.к. $\vec{F}_{\text{М}} \perp \vec{\mathrm{v}}$,

$$a = a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R} = \frac{q\mathrm{v}B}{m},$$

изменяет скорость только по направлению.

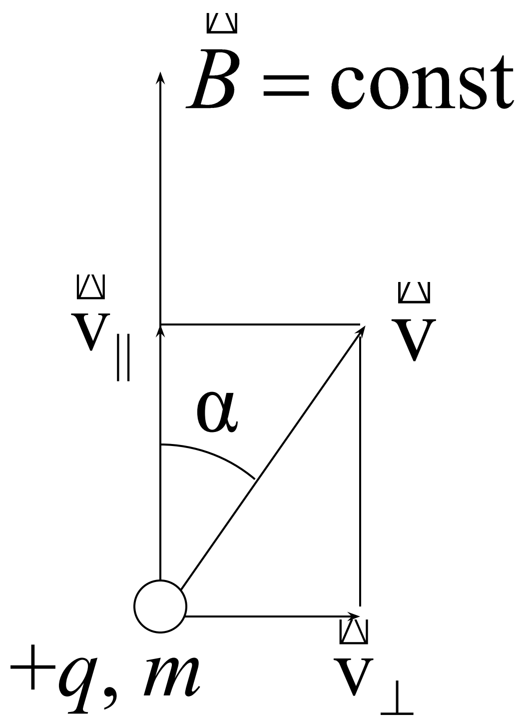
Под действием $\vec{F}_{\text{М}}$ частица движется с $|\vec{\mathrm{v}}| = \mathrm{v} = \mathrm{const}$ по окружности радиуса

$$R = \frac{m\mathrm{v}}{qB} = \mathrm{const} \qquad (8.4)$$

Период обращения $$T = \frac{2\pi R}{\mathrm{v}} = \frac{2\pi m}{qB}, \qquad (8.5)$$

частота $$\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$

Движение нерелятивистской **заряженной частицы в однородном непоперечном магнитном поле**



Пусть $\widehat{\vec{\mathrm{v}}, \vec{B}} = \alpha$

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_{\parallel} + \vec{\mathrm{v}}_{\perp},$$

где $\vec{\mathrm{v}}_{\parallel} \parallel \vec{B}, \quad \vec{\mathrm{v}}_{\perp} \perp \vec{B}$

Тогда

$$\vec{F}_{\mathrm{М}} = q\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B} = q\vec{\mathrm{v}}_{\parallel} \times \vec{B} + q\vec{\mathrm{v}}_{\perp} \times \vec{B} = q\vec{\mathrm{v}}_{\perp} \times \vec{B}$$

Здесь $$\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} = 0,$$

а $$v_{\perp} = v \sin\alpha, \qquad v_{\parallel} = v \cos\alpha$$

Это движение можно разложить на два – вращение по окружности и поступательное движение вдоль поля. *Частица движется по винтовой спирали* с ускорением

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{М}}}{m},$$

$$a = \frac{F_{\text{М}}}{m} = \frac{q\,\mathrm{v}_{\perp}\,B}{m} = \frac{q\,\mathrm{v}\,B\sin\alpha}{m}$$

Поскольку $\vec{F}_{\text{М}} \perp \vec{\mathrm{v}}$,

$\vec{a} = \vec{a}_n$, а его величина

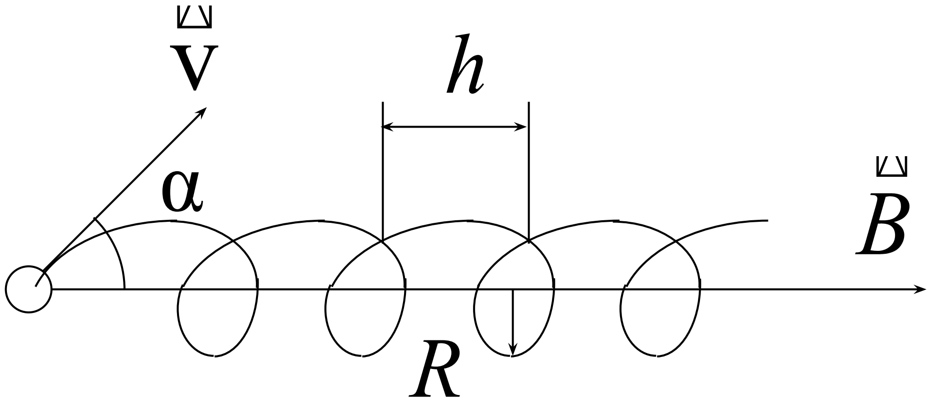
$$a = \frac{q\,\mathrm{v}_{\perp}\,B}{m} = a_n = \frac{\mathrm{v}_{\perp}^2}{R}$$

Радиус обращения частицы

$$R = \frac{m\,\mathrm{v}_{\perp}}{qB} = \frac{m\,\mathrm{v}\sin\alpha}{qB} \qquad (8.7)$$

Период обращения частицы

$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi R}{v\sin\alpha},$$



$$T = \frac{2\pi m}{qB} \qquad (8.8)$$

Шаг винтовой спирали

$$h = v_\parallel T = \frac{2\pi m}{qB} v\cos\alpha \qquad (8.9)$$

Период обращения нерелятивистских заряженных частиц в магнитном поле не зависит от скорости.

Ускорение заряженных частиц

Циклотрон – предварительный ускоритель «+» заряженных частиц (протонов, α-частиц и т.д.).

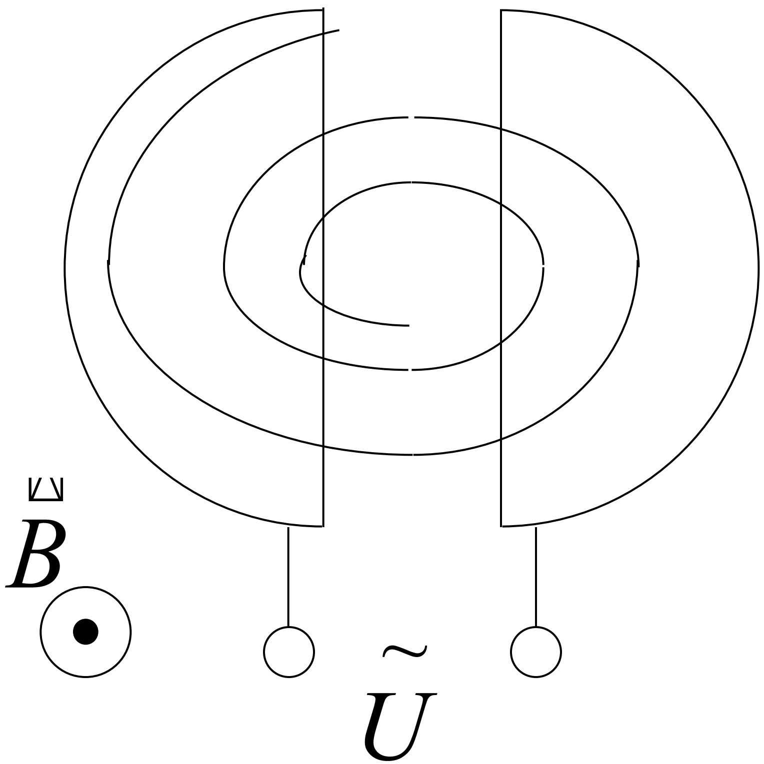
Используют независимость периода обращения нерелятивистской частицы от скорости (8.5), (8.8):

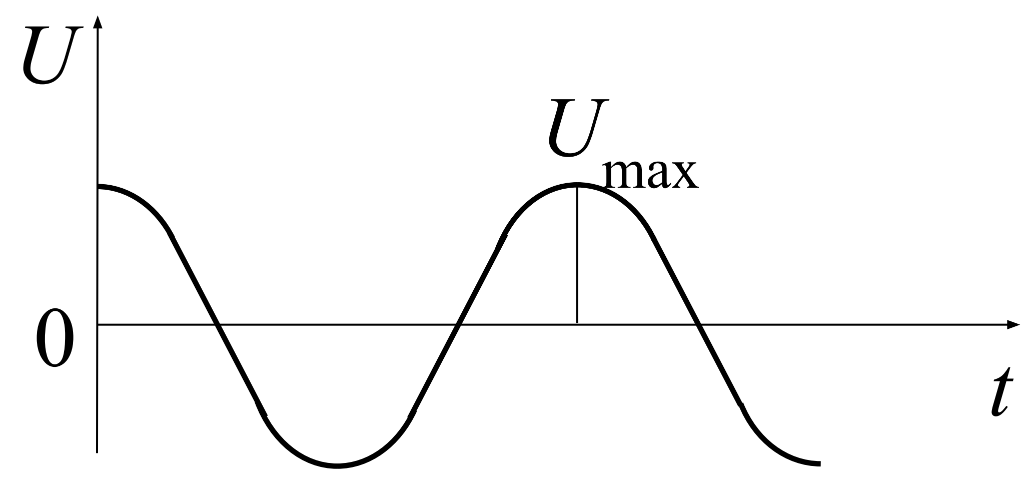
$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

Циклотрон – два металлических дуанта, помещенные в поперечное магнитное поле постоянного магнита. К дуантам приложена высокочастотная разность потенциалов

$$U = U_0 \cos \omega t,$$

создающая в зазоре между дуантами переменное поле.





Ионы, вылетевшие из ионного источника (помещается в зазоре), ускоряются электрическим полем. Пройдя зазор, ионы будут двигаться в магнитном поле по окружности. Через время

$$\Delta t = \frac{\pi m}{qB}$$

ионы вновь подойдут к зазору. Если за это время полярность дуантов поменялась, то ионы опять будут ускоряться.

Т.к. в магнитном поле $T \neq T(\vec{v})$, то через каждый интервал времени Δt ион будет попадать в зазор.

Ионы будут ускоряться *внешним высокочастотным электрическим полем, если частота его изменения совпадает с частотой обращения частицы (ионов) по окружности*

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}$$

– **условие циклотронного резонанса**.

Энергия, которую набирает ион

$$W_k = \frac{m_0 \mathrm{v}^2}{2} = qU$$

Внутри дуантов действует поперечное магнитное поле. Между – электрическое поле

$U \sim 10^5$ В, $W_k \sim 25 \div 28$ МэВ (для протона).

1эВ= 1,6 · 10^{-19} Кл · 1В = 1,6 · 10^{-19} Дж.

Дальнейшее увеличение энергии практически невозможно, как в связи с трудностями по увеличению радиуса дуантов, так и потому, что при этом увеличивается релятивистская масса иона

$$m(\mathrm{v}) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2 / c^2}}$$

и период его обращения также увеличивается

$$T(\mathrm{v}) = \frac{2\pi m(\mathrm{v})}{qB},$$

ион начинает выходить из резонанса и может попадать в зазор в моменты, когда поле будет тормозить ион.

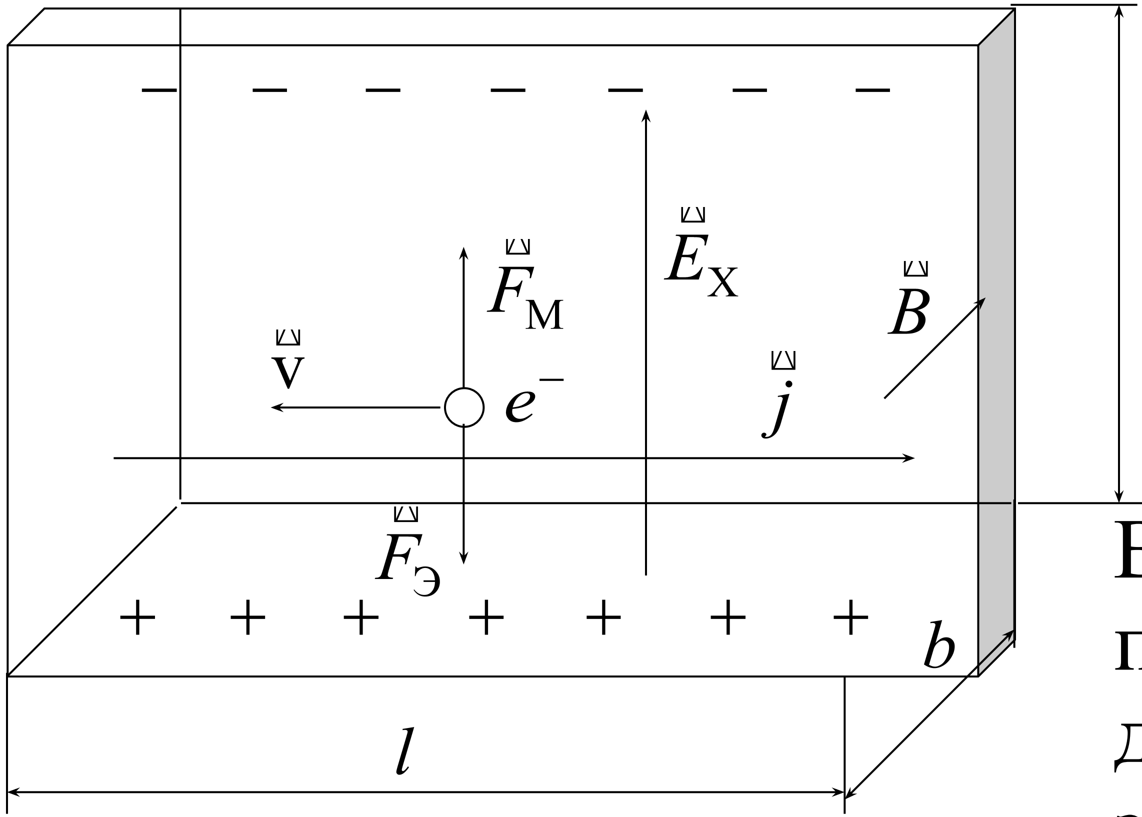
При скоростях частиц $\mathrm{v} \sim c$

для ускорения используют синхротроны (в них – изменение магнитной индукции) и фазотроны (синхроциклотроны) (в них изменяется период высокочастотного ускоряющего поля).

Эффект Холла

При помещении металлической пластинки, по которой течет ток, в магнитное поле, силовые линии которого $\perp$ току, между нижней и верхней гранями пластинки возникает *разность потенциалов* $\Delta\varphi$, называемая *холловской*.

Появление $\Delta\varphi$ объясняется действием силы Лоренца на носители тока.



На электрон в магнитном поле действует

$$\vec{F}_{М} = -e\langle\vec{v}\rangle \times \vec{B}$$

Возникает эл.поле, препятствующее движению электронов наверх

Перемещение зарядов продолжается до установления состояния равновесия

$$\vec{F}_{М} + \vec{F}_{Э} = 0,$$

после чего накопление заряда прекратится и установится значение $\vec{E}_X$

Условие равновесия $$e\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B} = -e\vec{E}_X,$$

откуда

$$\vec{E}_X = -\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B} = -\frac{\vec{j} \times \vec{B}}{en_e} = -R_X \cdot \vec{j} \times \vec{B} \qquad (8.10)$$

Здесь $\vec{j} = n_e e\langle \vec{v} \rangle,$

где n_e – концентрация электронов, **постоянная Холла**

$$R_X = \frac{1}{en_e}$$

Часто знак «–» в (8.10) относят к постоянной Холла, т.е. для электронов $R_X < 0$, а для $q > 0$ – $R_X > 0$.

$$E_X = \Delta\varphi / h$$

Холловская разность потенциалов

$$\Delta\varphi = R_X\, jhB \qquad (8.11)$$

Ларморова прецессия электронных орбит

Движение электрона по круговой орбите эквивалентно электрическому току

$$I = e\nu$$

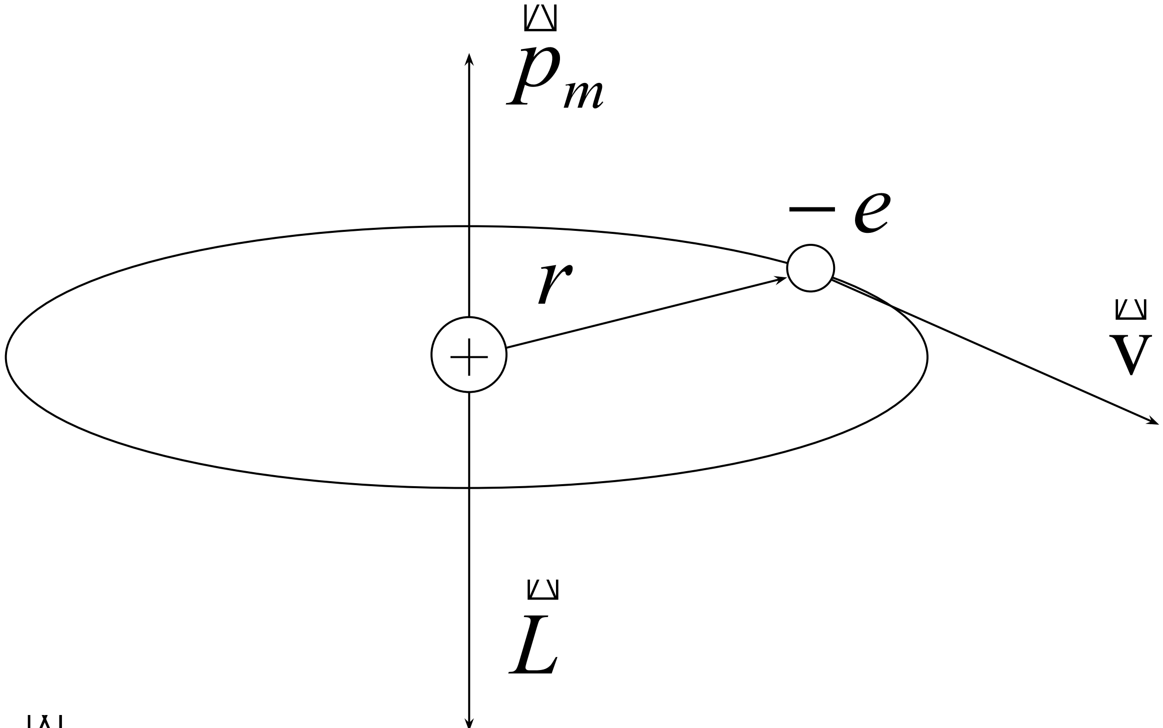
где ν − частота обращения электрона вокруг ядра.

Орбитальный магнитный момент электрона

$$p_m = IS = e\nu S = e\nu\pi r^2,$$

момент импульса и угловая скорость

$$L = m\omega r^2 \quad \text{и} \quad \omega = 2\pi\nu$$



$$\left|\frac{\vec{p}_m}{\vec{L}}\right| = \frac{e\nu S}{m\omega r^2} = \frac{e\nu\pi r^2}{m2\pi\nu r^2} = \frac{e}{2m}$$

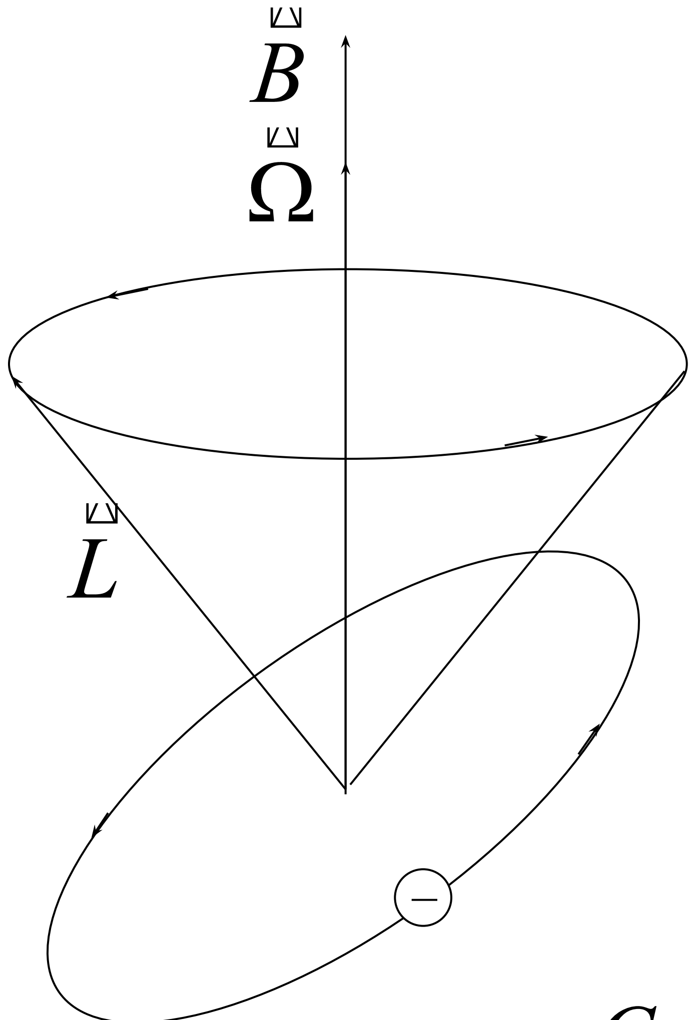
поскольку $\vec{L} \uparrow\downarrow \vec{p}_m,$

гиромагнитное отношение

$$\Gamma = \frac{\vec{p}_m}{\vec{L}} = -\frac{e}{2m} \qquad (8.12)$$

Формула (8.12) справедлива и для эллиптических орбит.

Если на электрон, вращающийся по орбите, будет действовать внешнее магнитное поле, то на замкнутый ток в магнитном поле действует пара сил под действием которой он будет совершать **прецессионное** движение.



Если вращающаяся частица имеет отрицательный заряд и

$$\vec{\Omega} \parallel \vec{B}$$

величина угловой скорости прецессии

$$\Omega = \frac{eB}{2m} = \Gamma B \qquad (8.13)$$

Скорость этой *прецессии не зависит от ориентировки орбиты.*

Теорема Лармора: *действие магнитного поля на движущийся электрон заключается в наложении на первоначальное движение равномерного вращения вокруг направления внешнего магнитного поля*.

Внешнее магнитное поле не вызывает непосредственно переориентировки электронных орбит, но только их прецессию.

Доказательство теоремы Лармора. Пусть в отсутствии внешнего магнитного поля на заряженную частицу действует центральная сила (Кулона) $\vec{F}(\vec{r})$

Уравнение движения частицы

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}) \qquad (8.14)$$

Включили внешнее магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ и ввели новую систему координат, которая равномерно вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega} \parallel \vec{B}$

Во вращающейся системе на частицу будут действовать: магнитная сила Лоренца

$$\vec{F}_M = e[\vec{v}, \vec{B}]$$

сила Кориолиса

$$\vec{F}_K = 2m[\vec{v}, \vec{\Omega}]$$

и центробежная сила

$$\vec{F}_{ц} = m\Omega^2 \vec{r}$$

Для достаточно малого Ω

$$F_{ц} << F_K$$

Так как $\vec{\Omega} \parallel \vec{B}$, то при должном выборе величины Ω можно получить

$$\vec{F}_M + \vec{F}_K = 0$$

Это выполняется, если

$$e\,\mathrm{v}\,B\sin\left(\widehat{\vec{\mathrm{v}},\vec{B}}\right)+2m\,\mathrm{v}\,\Omega\sin\left(\widehat{\vec{\mathrm{v}},\vec{B}}\right)=0$$

или

$$\Omega=-\frac{eB}{2m}$$

В рассматриваемой вращающейся системе координат уравнение движения частицы будет иметь прежний вид (8.14).

Действие магнитного поля в первом приближении (пока можно пренебречь центробежной силой) сводится к наложению дополнительного равномерного вращения с угловой скоростью Ω. Для электрона получаем формулу (8.13).

Прецессионный магнитный момент всегда

$$\vec{p}\,'_m \uparrow\downarrow \vec{B}$$

$$\left|\vec{p}\,'_m\right| << \left|\vec{p}_m\right|$$